$$1 - k = \frac{2r}{s^2 - s'^2} \left\{ h_{,} - h_{,,} - \frac{s\,e}{\omega} + \frac{s'\,e'}{\omega} \right\}$$

$$1 - k' = \frac{2r}{s''^2 - s'''^2} \left\{ h_{,} - h_{,,} - \frac{s''\,e''}{\omega} + \frac{s'''\,e'''}{\omega} \right\}$$

Ausgleichung der Höhenmessungen nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Wenn in einem Dreiecksnetze mehr Zenithdistancen gemessen wurden, als zur Bestimmung der Höhen der Dreieckspunkte unumgänglich nothwendig sind, so lassen sich, analog wie bei den horizontalen Messungen, Bedingungen angeben, welche erfüllt werden müssen, wenn die gemessenen Höhen bei der Vergleichung unter einander von jedem Widerspruch frei werden sollen. Diese Bedingungen stellen die Unterschiede oder die Fehler dar, welche zwischen den nothwendigen und den überschüssigen Bestimmungen der Höhenunterschiede satt finden, und können eben so, wie die Bedingungen in einem horizontalen Dreiecksnetze, nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt werden. Es kömmt daher zunächst darauf an, die Bedingungen zu formiren, und eine Regel aufzustellen, aus der sich ihre Anzahl mit Sicherheit erkennen läſst, damit man nicht zu viel und nicht zu wenig Bedingungen in die Rechnung aufnehme.

In einem Dreieck ABC können drei Höhenunterschiede, zwischen A und B, zwischen A und C und zwischen B und C gemessen werden. In Bezug z. B. auf den Ausgangspunkt A (dessen Höhe man als gegeben ansehen oder gleich Null annehmen kann) bestimmen die beiden ersten Höhenunterschiede die Höhen der beiden andern Punkte B und C; der dritte Höhenunterschied liefert daher eine Bedingungsgleichung, ganz so, wie der dritte gemessene Winkel in dem horizontalen Dreieck. Hieraus folgt: *wenn in einem Dreieck die Höhenunterschiede zwischen je zwei Punkten gemessen sind, so ist eine Höhenbedingung vorhanden.*

Die Formation der Höhenbedingungen wird durch die folgende Betrachtung sehr einfach: Wenn man in einem Dreieck von einem Punkt ausgehend, in der Richtung der Seiten dem Umfange folgt, bis wieder zu dem Ausgangspunkt zurück, so ist klar, daſs man eben so viel herabsteigen muſs, als man hinaufgestiegen ist, oder umgekehrt. Hieraus folgt also: *dafs die Summe der Höhenunterschiede zwischen den Winkelpunkten eines Dreiecks gleich Null sein mufs.*

Eben so folgt aus denselben Gründen, dafs die Summe der Höhenunterschiede zwischen den Umfangspunkten einer jeden Figur gleich Null sein mufs. Legt man aber zwei Dreiecke, in denen die obige Bedingung erfüllt ist zu einem Viereck zusammen, so ist die Höhenbedingung des Umfanges in dem Viereck mit erfüllt. Der Beweis von dieser Behauptung ist sehr einfach. Es sei h_1 der Höhenunterschied der gemeinschaftlichen Seite beider Dreiecke und:

$$\begin{array}{rl} \text{für das 1ste Dreieck } & 0 = + h_1 + h_2 - h_3 \\ \text{- - 2te - } & 0 = - h_1 + h_4 - h_5 \\ \hline \text{so ist für den Umfang des Vierecks } & 0 = + h_2 - h_3 + h_4 - h_5 \end{array}$$

Hieraus ergiebt sich, wie leicht einzusehen, dafs in jeder Figur, die aus Dreiecken zusammengesetzt ist, die Höhenbedingung des Umfanges mit erfüllt ist, sobald die Höhenbedingungen der einzelnen Dreiecke erfüllt sind. Diese Betrachtung erleichtert die Formation der Bedingungsgleichungen wesentlich, weil daraus hervorgeht, dafs man bei allen Figuren, die aus Dreiecken zusammengesetzt sind, nur die Höhenbedingungen in den Dreiecken aufzusuchen und zu erfüllen hat, um allen andern Höhenbedingungen, welche noch in der Figur enthalten sind, zugleich mit Genüge zu leisten.

Die Bestimmung der Anzahl der Bedingungsgleichungen, welche in einer Figur vorhanden sind, hat nach dem bisher Gesagten keine Schwierigkeit mehr: sie ist gleich der Anzahl der gemessenen Höhenunterschiede, weniger der Zahl *der* Höhenunterschiede die (von einem Ausgangspunkte aus) zur Bestimmung der übrigen Punkte durchaus nothwendig sind. Oder in Zeichen: Hat eine Figur n Punkte, so sind von einem Ausgangspunkte aus, $n-1$ Höhendifferenzen zur Bestimmung der übrigen Punkte nothwendig; sind nun überhaupt in einer Figur, m Höhendifferenzen gemessen, so ist die Anzahl der Bedingunsgleichungen $= m - n + 1$.

