§. 115. Beurtheilung der Höhenmessung und Erweiterung der Theorie.

Wenn die in den vorigen §§. enthaltenen Höhenbestimmungen der Dreieckspunkte im Allgemeinen einen höheren Grad der Genauigkeit erlangt haben, als sonst wohl zu erwarten gewesen wäre, so ist dies einigen besonderen Umständen beizumessen, die hier erwähnt zu werden verdienen, nämlich:

1. Die Nähe der Küste, welche die direkte Höhenbestimmung einer Anzahl Dreieckspunkte erlaubte. §. 107.
2. Die Nivellementslinie von Swinemünde bis Berlin welche die Dreieckskette durchzieht, und eine unabhängige Bestimmung mehrerer Dreieckspunkte gestattete. §. 108.
3. Die Ausgleichung der Höhen nach der Methode der kleinsten Quadrate, die hier auf unabhängige Bestimmungen gestützt, von festen Punkten ausgehend und sich wieder an feste Punkte anlehnend, ein Mittel gewährte, allen Höhenbestimmungen, auf welche sie sich erstreckt, nahe dieselbe Sicherheit zu geben, welche die direkten Bestimmungen und die Nivellements-Stationen selbst haben.

Durch diese Umstände sind auch die Verbesserungen, welche aus den Ausgleichungen hervorgegangen sind, ihren wahren Werthen näher gebracht worden, als es ohne dieselben der Fall gewesen sein würde, und bieten daher ein Mittel die Fehler abzuschätzen, die man bei solchen Operationen in unserem Klima zu gewärtigen hat. Sieht man jede Verbesserung als eine Gröfse an, die den Beobachtungsfehler und die Veränderlichkeit der Strahlenbrechung summarisch enthält, so ist der mittlere Werth derselben aus allen Verbesserungen

$$= \frac{p'(1) + p''(2) + p'''(3) + \ldots}{p' + p'' + p''' + \ldots}$$

wo p', p'', p''' .... die Gewichte bezeichnen, die hier im Verhältnifs der Anzahl der Beobachtungen und im umgekehrten der Entfernungen genommen werden sollen.

Schliefst man die Bestimmungen in der Nähe der Grundlinie (Seite 465.) der geringen Entfernung wegen, und (Seite 477.) die direkten Bestimmungen

(1), (2), (4), (5), (9), (10), bei denen die Strahlenbrechung eliminirt wurde, von der Untersuchung aus, so findet man:

1. Aus 51 *gegenseitigen aber nicht gleichzeitigen* Bestimmungen den mittleren Fehler der Zenithdistance
$$= 3'',562$$
2. Aus 39 *einseitigen* Bestimmungen den mittleren Fehler der Zenithdistance
$$= 3'',899$$

Im ersten Falle beträgt der gröſste Fehler $11'',83$ (Ausgleichung zwischen Vogelsang und Eichberg (12)) oder $0^T,229$ auf die Meile; im zweiten aber $22'',96$ (Ausgleichung zwischen Freienwalde und Jüterbogk (17)) oder nahe $0^T,5$ auf die Meile, wobei jedoch bemerkt werden muſs, daſs die Beobachtungszeit hier ungünstig gewählt war.

Grobe Fehler können gröſstentheils vermieden werden, wenn man im Allgemeinen nach §. 113. des Vormittags keine Beobachtung zu einer Zeit macht, die einen gröſseren Abstand vom Mittage hat als dem halben Tagebogen $0,^T45$ zugehört, und des Nachmittags keine zu einer Zeit die einen gröſseren Abstand vom Mittage hat, als dem halben Tagebogen $0^T,56$ zugehört, dabei aber solche Richtungen vermeidet die nahe über Wälder oder Erdboden fortgehen. Wenn an warmen windstillen Tagen die Luft bei ruhigen Bildern sehr klar und durchsichtig ist, wird man gut thun die Beobachtungen ganz einzustellen, weil die Refraktion an solchen Tagen oft augenscheinlich gröſser ist als gewöhnlich. *Struve* erkannte in dem Verhalten der Atmosphäre ein Merkmal, und hält den Zeitpunkt, wo des Nachmittages das heftige Zittern der Gegenstände nachläſst, bis dahin wo die ruhigen Bilder eintreten, und des Vormittages, nach dem Verschwinden der ruhigen Bilder bis zu einem so starken Zittern, welches keine sicheren Beobachtungen mehr erlaubt, für die günstigste Zeit zu Höhenbestimmungen.

