Sind die wahrscheinlichen Fehler w, w', w'' ... zwischen je zwei auf einander folgenden Stationen bekannt, so findet man den wahrscheinlichen Fehler des Endresultates:

$$W = \sqrt{(ww + w'w' + w''w'') \ldots}$$

Aufgaben.

1. Wenn in einem Standpunkt A die Zenithdistancen nach zwei anderen Punkten B und C, deren Entfernungen und Höhen bekannt sind, gemessen wurden, so kann die Höhe von A unabhängig von der Strahlenbrechung bestimmt werden, wenn man voraussetzt, dafs die Strahlenbrechung in beiden Richtungen gleich grofs gewesen ist.

Gegeben sind: h' und h'' die Höhen von B und C
s und s' die Entfernungen dieser Punkte von A

Gemessen sind: z und z' die Zenithdistancen von B und C

Gesucht werden: h die Höhe von A und k der Coeffizient der Strahlenbrechung.

Wenn $e = 90 - z$ und $e' = 90 - z'$ gesetzt wird, so findet man nach Gleichung 7 die beiden folgenden Gleichungen:

$$h' - h = \frac{s\,e}{\omega} + s^2 \left(\frac{1-k}{2\,r}\right)$$

$$h'' - h = \frac{s'\,e'}{\omega} + s'^2 \left(\frac{1-k}{2\,r}\right)$$

und hieraus folgt:

$$1 - k = \frac{2\,r}{s^2 - s'^2} \left\{h' - h'' - \frac{s\,e}{\omega} + \frac{s'\,e'}{\omega}\right\}$$

$$h = \frac{s'^2}{s^2 - s'^2} \left\{\frac{s\,e}{\omega} - h' - \frac{s^2}{s'^2} \left(\frac{s'\,e'}{\omega} - h''\right)\right\}$$

2. Sind dagegen von den bekannten Höhen B und C die Zeuithdistancen nach A gemessen, die durch $z_{,}$ und $z_{,,}$ bezeichnet werden mögen, so findet man die Höhe von A, unter der Voraussetzung, dafs die Refraktionen in B und C gleich gewesen sind, unabhängig von der Strahlenbrechung.

Es seien $e_{,} = 90^0 - z_{,}$; $e_{,,} = 90^0 - z_{,,}$ und alle übrigen Bezeichnungen dieselben wie vorhin, so erhält man die Gleichungen:

$$\text{In } B \ldots h - h' = \frac{s' e_{,}}{\omega} + s'^{2}\left(\frac{1-k}{2r}\right)$$

$$\text{In } C \ldots h - h'' = \frac{s'' e_{,,}}{\omega} + s''^{2}\left(\frac{1-k}{2r}\right)$$

Aus denen sich durch Elimination ergiebt:

$$1 - k = \frac{2r}{s'^{2} - s''^{2}}\left\{h'' - h' - \frac{s' e_{,}}{\omega} + \frac{s'' e_{,,}}{\omega}\right\}$$

$$h = \frac{s'^{2}}{s'^{2} - s''^{2}}\left\{h'' + \frac{s'' e_{,,}}{\omega} - \frac{s''^{2}}{s'^{2}}\left(h' + \frac{s' e_{,}}{\omega}\right)\right\}$$

3. Sind in B und in C die Zenithdistancen nach mehreren der Lage nach bekannten Punkten A, A^{1} ... gemessen, dann können für je zwei dieser Punkte ihre Höhen und die Strahlenbrechung in B und in C unabhängig von einander bestimmt werden.

