I. Beziehungen auf dem Geoid.

1. Einleitung. Die beiden geographischen Koordinaten je eines Punktes der Erdoberfläche, Polhöhe und Länge in Bezug auf einen als ersten gewählten Meridian ergeben sich aus astronomischen Beobachtungen, welche mit beliebig weit getriebener Genauigkeit die Positionen der Zenite auf der Himmelskugel gegen den Pol fixieren und daher auch die sphärischen Azimute liefern. Dabei ist über die Gestalt der Fläche, welcher die Punkte angehören, keinerlei Voraussetzung gemacht. Erst wenn man die astronomischen Azimute gegenseitig unsichtbarer Punkte, die Differenz zwischen wahrem und sphärischem Azimut, den Unterschied der Azimute der Vertikalschnitte, ihren Flächenwinkel und die Depressionswinkel kennen lernen will, muss man nach dem bisher üblichen Verfahren zu Annahmen über die Erdoberfläche greifen.

Zweck dieses Abschnittes ist nun zu zeigen, dass ohne irgend welche Voraussetzungen über das Geoid sich äusserst einfache Formeln für die eben genannten (und andere) Grössen ergeben, wenn man 1. die Zenitdistanz der beiden Orte (Amplitude) z und 2. die zwei Neigungen n_a und n_b je der Azimutal-Ebene des einen Orts gegen die Vertikale des andern benutzt.

Die Zenitdistanz (Amplitude) zweier Orte giebt, wenn B_a und B_b die Polhöhen L_{ab} den Längenunterschied bezeichnen, die sphärische Trigonometrie durch die Relation

$$\cos z = \sin B_a \cdot \sin B_b + \cos B_a \cdot \cos B_b \cdot \cos L_{ab}$$

Die Winkel n_a und n_b müssen mit Hülfe des Mondes bestimmt werden.

Die Ableitung der Formeln erfolgt auf geometrischem Wege, da im gegebenen Falle — über die Erdgestalt ist keine Annahme gemacht — der analytische nicht mit Erfolg betreten werden kann. (Vergl. Helmert: die mathem. und physik. Theorien der höheren Geodäsie Bd. I, S. 22). Lediglich wenn es sich darum handelt von den Zahlenwerten der auftretenden Unbekannten einen Begriff zu geben, ist auch hier als Repräsentant der Erdoberfläche das Rotations-Ellipsoid genommen.

2. Strenge Formeln. Wir vergleichen zunächst die Azimute der Vertikalschnitte mit den Azimuten auf der Kugel. In Figur 1, welche ein Rotations-Ellipsoid vorstellt, sind die Meridiane zweier Orte A und B, sowie die zwischen ihnen möglichen Vertikalschnitte gezeichnet. Nach Helmert ist bezeichnet in A mit a_{ab} das Azimut der Ebene, welche das Lot von A und den Punkt B enthält (dieselbe bilde mit der Vertikalen in B den Winkel n_b) und mit a'_{ab} das Azimut der Ebene, die das Lot von B und den Punkt A enthält; ihre Neigung gegen die Vertikale in A sei n_a. Die sphärischen Azimute sind durch α'_{ab} und α'_{ba} bezeichnet; sie sind aus demselben Dreieck zu berechnen, welches z lieferte. α'_{ab} kann offenbar auch genannt werden Azimut der Ebene Lot A Zenit von B, d. h. AZ_aZ_b.

Wenn man nun in B das Lot von A bis zum Zenit Z_a verfolgen könnte, so würde die dadurch bestimmte Ebene, wenn wir B als Mittelpunkt wählen, die Himmelskugel nach einem grössten Kreis schneiden, der auf dem Horizont von B nicht senkrecht steht. Die Schnittlinie dieser Ebene mit dem Horizont bildet mit der Südnordlinie den Winkel a'_{ba}.