Wenn man die in §. 105. entwickelten Formeln näher betrachtet, so findet man, daſs bei *einseitigen* Beobachtungen der Zenithdistancen jedesmal der ganze Brechungswinkel auf die Bestimmung des Höhenunterschiedes eingeht; bei *gegenseitigen aber nicht gleichzeitigen* Beobachtungen geht die halbe Summe der auf beiden Stationen stattgefundenen Brechungswinkel ein, und bei *gegenseitigen und gleichzeitigen* Beobachtungen, ihre halbe Differenz. Hieraus folgt, daſs die letztere Methode eine gröſsere Sicherheit gewähren muſs als die anderen; allein die im §. 113. zusammengestellten Unterschiede der gemessenen Brechungswinkel sind doch so bedeutend, daſs auch diese

Methode unter Umständen noch sehr beträchtliche Abweichungen geben kann. Wenn die Entfernungen nicht groſs und die Höhenunterschiede gering sind, so wird meistens der Fehler nur unbedeutend sein, weil der Einfluſs der Strahlenbrechung mit der Entfernung im quadratischen Verhältniſs wächst. Auch kann man selbst bei gröſseren Entfernungen, wenn zufällig keine ungewöhnliche Brechungen des Lichtes stattgefunden oder dieselben sich gegen einander aufgehoben haben, recht befriedigende Resultate erhalten, wie das Nivellement von Stegen nach dem Revekol (§. 110.) zeigt, allein man besitzt in der Methode selbst kein genügendes Mittel*) den nachtheiligen Einfluſs abweichender Brechungen des Lichtstrahles mit Sicherheit zu erkennen, und selbst wenn, wie im angeführten Falle, vom Meere bis wieder zum Meere nivellirt wurde, folgt aus dieser Controle nur, daſs das summarische Resultat befriedigt, aber nicht, daſs die Höhen der einzelnen Stationen eine dem Endresultat entsprechende Genauigkeit besitzen. Dies hier Gesagte wird durch das folgende Beispiel noch klarer werden:

Wenn man die ersten 16 gleichzeitigen und gegenseitigen Beobachtungen zwischen Dietrichshagen und Hohen-Schönberg (§. 111.) zusammennimmt, so geben sie den Höhenunterschied sehr nahe richtig, die folgenden 16 Beobachtungen geben ihn dagegen um $1^T,512$ fehlerhaft. Ein solches Aufheben der Fehler wie bei den ersten 16 Beobachtungen kann aber auch zwischen verschiedenen Stationen stattfinden, alsdann würden aber nicht die einzelnen Stationen sondern nur das Endresultat richtig sein. Bei den 2ten 16 Beobachtungen haben sich die Fehler summirt: wäre dies zwischen verschiedenen Stationen vorgekommen, so müſste natürlich das Endresultat den gröſsten Fehler haben.

