Die Winkel n_a und n_b müssen mit Hülfe des Mondes bestimmt werden.

Die Ableitung der Formeln erfolgt auf geometrischem Wege, da im gegebenen Falle — über die Erdgestalt ist keine Annahme gemacht — der analytische nicht mit Erfolg betreten werden kann. (Vergl. Helmert: die mathem. und physik. Theorien der höheren Geodäsie Bd. I, S. 22). Lediglich wenn es sich darum handelt von den Zahlenwerten der auftretenden Unbekannten einen Begriff zu geben, ist auch hier als Repräsentant der Erdoberfläche das Rotations-Ellipsoid genommen.

2. Strenge Formeln. Wir vergleichen zunächst die Azimute der Vertikalschnitte mit den Azimuten auf der Kugel. In Figur 1, welche ein Rotations-Ellipsoid vorstellt, sind die Meridiane zweier Orte A und B, sowie die zwischen ihnen möglichen Vertikalschnitte gezeichnet. Nach Helmert ist bezeichnet in A mit a_{ab} das Azimut der Ebene, welche das Lot von A und den Punkt B enthält (dieselbe bilde mit der Vertikalen in B den Winkel n_b) und mit a'_{ab} das Azimut der Ebene, die das Lot von B und den Punkt A enthält; ihre Neigung gegen die Vertikale in A sei n_a. Die sphärischen Azimute sind durch α'_{ab} und α'_{ba} bezeichnet; sie sind aus demselben Dreieck zu berechnen, welches z lieferte. α'_{ab} kann offenbar auch genannt werden Azimut der Ebene Lot A Zenit von B, d. h. AZ_aZ_b.

Wenn man nun in B das Lot von A bis zum Zenit Z_a verfolgen könnte, so würde die dadurch bestimmte Ebene, wenn wir B als Mittelpunkt wählen, die Himmelskugel nach einem grössten Kreis schneiden, der auf dem Horizont von B nicht senkrecht steht. Die Schnittlinie dieser Ebene mit dem Horizont bildet mit der Südnordlinie den Winkel a'_{ba}.

In Figur 2 sei $SBFA'$ der Horizont von B, BZ_b die Normale in B, AZ_a jene in A, A' der Schnitt der letzteren mit dem Horizont von B,*) somit BA' die Spur der Ebene AZ_aB im genannten Horizont. Ziehen wir BZ_a parallel AZ_a und schlagen um B eine Kugel, so stellt Bogen Z_aA' die auf dem Horizont von B nicht senkrechte Ebene AZ_aB vor. Legen wir endlich durch BZ_b eine Ebene senkrecht zu Ebene AZ_aB (Bogen $Z_bZ'_b$) und eine weitere durch Z_a (Bogen Z_bZ_aF) d. i. also die Ebene BZ_bZ_a oder AZ_aZ_b, welche einander parallel sind, so entstehen zwei rechtwinklig sphärische Dreiecke. Da nun $Z_aZ_b = z$, $Z_bZ'_b = n_b$, $\sphericalangle Z_aA'F = 90^0 - n_b$, sowie

$$\sphericalangle A'BF = a^{\circ}_{ba} - a'_{ba}$$
$$\sphericalangle Z_bZ_aZ'_b = a_{ab} - a'_{ab}$$

folgt aus $\Delta\, A'Z_aF$

$$1) \qquad \sin(a^{\circ}_{ba} - a'_{ba}) = \frac{tg\, n_b}{tg\, z}$$

und aus $\Delta\, Z_bZ'_bZ_a$:

$$2) \qquad \sin(a_{ab} - a'_{ab}) = \frac{\sin n_b}{\sin z}$$

Die Gleichungen 1) und 2) geben zunächst nur Unterschiede zwischen wahren und sphärischen Azimuten und beziehen sich auf zwei verschiedene Punkte. Es ist aber sofort ersichtlich, dass eine ähnliche Figur sich für den Horizont von A darstellen lässt, der wir entnehmen:

$$1^*) \qquad \sin(a^{\circ}_{ab} - a'_{ab}) = \frac{tg\, n_a}{tg\, z}$$

$$2^*) \qquad \sin(a_{ba} - a'_{ba}) = \frac{\sin n_a}{\sin z}$$

Setzen wir

$$\sin n'_a = \sin n_a : \sin z$$
$$\sin n'_b = \sin n_b : \sin z$$

*) Um möglichst übersichtlich zu sein, gilt die Fig. 2 auch für die folgenden Beziehungen. Man hat sich daher entweder A, A' und Z_a in einer Geraden zu denken oder noch besser den Ort A auf AB zwischen B und A anzunehmen.

welche Substitutionen, wie sich später zeigen wird, zulässig sind, so folgt aus 2)

$$a_{ab} - a'_{ab} = n'_b\,.$$

Ferner nach 1*)

$$\sin(a^{\text{'}}_{ab} - a'_{ab}) = \sin n'_a \frac{\cos z}{\cos n_a} = \sin n''_a$$

also die Azimutaldifferenz der Vertikalschnitte

$$3)\qquad a_{ab} - a^{\text{'}}_{ab} = n'_b - n''_a$$

$$a_{ba} - a^{\text{'}}_{ba} = n'_a - n''_b$$

Diese nun bekannten Grössen benutzen wir zur Entwicklung weiterer Formeln.