In Figur 2 sei $SBFA'$ der Horizont von B, BZ_b die Normale in B, AZ_a jene in A, A' der Schnitt der letzteren mit dem Horizont von B,*) somit BA' die Spur der Ebene AZ_aB im genannten Horizont. Ziehen wir BZ_a parallel AZ_a und schlagen um B eine Kugel, so stellt Bogen Z_aA' die auf dem Horizont von B nicht senkrechte Ebene AZ_aB vor. Legen wir endlich durch BZ_b eine Ebene senkrecht zu Ebene AZ_aB (Bogen Z_bZ_b') und eine weitere durch Z_a (Bogen Z_bZ_aF) d. i. also die Ebene BZ_bZ_a oder AZ_aZ_b, welche einander parallel sind, so entstehen zwei rechtwinklig sphärische Dreiecke. Da nun $Z_aZ_b = z$, $Z_bZ_b' = n_b$, $\sphericalangle Z_aA'F = 90^0 - n_b$, sowie

$$\sphericalangle A'BF = a^{\prime\prime}_{ba} - a'_{ba}$$
$$\sphericalangle Z_bZ_aZ_b' = a_{ab} - a'_{ab}$$

folgt aus $\varDelta A'Z_aF$

$$1) \qquad \sin(a^{\prime\prime}_{ba} - a'_{ba}) = \frac{tg\, n_b}{tg\, z}$$

und aus $\varDelta Z_bZ_b'Z_a$:

$$2) \qquad \sin(a_{ab} - a'_{ab}) = \frac{\sin n_b}{\sin z}$$

Die Gleichungen 1) und 2) geben zunächst nur Unterschiede zwischen wahren und sphärischen Azimuten und beziehen sich auf zwei verschiedene Punkte. Es ist aber sofort ersichtlich, dass eine ähnliche Figur sich für den Horizont von A darstellen lässt, der wir entnehmen:

$$1^*) \qquad \sin(a^{\prime\prime}_{ab} - a'_{ab}) = \frac{tg\, n_a}{tg\, z}$$

$$2^*) \qquad \sin(a_{ba} - a'_{ba}) = \frac{\sin n_a}{\sin z}$$

Setzen wir

$$\sin n'_a = \sin n_a : \sin z$$
$$\sin n'_b = \sin n_b : \sin z$$

*) Um möglichst übersichtlich zu sein, gilt die Fig. 2 auch für die folgenden Beziehungen. Man hat sich daher entweder A, A' und Z_a in einer Geraden zu denken oder noch besser den Ort A auf AB zwischen B und A anzunehmen.

welche Substitutionen, wie sich später zeigen wird, zulässig sind, so folgt aus 2)

$$a_{ab} - a'_{ab} = n'_b .$$

Ferner nach 1*)

$$\sin (a^{\supset}_{ab} - a'_{ab}) = \sin n'_a \frac{\cos z}{\cos n_a} = \sin n''_a$$

also die Azimutaldifferenz der Vertikalschnitte

$$3) \qquad a_{ab} - a^{\supset}_{ab} = n'_b - n''_a$$

$$a_{ba} - a^{\supset}_{ba} = n'_a - n''_b$$

Diese nun bekannten Grössen benutzen wir zur Entwicklung weiterer Formeln.

Im Horizont von B (Figur 2) seien $A'B$ und BE die Spuren der Ebenen AZ_aB und BZ_bA, AB die gerade Verbindungslinie (Sehne). Eine Kugel um B schneidet aus dem Dreikant ein sphärisches Dreieck aus, rechtwinklig bei E, und es ist Seite $(A'E = a_{ba} - a^{\supset}_{ba}$, Seite $EA = \mu_{ba}$ der Depressionswinkel, d. h. der Winkel der Sehne mit dem Horizont, $\sphericalangle EA'A = 90^0 - n_b$, $\sphericalangle A'AE = \nu$ der Flächenwinkel der beiden Vertikalschnitte. Mithin

$$4) \qquad \cos \nu = \cos n_b \cos (a_{ba} - a^{\supset}_{ba})$$

woraus folgt, wenn

$$\frac{\sin n_b}{\sin \nu} = \sin p_b$$

gesetzt wird, was, wie sich später zeigt, zulässig erscheint

$$4^*) \qquad \sin (a_{ba} - a^{\supset}_{ba}) = \sin \nu \cdot \sec n_b \cos p_b$$

Ferner

$$5) \qquad tg\,(a_{ba} - a^{\supset}_{ba}) = tg\,\nu \cdot \sin \mu_{ba}$$

und endlich aus 4), 4*) und 5):

$$6) \qquad 90^0 - p_b = \mu_{ba}$$

ebenso analog $\qquad 90^0 - p_a = \mu_{ab}.$

Die Formel 5) wurde bereits von Helmert in den „math. und phys. Theorien der h. G.“ Bd. I S. 188, sowie von

Bremiker in dessen „Studien über höhere Geodäsie“ S. 23 angegeben.