Da die Brechung eines Lichtstrahles, auf seinem Wege von einer Station zur anderen, von den, durch viele örtliche Zufälligkeiten, Wolken, Windrichtungen, Bodenbeschaffenheit u. s. w. mannigfach veränderten Wärme- und Dichtigkeits-Verhältnissen der Luft abhängig ist, und deshalb weder ein bestimmtes und noch viel weniger ein bekanntes Gesetz befolgt, so wird die theoretische Bestimmung desselben vor der Hand noch nicht erwartet werden dürfen. Im Allgemeinen wird es leichter sein aus der bekannt gewordenen Strahlenbrechung einen Schluſs auf die zwischen zwei Punkten stattgefundene

*) Wenn die Beobachtungen an einzelnen Tagen eine beträchtliche Abweichung vom Mittel zeigen, so scheint allerdings das Verwerfen solcher Beobachtungen der Wahrheit näher zu führen; dieses mehr oder weniger willkürliche Mittel kann aber nicht genügen.

Wärmeabnahme zu machen, als aus Beobachtungen der Temperatur u. s. w. die nur an den Endpunkten gemacht werden können, die Curve des Lichtstrahles auf seinem ganzen Wege zu bestimmen. Der einzige Weg der demnach weiter führen kann, und der hier verfolgt werden soll, ist der in §. 17. aufgestellte Grundsatz: die Anordnung der Beobachtungen so einzurichten, dafs zu fürchtende Fehler entweder bestimmt, oder durch ihr Vorkommen mit entgegengesetzten Zeichen im Resultat vernichtet werden

Die Methode der gleichzeitigen und gegenseitigen Beobachtungen, wie sie in §. 105. vorgetragen wurde, gründet sich auf die gleichzeitige Anwendung zweier Instrumente, auf zwei unter einander sichtbaren Standpunkten, unter der Voraussetzung, dafs die Strahlenbrechung auf beiden Standpunkten gleich sei. Ich werde nun untersuchen, welche Vortheile für die Höhenmessung entstehen, wenn man auf drei unter einander sichtbaren Punkten, drei Instrumente zu gegenseitigen und gleichzeitigen (d. h. auf ein und dasselbe mittlere Zeitmoment gebrachten*) Beobachtungen in Anwendung bringt, und annimt dafs die Strahlenbrechung auf allen drei Punkten verschieden sei.

Bezeichnet man die drei unter einander sichtbaren Standpunkte durch A, B, C;

die Zenithdistance in A nach B und C durch Z_a^b und Z_a^c
\- - - B - A - C - Z_b^a - Z_b^c
\- - - C - A - B - Z_c^a - Z_c^b

die Brechungswinkel in A nach B und C durch ΔZ_a^b und ΔZ_a^c
\- - - B - A - C - ΔZ_b^a - ΔZ_b^c
\- - - C - A - B - ΔZ_c^a - ΔZ_c^b

die Entfernung AB durch s
\- - BC - s'
\- - AC - s''

die Höhe von A durch h
\- - - B - h'
\- - - C - h''

die Coeffizienten der Strahlenbrechung in A, B und C durch k, k', k'', so findet man nach §. 105. unter diesen Gröfsen folgende Gleichungen:

*) Die Gleichzeitigkeit kann sich hier nur auf das Mittel aus verschiedenen Beobachtungszeiten beziehen. (Nivellement zwischen Berlin und Swinemünde, Seite 72.)

$$\left.\begin{array}{l}
h' - h = s \text{ tang.} \tfrac{1}{2}(Z_b^a + \Delta Z_b^a - Z_a^b - \Delta Z_a^b) = s \text{ tg.} \tfrac{1}{2}(Z_b^a - Z_a^b) + \tfrac{s}{2\omega}(\Delta Z_b^a - \Delta Z_a^b) \\
h'' - h' = s' \text{ tang.} \tfrac{1}{2}(Z_c^b + \Delta Z_c^b - Z_b^c - \Delta Z_b^c) = s' \text{ tg.} \tfrac{1}{2}(Z_c^b - Z_b^c) + \tfrac{s'}{2\omega}(\Delta Z_c^b - \Delta Z_b^c) \\
h'' - h = s'' \text{tang.} \tfrac{1}{2}(Z_c^a + \Delta Z_c^a - Z_a^c - \Delta Z_a^c) = s'' \text{ tg.} \tfrac{1}{2}(Z_c^a - Z_a^c) + \tfrac{s''}{2\omega}(\Delta Z_c^a - \Delta Z_a^c) \\
Z_a^b + Z_b^a + \Delta Z_a^b + \Delta Z_b^a = 180^0 + \tfrac{s\omega}{r} \\
Z_b^c + Z_c^b + \Delta Z_b^c + \Delta Z_c^b = 180^0 + \tfrac{s'\omega}{r} \\
Z_a^c + Z_c^a + \Delta Z_a^c + \Delta Z_c^a = 180^0 + \tfrac{s''\omega}{r}
\end{array}\right\} \ldots 1.$$