Im Horizont von B (Figur 2) seien $A'B$ und BE die Spuren der Ebenen AZ_aB und BZ_bA, AB die gerade Verbindungslinie (Sehne). Eine Kugel um B schneidet aus dem Dreikant ein sphärisches Dreieck aus, rechtwinklig bei E, und es ist Seite $(A'E = a_{ba} - a^{\text{'}}_{ba}$, Seite $EA = \mu_{ba}$ der Depressionswinkel, d. h. der Winkel der Sehne mit dem Horizont, $\sphericalangle\, EA'A = 90^0 - n_b$, $\sphericalangle\, A'AE = \nu$ der Flächenwinkel der beiden Vertikalschnitte. Mithin

$$4)\qquad \cos\nu = \cos n_b \cos(a_{ba} - a^{\text{'}}_{ba})$$

woraus folgt, wenn

$$\frac{\sin n_b}{\sin\nu} = \sin p_b$$

gesetzt wird, was, wie sich später zeigt, zulässig erscheint

$$4^*)\qquad \sin(a_{ba} - a^{\text{'}}_{ba}) = \sin\nu \cdot \sec n_b \cos p_b$$

Ferner

$$5)\qquad tg\,(a_{ba} - a^{\text{'}}_{ba}) = tg\,\nu \cdot \sin\mu_{ba}$$

und endlich aus 4), 4*) und 5):

$$6)\qquad 90^0 - p_b = \mu_{ba}$$

ebenso analog $\qquad 90^0 - p_a = \mu_{ab}\,.$

Die Formel 5) wurde bereits von Helmert in den „math. und phys. Theorien der h. G.“ Bd. I S. 188, sowie von

Bremiker in dessen „Studien über höhere Geodäsie“ S. 23 angegeben.

Aus dem Vorstehenden erhellt, dass die Formeln für jede beliebige Gestalt der Erdoberfläche Gültigkeit haben. Erachtet man jedoch die Allgemeinheit durch die Annahme $n < z$ und $180^0 - z$, $n < \nu$ (wie es bei der Uebereinstimmung mit einer ellipsoidischen Oberfläche im Grossen und Ganzen sicher zutrifft) als geschädigt, so hindert nichts die Tangente statt des Sinus einzuführen.

3. Fortsetzung. Die bisher entwickelten Formeln geben Aufschluss über die gegenseitige Lage zweier Punkte, ohne eine Beziehung zur Erdaxe zu enthalten. Es leuchtet auch sofort ein, dass sie nichts in Bezug auf jene aussagen können, da nur die der Axe parallele Schnittlinie der Meridiane, welche von den beiden Loten getroffen wird, in Betracht kam. So wie wir aber in 3 Punkten die Winkel n bekannt voraussetzen, lässt sich entscheiden, ob die drei Meridiane sich nach einer Geraden schneiden. Wiewohl nun, wenn dies nicht zutrifft, auf die Lage der Erdaxe nicht geschlossen werden kann, und auch beim Zusammenfallen die Identität mit der Axe nicht erwiesen ist, so erkennt man doch die Nützlichkeit des Kriteriums bei zahlreicher vorhandenen Punkten mit bekannten Winkeln n. Wir wollen desshalb noch einige zur Lösung nötige Formeln hier wiedergeben.

Der Flächenwinkel χ_{ba} der Azimutalebene AZ_aB mit dem Meridian von B findet sich aus Figur 2, wo Bogen $Z_bK_b'N$ den Meridian, $Z_b'Z_aA'$ die Azimutalebene vorstellt. Das sphärische Dreieck $NA'K_a'$ ist bei N rechtwinklig, Seite $NA' = 180^0 - \alpha'_{ba}$, $\sphericalangle NA'K_a' = 90^0 - n_b$, $\sphericalangle A'K_a'N = 180^0 - \chi_{ba}$, mithin

$$7) \qquad \cos \chi_{ba} = \cos \alpha'_{ba} \cdot \cos n_b$$

ω_{ba} sei der Winkel der Sehne mit der Schnittlinie zwischen der Ebene AZ_aB und dem Meridian von B. In Figur 2 bezeichnet AB die Sehne, Z_bBK_b' das Lot von B, BK_a' die