Aus dem Vorstehenden erhellt, dass die Formeln für jede beliebige Gestalt der Erdoberfläche Gültigkeit haben. Erachtet man jedoch die Allgemeinheit durch die Annahme $n < z$ und $180^0 - z$, $n < \nu$ (wie es bei der Uebereinstimmung mit einer ellipsoidischen Oberfläche im Grossen und Ganzen sicher zutrifft) als geschädigt, so hindert nichts die Tangente statt des Sinus einzuführen.

3. Fortsetzung. Die bisher entwickelten Formeln geben Aufschluss über die gegenseitige Lage zweier Punkte, ohne eine Beziehung zur Erdaxe zu enthalten. Es leuchtet auch sofort ein, dass sie nichts in Bezug auf jene aussagen können, da nur die der Axe parallele Schnittlinie der Meridiane, welche von den beiden Loten getroffen wird, in Betracht kam. So wie wir aber in 3 Punkten die Winkel n bekannt voraussetzen, lässt sich entscheiden, ob die drei Meridiane sich nach einer Geraden schneiden. Wiewohl nun, wenn dies nicht zutrifft, auf die Lage der Erdaxe nicht geschlossen werden kann, und auch beim Zusammenfallen die Identität mit der Axe nicht erwiesen ist, so erkennt man doch die Nützlichkeit des Kriteriums bei zahlreicher vorhandenen Punkten mit bekannten Winkeln n. Wir wollen desshalb noch einige zur Lösung nötige Formeln hier wiedergeben.

Der Flächenwinkel χ_{ba} der Azimutalebene AZ_aB mit dem Meridian von B findet sich aus Figur 2, wo Bogen $Z_bK'_bN$ den Meridian, Z'_bZ_aA' die Azimutalebene vorstellt. Das sphärische Dreieck $NA'K'_a$ ist bei N rechtwinklig, Seite $NA' = 180^0 - a'_{ba}$, $\sphericalangle NA'K'_a = 90^0 - n_b$, $\sphericalangle A'K'_aN = 180^0 - \chi_{ba}$, mithin

$$7) \qquad \cos \chi_{ba} = \cos a'_{ba} \cdot \cos n_b$$

ω_{ba} sei der Winkel der Sehne mit der Schnittlinie zwischen der Ebene AZ_aB und dem Meridian von B. In Figur 2 bezeichnet AB die Sehne, $Z_bBK'_b$ das Lot von B, BK'_a die eben genannte Schnittlinie. Die Kugel um B liefert ein sphärisches Dreieck, in welchem Bogen $K'_a K'_b$ im Meridian von B liegt.

Daher Seite $AK'_b = 90^0 - \mu_{ba}$

$\sphericalangle\ AK'_b K'_a = 180^0 - a_{ba}$

$\sphericalangle\ K'_b AK'_a = \nu$

$\sphericalangle\ AK'_a K'_b = \chi_{ba}$

Seite $K'_a K'_b = b_{ba}$ (von Hansen $B' - \Gamma$ genannt)

mithin

$$8)\qquad \sin \omega_{ba} = \cos \mu_{ba} \frac{\sin a_{ba}}{\sin \chi_{ba}}$$

$$= \sin b_{ba} \frac{\sin a_{ba}}{\sin \nu}$$

also

$$9)\qquad \sin b_{ba} = \cos \mu_{ba} \frac{\sin \nu}{\sin \chi_{ba}}$$

Aus Gl. 9) folgt mit Berücksichtigung von 6)

$$10)\qquad \sin b_{ba} = \frac{\sin n_b}{\sin \chi_{ba}}$$

und im Zusammenhalt mit Gl. 7)

$$11)\qquad \cos b_{ba} = \frac{\cos n_b \cdot \sin a'_{ba}}{\sin \chi_{ba}}$$

Die Gl.