Für das Dreieck, ist $m = 3$ und $n = 3$, also giebt $m - n + 1$ eine Bedingung; für das Viereck mit beiden Diagonalen ist $m = 6$, $n = 4$, also $m - n + 1 = 3$ Bedingungen.

Für das Viereck um einen Mittelpunkt ist $m = 8$, $n = 5$, also $m - n + 1$ gleich 4 Bedingungen u. s. w.

Nennt man H den Höhenunterschied zwischen zwei Punkten, so ist nach Gleichung 6:

$$H = s \operatorname{cotg} \left(z - \frac{s\,\omega}{2\,r}\,(1-k) \right)$$

Die Abhängigkeit einer kleinen Höhenänderung von der Zenithdistance z findet man durch Differentiation dieser Gleichung nämlich:

$$dH = d.\,s \operatorname{cotg} \left(z - \frac{s\,\omega}{2\,r}\,(1-k) \right) = -\,\frac{s.\,d\,z}{\omega \operatorname{Sin} z^2}$$

Sind die Höhenunterschiede nicht groſs, so ist z nahe an 90^0, und man wird ohne erheblichen Fehler $\operatorname{Sin} z^2 = 1$ setzen können. Auf die Zeichen ist sorgfältig zu achten: ist z kleiner als 90^0 so ist dz negativ; ist z gröſser als 90^0 so ist es positiv. Oder: ist der Höhenunterschied positiv, so ist dz negativ, und ist der Höhenunterschied nagativ, so ist dz positiv.

Bezeichnet man in einer Figur die gemessenen Höhendifferenzen durch H_1, H_2, H_3 ...; die zugehörigen Entfernungen durch $s_{\prime}$, $s_{\prime\prime}$, $s_{\prime\prime\prime}$, ..., und die unbekannten Verbesserungen der Zenithdistancen durch (1), (2), (3) ... so formirt man die Bedingungsgleichungen nach den gegebenen Vorschriften, indem man $-\frac{s_{\prime}}{\omega}(1)$ zu $+H_1$ und $+\frac{s_{\prime\prime}}{\omega}(2)$ zu $-H_2$ u. s. w. hinzufügt. z. B. In einem Dreieck ABC sei der Höhenunterschied zwischen $AB = +H_1$ zwischen $BC = +H_2$ und zwischen $CA = -H_3$; und $s_{\prime}$, $s_{\prime\prime}$, $s_{\prime\prime\prime}$ die entsprechenden Entfernungen, so findet man die Bedingungsgleichung:

$$0 = +H_1 + H_2 - H_3 - \frac{s_{\prime}(1)}{\omega} - \frac{s_{\prime\prime}(2)}{\omega} + \frac{s_{\prime\prime\prime}(3)}{\omega}$$

und wenn man den bekannten Werth von $+H_1 + H_2 - H_3 = a$ setzt:

$$0 = a - \frac{s_{\prime}(1)}{\omega} - \frac{s_{\prime\prime}(2)}{\omega} + \frac{s_{\prime\prime\prime}(3)}{\omega}$$

Auf ganz ähnliche Weise bildet man alle übrigen Bedingungsgleichungen.

Wenn sämmtliche Bedingungsgleichungen formirt sind, so werden sie mit den willkürlichen Faktoren I, II, III ... multiplicirt und bis zur Bestimmung der Verbesserungen, nach der in §. 101 gegebenen Anleitung behandelt. Die Verbesserungen (1), (2), (3) ... drücken die Veränderungen der Zenithdistancen in Secunden aus; die ihnen entsprechenden Höhenänderungen, die mit Δ_1, Δ_2, Δ_3 ... bezeichnet werden mögen, findet man, indem man sie mit den zugehörigen in Bogentheilen von einer Secunde ausgedrückten Entfernungen multiplicirt. Man erhält daher wie oben $\Delta_1 = \frac{s_{\prime}}{\omega}(1)$; $\Delta_2 = \frac{s_{\prime\prime}}{\omega}(2)$ u. s. w.

Ist die Anzahl der gleich gut beobachteten Zenithdistancen ungleich, so sind die Gewichte derselben der Anzahl der Beobachtungen proportional zu setzen Die obige Behandlung der Aufgabe setzt voraus, daſs k eine beständige Gröſse sei, es leidet indessen keinen Zweifel, daſs die aus der Veränderlichkeit von k hervorgehende Unsicherkeit, die der Beobachtungsfehler bei weitem übertrifft; es giebt aber kein Mittel, diese Veränderlichkeit ihrem Werthe nach zu schätzen, wodurch sie sich der Rechnung gänzlich entzieht.

Anmerkung. Wenn Barometermessungen in ähnlicher Weise angeordnet werden, so sind die gemessenen Höhenunterschiede innerhalb mäſsiger Grenzen unabhängig von den Entfernungen, aber abhängig von den Veränderungen, welche ein festes Barometer in der Nähe, während der Zwischenzeiten der Beobachtungen anzeigte, weil bei veränderlichem Barometerstande die Höhenmessung unsicherer wird. In diesem Fall erhalten die Bedingungsgleichuugen die Form:

$$0 = a - \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3$$

und die Gewichte der Verbesserungen können den Veränderungen eines festen Barometers umgekehrt proportional gesetzt werden.