Die zweiten Ausdrücke der Höhenunterschiede erhält man durch Differentiation nach §. 105. Daselbst ist auch $\Delta Z + \Delta Z' = kC = \frac{ks\omega}{r}$ angenommen worden, und daraus folgt bei ungleichen Brechungen in A und B $\Delta Z + \Delta Z' = (\frac{k}{2} + \frac{k'}{2})\frac{s\omega}{r}$ und überhaupt bei verschiedenen Entfernungen $\Delta Z = \frac{ks\omega}{2r}$; $\Delta Z' = \frac{k's'\omega}{2r}$ d. h. die Brechungswinkel stehen im zusammengesetzten Verhältniſs der Coeffizienten der Strahlenbrechung und der Entfernungen. Die Brechungswinkel verhalten sich also bei gleicher Strahlenbrechung wie die Entfernungen; bei gleichen Entfernungen wie die Coeffizienten der Strahlenbrechung. Hiernach erhält man:

$$\left.\begin{array}{lll}
\Delta Z_a^b = \frac{ks\omega}{2r} \;; & \Delta Z_b^a = \frac{k's\omega}{2r} \;; & \Delta Z_c^a = \frac{k''s''\omega}{2r} \\
\Delta Z_a^c = \frac{ks''\omega}{2r} & \Delta Z_b^c = \frac{k's'\omega}{2r} & \Delta Z_c^b = \frac{k''s'\omega}{2r}
\end{array}\right\} \ldots 2.$$

Werden diese Werthe in die Gleichungen 1. gesetzt, und bezeichnet man auſserdem die halben Differenzen der Zenithdistancen in den ersten drei Gleichungen durch m, n, o und die Summen der bekannten Glieder in den letzten drei Gleichungen durch P, Q, R, so gehen dieselben über in:

$$\left.\begin{array}{l}
h' - h = s \text{ tang. } m + (k' - k)\frac{s^2}{4r} \\
h'' - h' = s' \text{ tang. } n + (k'' - k')\frac{s'^2}{4r} \\
h'' - h = s'' \text{ tang. } o + (k'' - k)\frac{s''^2}{4r} \\
(k + k')\frac{s\omega}{2r} = P \\
(k' + k'')\frac{s'\omega}{2r} = Q \\
(k + k'')\frac{s''\omega}{2r} = R
\end{array}\right\} \ldots 3.$$

In diesen 6 Gleichungen sind die drei Coeffizienten der Strahlenbrechung und zwei Höhendifferenzen unbekannt. Es lassen sich daher nicht bloſs diese Gröſsen bestimmen, sondern es bleibt auch noch eine Gleichung zur Controle übrig.