$$12)\qquad tg\, b_{ba} = tg\, n_b : \sin a'_{ba}$$

sowie

$$13)\qquad tg\, \chi_{ba} = tg\, a'_{ba} \sec b_{ba}$$

hätten aus dem gleichen rechtwinklig sphärischen Dreieck unmittelbar gefunden werden können. Das Dreieck $K'_a NA'$ giebt endlich den Winkel zwischen den Schnittlinien der Ebene AZ_aB mit dem Horizont und Meridian von B, nämlich Seite $A'K'_a = \gamma_{ba}$

$$14)\qquad tg\, \gamma_{ba} = \operatorname{cotg} b_{ba} \cdot \sec a'_{ba} \cdot \sec n_b$$

Die Seite AA' in dem sphärischen Dreieck EAA' gleich μ'_{ab} gesetzt folgt zu

$$tg\, \mu'_{ba} = tg\, \mu_{ba} \cdot \sec \nu$$

Und analog (was von Gl. 6) an als überflüssig anzuschreiben unterlassen wurde)

15) $$tg\, \mu'_{ab} = tg\, \mu_{ab} \sec \nu.$$

Die Gl.

$$\omega_{ba} = \gamma_{ba} - \mu'_{ba}$$

kontrolliert die Richtigkeit der bisher gegebenen Formeln.

Endlich müssen wir noch den Winkel kennen lernen, welchen die Sehne zweier Orte mit dem im Meridian des einen Orts liegenden Schnitt der Ebene einschliesst, welche bestimmt ist durch jenen Ort und das Lot eines dritten Orts. In der Figur 3 wird der Fall erledigt für den Winkel ω'_c *) der Sehne AC mit dem Schnitt der Ebene Lot B Punkt C und dem Meridian von C nach Linie CK'_b. In dem sphärischen Dreieck, welches die Kugel um C mit den von den Linien AC, CZ_c, CK'_b herrührenden Ecken giebt, ist bekannt:

$$\text{Seite } AK'_c = 90^0 - \mu_{ca}$$
$$\text{Seite } K'_bK'_c = b_{cb}$$
$$\sphericalangle\, AK'_cK'_b = a_{ca}, \text{ daher}$$

16) $$\cos \omega'_c = \sin \mu_{ca} \cdot \cos b_{cb} + \cos \mu_{ca} \cdot \sin b_{cb} \cos a_{ca}$$

Setzen wir jetzt ein Rotationsellipsoid voraus und verbinden den Schnitt des Lotes von B mit der Axe in K'_b mit den Orten A und C, so entsteht dadurch ein Dreikant, von dem drei Seiten und ein Winkel bekannt sind, nämlich

$$\text{Seite } BK'_bC = 180^0 - (90^0 - \mu_{bc} + \omega_{cb})$$
$$\text{„ } BK'_bA = 180^0 - (90^0 - \mu_{ba} + \omega_{ab})$$
$$\text{„ } AK'_cC = 180^0 - (\omega'_c + \omega'_a)$$
$$\sphericalangle \text{ an } BK'_b = a_{bc} - a_{ba}.$$

Es ist also eine überschüssige Bestimmung vorhanden. Schneiden sich nun die 3 Meridiane, wie es allgemein der Fall sein wird, nach 3 verschiedenen Parallelen zur Erdaxe, so bleiben unsere Relationen 7)—16) gültig, die entsprechen-

*) Konsequenter Weise müsste der Winkel ω_{bca} bez. werden.

den Linien treffen sich aber nicht mehr in einem Punkte, und deshalb wird das sphärische Dreieck der überschüssigen Bestimmung nicht mehr genügen können. Obwohl wir nun 3 solcher Dreikante zur Verfügung haben, vermögen wir doch aus den Widersprüchen keinen andern Schluss auf die gegenseitige Lage zu ziehen als den einer besseren oder geringeren Uebereinstimmung der Geoidfläche mit einem Rotationskörper in streng mathematischem Sinne.

4. Fortsetzung. Da die Winkel n durch gleichzeitige Beobachtungen des Mondes zu finden sind, scheinen Beziehungen zwischen Orten, wo dies praktisch unmöglich ist, ausgeschlossen. Wie in diesem Falle vorgegangen werden muss, soll uns zunächst beschäftigen.

