I. Beziehungen auf dem Geoid.

1. Einleitung. Die beiden geographischen Koordinaten je eines Punktes der Erdoberfläche, Polhöhe und Länge in Bezug auf einen als ersten gewählten Meridian ergeben sich aus astronomischen Beobachtungen, welche mit beliebig weit getriebener Genauigkeit die Positionen der Zenite auf der Himmelskugel gegen den Pol fixieren und daher auch die sphärischen Azimute liefern. Dabei ist über die Gestalt der Fläche, welcher die Punkte angehören, keinerlei Voraussetzung gemacht. Erst wenn man die astronomischen Azimute gegenseitig unsichtbarer Punkte, die Differenz zwischen wahrem und sphärischem Azimut, den Unterschied der Azimute der Vertikalschnitte, ihren Flächenwinkel und die Depressionswinkel kennen lernen will, muss man nach dem bisher üblichen Verfahren zu Annahmen über die Erdoberfläche greifen.

Zweck dieses Abschnittes ist nun zu zeigen, dass ohne irgend welche Voraussetzungen über das Geoid sich äusserst einfache Formeln für die eben genannten (und andere) Grössen ergeben, wenn man 1. die Zenitdistanz der beiden Orte (Amplitude) z und 2. die zwei Neigungen n_a und n_b je der Azimutal-Ebene des einen Orts gegen die Vertikale des andern benutzt.

Die Zenitdistanz (Amplitude) zweier Orte giebt, wenn B_a und B_b die Polhöhen L_{ab} den Längenunterschied bezeichnen, die sphärische Trigonometrie durch die Relation

$$\cos z = \sin B_a \cdot \sin B_b + \cos B_a \cdot \cos B_b \cdot \cos L_{ab}$$

Die Winkel n_a und n_b müssen mit Hülfe des Mondes bestimmt werden.

Die Ableitung der Formeln erfolgt auf geometrischem Wege, da im gegebenen Falle — über die Erdgestalt ist keine Annahme gemacht — der analytische nicht mit Erfolg betreten werden kann. (Vergl. Helmert: die mathem. und physik. Theorien der höheren Geodäsie Bd. I, S. 22). Lediglich wenn es sich darum handelt von den Zahlenwerten der auftretenden Unbekannten einen Begriff zu geben, ist auch hier als Repräsentant der Erdoberfläche das Rotations-Ellipsoid genommen.

2. Strenge Formeln. Wir vergleichen zunächst die Azimute der Vertikalschnitte mit den Azimuten auf der Kugel. In Figur 1, welche ein Rotations-Ellipsoid vorstellt, sind die Meridiane zweier Orte A und B, sowie die zwischen ihnen möglichen Vertikalschnitte gezeichnet. Nach Helmert ist bezeichnet in A mit a_{ab} das Azimut der Ebene, welche das Lot von A und den Punkt B enthält (dieselbe bilde mit der Vertikalen in B den Winkel n_b) und mit $a^{\prime}_{ab}$ das Azimut der Ebene, die das Lot von B und den Punkt A enthält; ihre Neigung gegen die Vertikale in A sei n_a. Die sphärischen Azimute sind durch a'_{ab} und a'_{ba} bezeichnet; sie sind aus demselben Dreieck zu berechnen, welches z lieferte. a'_{ab} kann offenbar auch genannt werden Azimut der Ebene Lot A Zenit von B, d. h. AZ_aZ_b.

Wenn man nun in B das Lot von A bis zum Zenit Z_a verfolgen könnte, so würde die dadurch bestimmte Ebene, wenn wir B als Mittelpunkt wählen, die Himmelskugel nach einem grössten Kreis schneiden, der auf dem Horizont von B nicht senkrecht steht. Die Schnittlinie dieser Ebene mit dem Horizont bildet mit der Südnordlinie den Winkel $a^{\prime}_{ba}$.

In Figur 2 sei $SBFA'$ der Horizont von B, BZ_b die Normale in B, AZ_a jene in A, A' der Schnitt der letzteren