Aus den letzten 3 Gleichungen erhält man unmittelbar:

$$\left.\begin{aligned} k &= \left(+\frac{P}{s} - \frac{Q}{s'} + \frac{R}{s''}\right)\frac{r}{\omega} \\ k' &= \left(+\frac{P}{s} + \frac{Q}{s'} - \frac{R}{s''}\right)\frac{r}{\omega} \\ k'' &= \left(-\frac{P}{s} + \frac{Q}{s'} + \frac{R}{s''}\right)\frac{r}{\omega} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ 4.$$

Setzt man diese Werthe in die ersten Gleichungen 3., so findet man die Höhenunterschiede unabhängig von der Strahlenbrechung. Die Summe der beiden ersten Gleichungen unter 3. ist aber gleich der dritten, man erhält daher:

$$0 = s\,\mathrm{tg.}\,m + s'\,\mathrm{tg.}\,n - s''\,\mathrm{tg.}\,o + (k'-k)\frac{s^2}{4r} + (k''-k')\frac{s'^2}{4r} - (k''-k)\frac{s''^2}{4r} \quad \ldots\ 5.$$

Bezeichnet man jetzt die Verbesserungen der halben Unterschiede der Zenithdistancen der Reihe nach durch (1), (2), (3) und setzt man dann die Summe der bekannten Glieder $= q$, so findet man die Bedingungsgleichung:

$$0 = q + \frac{s}{\omega}(1) + \frac{s}{\omega}(2) - \frac{s}{\omega}(3) \quad \ldots\ 6.$$

die nach §. 105 behandelt, die Verbesserungen der halben Unterschiede der Zenithdistancen und der Höhenunterschiede giebt.

Bei dieser Auflösung der Aufgabe wird vorausgesetzt:

1. Daſs der Coeffizient der Strahlenbrechung in *A*, in den nur wenig verschiedenen Richtungen nach *B* und nach *C*, und der Coeffizient in *C*, nach den ebenfalls nur wenig verschiedenen Richtungen nach *B* und nach *A* gleich seien.
2. Daſs der Coeffizient in *B* in den nahe entgegengesetzten Richtungen nach *A* und nach *C* gleich sei.

Die erste Voraussetzung wird ohne Weiteres zugegeben werden können; sollte sich aber gegen die zweite ein begründeter Zweifel herausstellen, so läſst sich derselbe leicht beseitigen, wenn man den Coeffizienten der Strahlenbrechung in der Richtung von *B* nach *C*, als eine neue Unbekannte einführt und durch (k') bezeichnet. Es sind alsdann aus den 6 Gleichungen unter 3. zwei Höhenunterschiede und 4 Coeffizienten zu bestimmen. Sind die Höhen der Punkte A, B und C, über dem Meere oder einem Landsee, direkt bestimmt worden, so können aus den vorhandenen 6 Gleichungen die Coeffizienten der Strahlenbrechung für alle 6 Richtungen, in denen die $Z.D.$ beobachtet wurden, gefunden werden.

Ist bei den drei Standpunkten A, B und C die Durchsicht zwischen A und C nicht vorhanden, so reduciren sich die 6 Gleichungen unter 3. auf die folgenden 4:

$$\left.\begin{aligned} h'-h &= s\,\mathrm{tg}.\,m + (k'-k)\,\frac{s^2}{4r} \\ h''-h' &= s'\,\mathrm{tg}.\,n + (k''-k')\,\frac{s'^2}{4r} \\ (k+k')\,\frac{s\omega}{2r} &= P \\ (k'+k'')\,\frac{s'\omega}{2r} &= Q \end{aligned}\right\}\ \ldots.\ 7.$$

Aus diesen vier Gleichungen können zwar die fünf unbekannten Grössen nicht mehr direct bestimmt werden, allein man kann sich ihnen doch beträchtlich nähern.

Multiplicirt man die erste Gleichung mit s'^2, die zweite mit s^2 und addirt, so findet man:

$$(h'-h)\,s'^2 + (h''-h')\,s^2 = s'^2 . s\ \mathrm{tg}.\ m + s^2 . s'\ \mathrm{tg}.\ n + (k''-k)\,\frac{s^2 s'^2}{4r}\ \ldots.\ 8$$

Aus der dritten und vierten Gleichung ergiebt sich durch Subtraktion:

$k''-k = \left(\frac{Q}{s'}-\frac{P}{s}\right)\frac{2r}{\omega}$ Substituirt man diesen Werth und fügt den Ausdrücken s tg. m und s' tg. n die vorläufigen Verbesserungen Δh und $\Delta h'$ hinzu, und setzt $h'-h = s$ tg. m und $h''-h' = s'$ tg. n, so findet man die Bedingungsgleichung, wenn $p = \left(\frac{Q}{s'}-\frac{P}{s}\right)\frac{s^2}{2\omega}$ genommen wird:

$$o = p + \Delta h + \frac{s^2}{s'^2}\,\Delta h'\ \ldots.\ 9$$

deren Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate §. 105.

$$\Delta h = -\frac{p}{1+\frac{s^4}{s'^4}}\ ;\quad \Delta h' = -\frac{p\,\frac{s^2}{s'^2}}{1+\frac{s^4}{s'^4}}$$ und die Summe

$$\Delta h + \Delta h' = \Delta H = -\frac{P\left(1+\frac{s^2}{s'^2}\right)}{1+\frac{s^4}{s'^4}} \text{ giebt} \ldots\ 10.$$

Man erhält daher auch:

$$\begin{array}{r}h' - h = s \text{ tg. } m + \Delta h \\ h'' - h' = s' \text{ tg. } n + \Delta h' \\ \hline h'' - h = s \text{ tg. } m + s' \text{ tg. } n + \Delta H\end{array}$$

Summirt man jetzt die beiden ersten Gleichungen 7. und setzt für $h''-h$ diesen Werth, so ergiebt sich:

$$\Delta H = (k'-k)\frac{s^2}{4r} + (k''-k')\frac{s'^2}{4r} \ldots\ 11.$$

Wird nun aus der dritten und vierten Gleichung unter 7. der Ausdruck

$$\frac{Ps}{2\omega} - \frac{Qs'}{2\omega} = (k'+k)\frac{s^2}{4r} - (k''+k')\frac{s'^2}{4r} \text{ formirt,}$$

und der Gleichung 11. hinzugefügt, so findet man den Coeffizienten

$$k' = \frac{2r}{s^2 - s'^2}\left\{\Delta H + \frac{Ps}{2\omega} - \frac{Qs'}{2\omega}\right\} \ldots\ 12.$$

Diesen Werth von k' in die dritte und vierte Gleichung unter 7. gesetzt, giebt dann die beiden andern Coeffizienten k und k''. Mit den auf diese Weise gefundenen Coeffizienten werden demnächst nach Gleichung 7. die aus der Strahlenbrechung hervorgehenden Verbesserungen der Höhenunterschiede gerechnet.

Folgende Beispiele, welche aus dem Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin entnommen sind, werden den Gang der Rechnung vollständig übersehen lassen:

1. Wenn alle drei Punkte unter einander sichtbar sind.

Beobachtete Zenithdistancen.

In *A*	In *B*	In C
$Z_a^b = 90° \ 7' \ 54'',20$	$Z_b^a = 90° \ 2' \ 37'',75$	$Z_c^b = 90° \ 12' \ 53'',66$
$Z_a^c = 90 \ \ 5' \ 28,65$	$Z_b^c = 89 \ 53 \ 50,33$	$Z_c^a = 90 \ \ 10 \ \ 2,43$

gemessene Entfernungen.

$$\text{Log. } AB = \log. s \;=\; 4{,}0634759$$
$$\text{Log. } BC = \log. s' \;=\; 3{,}8714783$$
$$\text{Log. } AC = \log. s'' \;\cdot\; 4{,}2378642$$
$$\text{Log. } \tfrac{\omega}{r} = 8{,}7994102$$