Seien A, B und C drei Orte und so gelegen, dass sowohl in B und A, als auch in B und C gleichzeitige Beobachtungen unter nicht zu kleinen Höhenwinkeln möglich sind. Sowie nun in B die Winkel der Azimutalebene BAZ_a und BCZ_c gegen das Lot dortselbst bestimmt sind und ebenso die Neigungen der anderen zwei Azimutalebenen gegen die Lote in A und C, lässt sich angeben: der Depressionswinkel der Sehne BA, jener von BC und also auch der Winkel der Ebene ABC mit dem Horizont von B sowie mit dem Horizont von A. Ferner müssen Beobachtungen zwischen A, C und D vorliegen, wo in A und D sowie in C und D gleichzeitig der Mond sichtbar ist. Ganz analog folgt aus diesen Beobachtungen der Winkel der Ebene ACD gegen den Horizont von A. Nun kennen wir in A die Lage dreier Ebenen, nämlich jene des Horizonts und der Ebenen ABC sowie ACD; die letzteren schneiden sich nach AC, daher lässt sich der Depressionswinkel μ_{ac} sowie das Azimut a_{ac} angeben.

Wir stellen die nötigen Formeln auf. Da von nun an in den Orten B und D die Winkel je zweier Ebenen mit dem Lote vorkommen, muss das n noch einen zweiten Index erhalten. Der erste soll wie bisher derjenige des Orts sein, wo die Azimutebene nicht Lotebene ist, der zweite den Ort bezeichnen, wo die Ebene lotrecht steht. Die Beobachtungen in B, A und C haben also n_{ba}, n_{bc}, n_{ab} und n_{cb} ergeben und aus den Gl. 3—6) folgt

$$90^0 - p_{ba} = \mu_{ba}$$
$$90^0 - p_{bc} = \mu_{bc}$$

wo

$$\sin p_{ba} = \frac{\sin n_{ba}}{\sin \nu}$$

In der Figur 4 stellt HBC' den Horizont von B dar, τ den gesuchten Winkel der Ebene ABC mit dem Horizont, $\mu_{ba} = AA'$, $\mu_{bc} = CC'$ Seite $A'C' = a_{bc} - a_{ba}$. Der Bogen $A'H = w$ giebt zugleich das Azimut der Schnittlinie, nämlich

$$a = a_{ba} - w$$
$$= a_{bc} + w$$

je nachdem $\mu_{ba} \lessgtr \mu_{bc}$.

Aus den Gl.

$$\sin w = \operatorname{cotg} \tau \cdot tg\, \mu_{ba}$$
$$\sin (w + \varDelta a) = \operatorname{cotg} \tau \cdot tg\, \mu_{bc}$$

folgen w und τ.

Es ist nun der Winkel der Ebene ABC mit dem Horizont von A zu bestimmen. Die Beziehungen liefert das Dreikant der Ebenen ABC, Horizont von A und B; Mittelpunkt der Kugel A; die Parallelen zu den Schnittlinien geben ein sphärisches Dreieck. In demselben ist bekannt: der Winkel der Seiten Horizont von A und Horizont von B nämlich z, ferner der Winkel des Horizonts von B mit der Ebene ABC das eben bestimmte τ, endlich die Seite im Horizont von B. Die Azimute der beiden Schenkel sind bekannt, nämlich $a_{ba} - w$ und $a'_{ba} \pm 90^0$; daher

$$h_b = (a_{ba} - w) - (a'_{ba} \pm 90^0)$$

II. Lehrkanzel für Geodäsie
Technische Hochschule Graz

Der gesuchte Winkel τ' der Ebene ABC mit Horizont von A, sowie die Seite im letzteren (h_a) folgt aus

$$\cos \tau' = \cos \tau \cdot \cos z + \sin \tau \cdot \sin z \cdot \cos h_b$$

$$\sin h_a = \frac{\sin h_b \cdot \sin \tau}{\sin \tau'}$$

Weil nun h_a gefunden worden, ist auch das Azimut der Schnittlinie der Ebenen ABC und Horizont von A bekannt, denn das Azimut der Schnittlinien der Horizonte beträgt aus dem gleichen Grunde wie oben

$$a'_{ab} \pm 90^0$$

Auf die gleiche Weise ergiebt sich aus den Resultaten der Beobachtungen in A, C und D der Winkel τ'' der Ebene ACD mit dem Horizont von A und das Azimut der Schnittlinie. Ebene ABC, ADC und der Horizont von A geben auf der Kugel um A ein sphärisches Dreieck, das Perpendikel auf die letztgenannte Seite den gesuchten Depressionswinkel μ_{ac}.