Es sei gegeben:

	In B.	In C.
die Höhe	. . . . h'	. . . . h''
die Entfern.	BA . . s	CA . . . . s''
- -	BA' . . s'	CA' . . . . s'''

gemessen wurden:

die Elevation von $A = 90 - z = e$ $\qquad 90 - z'' = e''$

- - - $A' = 90 - z' = e'$ $\qquad 90 - z''' = e'''$

Hieraus sollen $h_{,}$ und $h_{,,}$ die Höhen von A und A', und k und k' die Refraktionen in B und in C gefunden werden. Für jeden Standpunkt findet man zwei Gleichungen nämlich:

Für B. $\quad h_{,} - h' = \frac{s e}{\omega} + s^{2}\left(\frac{1-k}{2r}\right) \quad ; \quad h_{,,} - h' = \frac{s' e'}{\omega} + s'^{2}\left(\frac{1-k}{2r}\right)$

Für C. $\quad h_{,} - h'' = \frac{s'' e''}{\omega} + s''^{2}\left(\frac{1-k'}{2r}\right) \quad ; \quad h_{,,} - h'' = \frac{s''' e'''}{\omega} + s'''^{2}\left(\frac{1-k'}{2r}\right)$

Hieraus findet man:

$$h_{,} = \frac{1}{1 - \frac{s^{2} s'''^{2}}{s'^{2} s''^{2}}}\left\{h' + \frac{s e}{\omega} - \left(h'' + \frac{s'' e''}{\omega}\right)\frac{s^{2} s'''^{2}}{s'^{2} s''^{2}} + \left(h'' + \frac{s''' e'''}{\omega} - h' - \frac{s' e'}{\omega}\right)\frac{s^{2}}{s'^{2}}\right\}$$

$$h_{,,} = \frac{1}{1 - \frac{s^{2} s'''^{2}}{s'^{2} s''^{2}}}\left\{h'' + \frac{s''' e'''}{\omega} - \left(h' + \frac{s' e'}{\omega}\right)\frac{s^{2} s'''^{2}}{s'^{2} s''^{2}} + \left(h' + \frac{s e}{\omega} - h'' - \frac{s'' e''}{\omega}\right)\frac{s'''^{2}}{s''^{2}}\right\}$$

$$1-k=\frac{2r}{s^2-s'^2}\left\{h_{,}-h_{,,}-\frac{s\,e}{\omega}+\frac{s'\,e'}{\omega}\right\}$$

$$1-k'=\frac{2r}{s''^2-s'''^2}\left\{h_{,}-h_{,,}-\frac{s''\,e''}{\omega}+\frac{s'''\,e'''}{\omega}\right\}$$

Ausgleichung der Höhenmessungen nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Wenn in einem Dreiecksnetze mehr Zenithdistancen gemessen wurden, als zur Bestimmung der Höhen der Dreieckspunkte unumgänglich nothwendig sind, so lassen sich, analog wie bei den horizontalen Messungen, Bedingungen angeben, welche erfüllt werden müssen, wenn die gemessenen Höhen bei der Vergleichung unter einander von jedem Widerspruch frei werden sollen. Diese Bedingungen stellen die Unterschiede oder die Fehler dar, welche zwischen den nothwendigen und den überschüssigen Bestimmungen der Höhenunterschiede satt finden, und können eben so, wie die Bedingungen in einem horizontalen Dreiecksnetze, nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt werden. Es kömmt daher zunächst darauf an, die Bedingungen zu formiren, und eine Regel aufzustellen, aus der sich ihre Anzahl mit Sicherheit erkennen läſst, damit man nicht zu viel und nicht zu wenig Bedingungen in die Rechnung aufnehme.

In einem Dreieck ABC können drei Höhenunterschiede, zwischen A und B, zwischen A und C und zwischen B und C gemessen werden. In Bezug z. B. auf den Ausgangspunkt A (dessen Höhe man als gegeben ansehen oder gleich Null annehmen kann) bestimmen die beiden ersten Höhenunterschiede die Höhen der beiden andern Punkte B und C; der dritte Höhenunterschied liefert daher eine Bedingungsgleichung, ganz so, wie der dritte gemessene Winkel in dem horizontalen Dreieck. Hieraus folgt: *wenn in einem Dreieck die Höhenunterschiede zwischen je zwei Punkten gemessen sind, so ist eine Höhenbedingung vorhanden.*

Die Formation der Höhenbedingungen wird durch die folgende Betrachtung sehr einfach: Wenn man in einem Dreieck von einem Punkt ausgehend, in der Richtung der Seiten dem Umfange folgt, bis wieder zu dem Ausgangspunkt zurück, so ist klar, daſs man eben so viel herabsteigen muſs,