Aus den Gleichungen 1. und 3. folgt:

$$(k+k')\tfrac{s\omega}{2r} = P = 180^\circ + \tfrac{s\omega}{r} - (Z_a^{\,b} + Z_b^{\,a})$$
$$(k'+k'')\tfrac{s'\omega}{2r} = Q = 180 \;+ \tfrac{s'\omega}{r} - (Z_b^{\,c} + Z_c^{\,b})$$
$$(k+k'')\tfrac{s''\omega}{2r} = R = 180 + \tfrac{s''\omega}{r} - (Z_a^{\,c} + Z_c^{\,a})$$

$$\log. \tfrac{s\omega}{r} = 2{,}8628861 \quad ; \quad \log. \tfrac{s'\omega}{r} = 2{,}6708885 \quad ; \quad \log. \tfrac{s''\omega}{r} = 3{,}0372744$$
$$\tfrac{s\omega}{r} = 729{,}2663 \qquad\qquad \tfrac{s'\omega}{r} = 468{,}6930 \qquad\qquad \tfrac{s''\omega}{r} = 1089{,}618$$
$$180^\circ - (Z_a^{\,b} + Z_b^{\,a}) = -631{,}9500 \;\ldots\; -403{,}9900 \;\ldots\; -931{,}080$$
$$P = 97{,}3163 \qquad\qquad Q = 64{,}7030 \qquad\qquad R = 158{,}538$$
$$\text{Log. } \tfrac{P}{s} = 7{,}9247097 \qquad \text{Log. } \tfrac{Q}{s'} = 7{,}9394461 \qquad \text{Log. } \tfrac{R}{s''} = 7{,}9622692$$
$$\tfrac{P}{s} = 0{,}00840833 \qquad\qquad \tfrac{Q}{s'} = 0{,}00869853 \qquad\qquad \tfrac{R}{s''} = 0{,}00916790$$

$$k = \left(+\tfrac{P}{s} - \tfrac{Q}{s'} + \tfrac{R}{s''}\right)\tfrac{r}{\omega}$$
$$k' = \left(+\tfrac{P}{s} + \tfrac{Q}{s'} - \tfrac{R}{s''}\right)\tfrac{r}{\omega}$$
$$k'' = \left(-\tfrac{P}{s} + \tfrac{Q}{s'} + \tfrac{R}{s''}\right)\tfrac{r}{\omega}$$

$$1^{\text{te}}\;(\;) = 0{,}00887770 \;;\; 2^{\text{te}}\;(\;) = 0{,}00793896 \;;\; 3^{\text{te}}\;(\;) = 0{,}00945810$$
$$\text{Log.} = 7{,}9483005 \;\ldots\; 7{,}8997636 \;\ldots\; 7{,}9758039$$
$$\text{Log. } \tfrac{r}{\omega} = 1{,}2005898 \;\ldots\; 1{,}2005898 \;\ldots\; 1{,}2005898$$
$$\text{Log. } k = 9{,}1488903 \qquad \text{Log. } k' = 9{,}1003534 \qquad \text{Log. } k'' = 9{,}1763937$$
$$k = 0{,}1409 \qquad\qquad k' = 0{,}1260 \qquad\qquad k'' = 0{,}1501$$

$$h' - h = s \;\text{tg.}\, m + (k' - k)\tfrac{s^2}{4r}$$
$$h'' - h' = s' \;\text{tg.}\, n + (k'' - k')\tfrac{s'^2}{4r}$$
$$h'' - h = s'' \;\text{tg.}\, o + (k'' - k)\tfrac{s''^2}{4r}$$

$m = -(2' \; 38'',225)$	$n = +9' \; 31'',665$	$o = +2' \; 16'',890$
Log. tg. $m = 6,8848485\,n$	Log. tg. $n = 7,4427174$	Log. tg. $o = 6,8219466$
Log. $s = 4,0634759$	Log. $s' = 3,8714783$	Log. $s'' = 4,2378642$
$0,9483244\,n$	$1,3141957$	$1,0598108$
$-8^T,87819$	$+20^T,61563$	$+11^T,47654$
Lg.$(k'-k) = 8,173186\,n$	Lg.$(k''-k') = 8,382017$	Lg.$(k''-k) = 7,963788$
Lg. $\frac{s}{4r} = 1,009877$	Lg. $\frac{s'^2}{4r} = 0,625882$	Lg. $\frac{s''^2}{4r} = 1,358654$
$9,183063\,n - 0,15243$	$9,007899 + 0,10184$	$9,322442 + 0,21011$
$h' - h = -9,0306$	$h'' - h' = +20,7175$	$h'' - h = +11,6867$