Der gleiche Gang ist bezüglich des Horizontes von C einzuschlagen; da sich die Resultate der verschiedenen Rechnungsstadien nicht zusammenfassen lassen, wurde von der ohne Einführung von Hülfswinkeln uneleganten Lösung hier abgesehen.

5. Entwicklungen für das Rotations-Ellipsoid. Um uns ein Urteil über die Beträge der Grössen n, ν u. s. f. zu bilden, leiten wir dieselben für ein Rotations-Ellipsoid ab. Es lässt sich hiebei des Zusammenhanges halber nicht vermeiden, genügend Bekanntes rekapitulieren zu müssen, wobei wir uns jedoch unter Verweisung auf Helmert, höh. Geod. Bd. I S. 135—36 und 183—84 der möchlichsten Kürze befleissigen wollen.

Ableitung von n. Statt der halben grossen Axe der Meridianellipse a_o soll stets die Einheit genommen werden. Für ein Koordinatensystem mit dem Ursprung im Mittelpunkt des Ellipsoids, der Rotationsaxe als Z-Axe, der Meridian-Ebene von A als XZ Ebene folgt für die Koordinaten von A, B, K'_a und K'_b (vergl. Fig. 1):

$$x_a = \frac{\cos B_a}{W_a}, \qquad x_b = \frac{\cos B_b \cdot \cos L_{ab}}{W_b}$$

$$y_a = 0, \qquad y_b = \frac{\cos B_b \cdot \sin L_{ab}}{W_b}$$

$$z_a = \frac{(1 - e^2) \sin B_a}{W_a}, \qquad z_a = \frac{(1 - e^2) \sin B_b}{W_b}$$

$$x'_a = 0, \qquad x'_b = 0$$

$$y'_a = 0, \qquad y'_b = 0$$

$$z'_a = -\frac{e^2 \sin B_a}{W_a}, \qquad z'_b = \frac{-e^2 \sin B_b}{W_b}$$

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}.$$

Der Uebergang von diesem Koordinatensystem zu einem andern mit A als Ursprung der Tangentialebene in A als $\xi\eta$ Ebene, der Normalen in A als ζ Axe — positiv nach unten — erfolgt durch:

$$\xi = (x - x_a) \cdot \sin B_a - (z - z_a) \cos B_a$$

$$\eta = y$$

$$\zeta = -(x - x_a) \cos B_a - (z - z_a) \sin B_a.$$

Die Gleichung der Ebene Lot B Punkt A hat daher die Form:

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0$$

und wird bekannt, indem man sie auf die 3 Punkte A, B und K'_b anwendet. Es ergiebt sich aus ihr

$$\cos (90^0 - n_a) = \sin n_a = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Die Werte für A, B und C eingesetzt, folgt nach einigen Reduktionen, wobei z, a'_{ab}, a'_{ba} ihre frühere Bedeutung haben, während zur Abkürzung dient

$$D = \frac{\sin B_b}{W_b} - \frac{\sin B_a}{W_a}$$

$$\sin n_a = \frac{-e^2 \cdot D \cdot \cos B_a \sin L \cdot \sin a'_{ab}}{\sqrt{\frac{\sin^2 L}{W_a^2} + 2e^2 \frac{D}{W_a} \cdot \sec B_b \cdot \sin z \cdot \sin^2 a'_{ab} \cdot \cos(a'_{ba} - 180^0) + e^4 D^2 \cdot \sin^2 a'_{ab}}}$$

Der Nenner kann nie kleiner als der Zähler werden; es ergiebt sich n als positiver oder negativer kleiner Winkel. Die Bestimmung eines Maximum stösst auf erhebliche Schwierigkeiten, wesswegen ein genähert grösster Wert durch Probieren gefunden wurde. Punkte mit entgegengesetzt gleicher Polhöhe lieferten die grössten Beträge. Bei wachsendem L rückt a'_{ab} immer näher an 90^0, z an 180^0, und n erreicht den Maximalbetrag in der Nähe von $L = 170^0$. So findet sich für $B_a = + 45^0$, $B_b = - 45^0$ bei

$L = 60^0$	$n = 14' \; 35{,}3''$	$z = 104^0 \; 28' \; 39{,}1''$
$= 90$	$= 18 \; 49{,}1$	$= 120 \; 0 \; 0$
$= 120$	$= 21 \; 19{,}4$	$= 138 \; 35 \; 34{,}6$
$= 150$	$= 22 \; 35{,}7$	$= 158 \; 54 \; 33{,}8$
$= 160$	$= 22 \; 50{,}2$	$= 165 \; 53 \; 38{,}1$
$= 170$	$= 22 \; 56{,}7$	$= 172 \; 56 \; 0{,}4$
$= 179 \; 30'$	$= 15 \; 59{,}5$	$= 179 \; 34 \; 2{,}1$
$= 179 \; 58'$	$= 1 \; 29{,}1$	$= 179 \; 58 \; 11{,}1.$

Die Zeitdistanzen wurden angeschrieben zur Bestätigung der Zulässigkeit der Substitution

$$\sin n' = \frac{\sin n}{\sin z}$$

Die analytische Ableitung von ν gestaltet sich noch weit komplizierter, dagegen liefert die geometrische Anschauung (vgl. Helmert Bd. I S. 184) sehr leicht das Resultat, dass ν mit der Annäherung der Sehne an die Axe bis 180^0 wachsen kann.

Um die Substitution

$$\sin p = \frac{\sin n}{\sin \nu}$$

zu rechtfertigen, folgen hier einige Zahlen für $B_a = + 45^0$, $B_b = -45^0$

$L = 90^0$	$\nu = 0^0 32' 36''$
$= 120$	$= 1 \quad 0 \quad 13$
$= 150$	$= 2 \quad 2 \quad 43$
$= 160$	$= 3 \quad 6 \quad 8$
$= 170$	$= 6 \quad 12 \quad 29$
$= 179^1/_2$	$= 97 \quad 40 \quad 29$

Da n immer klein bleibt, ν aber jeden Wert annehmen kann, zeigt Gl. 4) am deutlichsten, dass auch die Azimutaldifferenz der Vertikalschnitte alle Beträge zwischen 0^0 und 180^0 durchläuft.

6. Reduktion der Formeln für kleine Entfernungen. Um Helmert's Formeln für Azimutaldifferenz der Vertikalschnitte und Flächenwinkel derselben — gültig für kleine Entfernungen — aus unseren strengen Formeln abzuleiten, transformieren wir zunächst den Ausdruck für $\sin n_a$. Wir stellen im Nenner ein völliges Quadrat her und haben nach Division mit $\sin a'_{ab}$ in demselben

$$\left[e^2 D + \frac{\sin z \cos(a'_{ba} - 180^0)}{\cos B_b \, W_a}\right]^2 + \frac{1}{W_a^2}\left[\frac{\sin^2 L}{\sin^2 a'_{ab}} - \frac{\sin^2 z \cos^2(a'_{ba} - 180^0)}{\cos^2 B_b}\right]$$

$$\left[e^2 D + \frac{\sin z \cdot \cos(a'_{ba} - 180^0)}{\cos B_b \, W_a}\right]^2 + \frac{1}{W_a^2}\,\frac{\sin^2 L}{\sin^2 a'_{ab}} \cdot \sin^2 (a' - 180^0)$$

Bei kleinen Entfernungen kann man nun stets $e^2 D$ gegen $\frac{\sin z \cdot \cos(a'_{ba} - 180^0)}{\cos B_b \, W_a}$ vernachlässigen und hat daher

$$\sin n_a = -\frac{e^2 \cdot D \cos B_a \cdot \sin L}{\frac{1}{W_a} \cdot \frac{\sin L}{\sin a'_{ab}}}$$

Entwickeln wir nun D und W nach Potenzen von e^2 und bedenken, dass wir nur bis zu Gliedern 2. Ordnung incl. gehen wollen, so folgt, da

$$\frac{1}{W_a} = 1 + Gl_2$$

$$e^2 D = e^2 \left\{ \frac{\sin B_b}{W_b} - \frac{\sin B_a}{W_a} \right\} = e^2 (\sin B_b - \sin B_a) + Gl_2$$

$$\sin n = -2\, e^2 \cdot \cos B_a \cdot \sin a'_{ab} \cdot \sin \frac{B_b - B_a}{2} \cdot \cos \frac{B_b + B_a}{2}$$