2. **Wenn die Durchsichten zwischen A und C nicht vorhanden sind.**

Es fallen alsdann die Zenithdistancen Z_a^c und Z_c^a fort und es bleiben nur die Gleichungen 7. übrig.

Berechnung von ΔH.

$\frac{Q}{s'} = 0,00869853$	Log. $\frac{s^2}{s'^2} = 0,3839952$	$\frac{s^4}{s'^4} = 0,7679904$
$\frac{P}{s} = 0,00840833$	$2,421002$	$5,861253$
$\frac{Q}{s'} - \frac{P}{s} = 0,00029020$	$+1$	$+1$
Log. $= 6,4626974$	$1 + \frac{s^2}{s'^2} = 3,421002$	$1 + \frac{s^4}{s'^4} = 6,861253$
Log. $\frac{s^2}{2\omega} = 2,5114967$	Log. $= 0,5341533\,n$	
Log. $p = 8,9741941$	$= 8,9741941$	
	Lg.$\left(\frac{1}{1 + \frac{s^4}{s'^4}}\right) = 9,1635965$	
	Log. $\Delta H = 8,6719439\,n$	$\Delta H = -0,046983$

$$k' = \frac{2r}{s^2 - s'^2} \left\{ \Delta H + \frac{Ps}{2\omega} - \frac{Qs'}{2\omega} \right\}$$

Log. $P = 1,9881856$	Log. $Q = 1,8109244$	
Log. $\frac{s}{2\omega} = 8,4480208$	Log. $\frac{s'}{2\omega} = 8,2560232$	
$0,4362064$	$0,0669476\,n$ ..... $-1,166669$	
....	.... $+2,730274$	
Log. $\frac{2r}{s\omega} = 7,4381439$	Log. $\frac{2r}{s'\omega} = 7,6301415$; $\{\;\} = +1,516622$ ...	Lg. $0,1808774$
		Log. $\frac{2r}{s^2 - s'^2} = 8,9204935$
Log.$(k+k') = 9,4263295$	Log.$(k'+k'') = 9,4410659$	Log. $k' = 9,1013709$
$k + k' = 0,26689$	$k' + k'' = 0,27610$	
$-0,12629$	$-0,12629$	$k' = 0,12629$
$k = 0,14060$	$k'' = 0,14981$	

Verbesserungen der Höhenunterschiede, welche aus der Ungleichheit der Strahlenbrechung entstehen.

$$k' - k = -\,0{,}01431 \ldots 8{,}1556396\,n \quad ; \quad k'' - k' = +\,0{,}02352 \ldots 8{,}3714373$$

$$\text{Log.}\,\frac{s^2}{4r} = 1{,}0098769 \qquad\qquad \text{Log.}\,\frac{s'^2}{4r} = 0{,}6258817$$

$$9{,}1655165\,n \qquad\qquad 8{,}9973190$$

$$-\,0^T{,}1464 \qquad\qquad +\,0^T{,}0994$$

$$s\,\text{tg.}\,m = -\,8{,}8782 \qquad\qquad s'\,\text{tg.}\,n = +\,20{,}6156$$

$$h' - h = -\,9{,}0246 \qquad\qquad h'' - h' = +\,20{,}7150$$

Hieraus folgt der Höhenunterschied zwischen A und C oder

$$h'' - h = +\,11^T{,}6904$$

Nach 1. $\ldots\ldots\ldots = +\,11{,}6867$

Unterschied $= +\,0{,}0037$