Wir führen Mittelwerte ein

$$B = \tfrac{1}{2} (B_a + B_b)$$

$$a' = \tfrac{1}{2} (a'_{ab} + a'_{ba} - 180^0)$$

Nach dem Sinussatze ergiebt sich in Strenge

$$\frac{\sin 2a'}{\sin 2a'_{ab}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{\sin^2 z - \sin^2 L \cos^2 B_a}}{\sqrt{\sin^2 z - \sin^2 L \cdot \cos^2 B_b}} + \frac{\cos B_a}{\cos B_b} \right]$$

und hier genau innerhalb obiger Grenzen

$$\sin 2\, a' = \sin 2\, a'_{ab} \cdot \cos \frac{B_b + B_a}{2} \cdot \cos \frac{B_b - B_a}{2} \sec B_b$$

ferner

$$\cos B_a \cdot \cos B_b = \cos^2 B + Gl_2$$

also

$$\sin a'_{ab} = \frac{\sin 2\, a' \cdot \sec a'_{ab} \cos B_b}{2 \cos \frac{1}{2} (B_b + B_a) \cdot \cos \frac{1}{2} (B_b - B_a)}$$

nun alles in Sekunden:

$$n = -\varrho'' \cdot e^2 \cos^2 B \sin 2\, a' \, tg \, \tfrac{1}{2} (B_b - B_a) \cdot \sec a'_{ab}$$

Unter s und ϱ_n die Entfernung der beiden Punkte und den Querkrümmungshalbmesser für die Mittelbreite verstanden, folgt

$$\operatorname{tg} (B_b - B_a) = \cos a'_{ab} \operatorname{tg} \left(\frac{s}{\varrho_n} \right)$$

$$n = -\varrho'' \frac{e^2 s}{2\varrho_n} \cdot \cos^2 B \cdot \sin 2\, a'$$

für die Azimutaldifferenz benutzen wir nicht die Gleichung (3), sondern vertauschen in (1) und (2) Tangente wie Sinus mit dem Bogen und haben:

$$a_{ab} - a'_{ab} = n \cdot \operatorname{tg} \frac{z}{2}$$

Da endlich noch

$$\operatorname{tg}\frac{z}{2} = \frac{s}{2\,\varrho_n}$$

$$a_{ab} - a'_{ab} = -\varrho''\,\frac{e^2 s^2}{4\varrho^2_n}\cdot\cos^2 B\cdot\sin 2\,a'$$

Der Flächenwinkel nach Gleichung (4) ist

$$\sin\nu = \sqrt{\sin^2 n + \sin^2(a_{ab} - a'_{ab})} + \mathrm{Gl}_4$$
$$= \sin n\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\frac{z}{2}}$$
$$= \sin n\cdot\sec\frac{z}{2}$$
$$\nu = -\varrho''\cdot\frac{e^2 s}{2\,\varrho_n}\cdot\cos^2 B\cdot\sin 2\,a'.$$

Diese Formeln stimmen mit jenen Helmerts S. 187 und 188 überein, nur ist dort bei der Azimutaldifferenz a_0 statt ϱ_n gesetzt.

Wir fanden oben

$$\sin n_a = - e^2 D\cdot\cos B_a\sin a'_{ab}\cdot W_a.$$

Analog wird

$$\sin n_b = - e^2 D\cdot\cos B_b\sin a'_{ba}\cdot W_b$$

also auch, da bei kleinen Entfernungen in den Gl. 2 und 2* der Sinus mit dem Bogen vertauscht werden darf

$$a_{ab} - a_{ba} - (a'_{ab} - a'_{ba}) = -\frac{e^2 D\cdot W_a}{\sin z}\left\{\cos B_a\cdot\sin a'_{ab} - \cos B_b \sin a'_{ba}\cdot\frac{W_b}{W_a}\right\}$$

Da nun

$$\frac{W_b}{W_a} = 1 + \mathrm{Gl}_2,$$

so folgt

$$a_{ab} - a_{ba} = a'_{ab} - a'_{ba} + \mathrm{Gl}_4\ ,$$

das ist Dalby's Satz.