§. 105. Rechnungsvorschriften und Ausgleichung der Höhenmessungen nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Die Rechunugen sind ganz nach den Vorschriften geführt die im Nivellement umständlich entwickelt worden sind, es wird deswegen hier eine gedrängte Zusammenstellung derselben genügen.

Es seien A und B (Taf. III. Fig. 4) zwei Punkte über der Oberfläche des Meeres, h und h' ihre Höhen und C der Durchschnittspunkt ihrer Lothlinien, so ist ABC ein ebenes Dreieck. Bezeichnet man die Zenithdistancen der Linie AB in dem Punkte A durch $z + \Delta z$, in dem Punkte B durch $z' + \Delta z'$, wo Δz und $\Delta z'$ die in der Atmosphäre entstandenen Brechungswinkel bedeuten, so erhält man in dem erwähnten Dreieck

$$\begin{array}{rl} \text{Winkel } A = & 180^0 - z - \Delta z \\ - \quad B = & 180^0 - z' - \Delta z' \\ - \quad C = & C \\ \hline 180^0 = & 360^0 + C - (z + \Delta z + z' + \Delta z') \end{array}$$

Hieraus folgt:

$$1. \ldots\ 180^0 + C = z + \Delta z + z' + \Delta z'$$
$$2. \ldots\ \tfrac{1}{2}(A+B) = 90 - \tfrac{1}{2} C$$
$$3. \ldots\ \tfrac{1}{2}(A-B) = \tfrac{1}{2}(z' + \Delta z' - z - \Delta z) = 90^0 - (z + \Delta z - \tfrac{1}{2} C)$$
$$= -\{90^0 - (z' + \Delta z' - \tfrac{1}{2} C)\}$$

Die letzten Ausdrücke für $\frac{1}{2}(A-B)$ werden gefunden, wenn man aus dem ersten, einmal den Werth von $z' + \Delta z'$ und dann den Werth von $z + \Delta z$ in den dritten Ausdruck setzt.

Wenn s die zwischen den Lothlinien von A und B gemessene, und auf den Meereshorizont reducirte Entfernung, nnd r den mittleren Krümmungshalbmesser dieses Bogens bedeutet, so erhält man in dem Fall wo C ein kleiner Winkel ist:

$$C = \frac{s}{r \operatorname{Sin} 1''} = \frac{s\,\omega}{r}$$

Drückt man die Summe der beiden Brechungswinkel in Theilen des Winkels C aus, indem man $\Delta z + \Delta z' = kC$ setzt, so wird (nach *Gaufs*) k der Coeffizient der Strahlenbrechung genannt. Wird kC in die Gleichung 1 eingeführt und für C der vorhin gefundene Werth gesetzt, so findet man:

4. ... $1-k = (z' + z - 180^0)\,\frac{r}{s\,\omega}$

Diese Gleichung bestimmt den Coeffizienten der Strahlenbrechung aus der Entfernung s und den in A und B gegenseitig und gleichzeitig gemessenen Zenithdistancen.

Aus den beiden Seiten $r+h$ und $r+h'$ des Dreiecks ABC und dem eingeschlossenen Winkel C erhält man:

$$2\,r + h + h' : h' - h = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\,C : \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\,(z' + \Delta z' - z - \Delta z)$$

daher:

$$h' - h = \left(1 + \frac{h'+h}{2\,r}\right)\,2\,r\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\,C\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\,(z' + \Delta z' - z - \Delta z)$$

Unter der Voraussetzung, daſs die Höhen h' und h nicht sehr groſs sind, und C nur ein kleiner Winkel ist, kann der erste Faktor $= 1$, und $2\,r\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,C$ gleich der Entfernung s angenommen werden. Führt man diese Werthe, und die oben aufgeführten verschiedenen Ausdrücke von $\frac{1}{2}\,(A - B)$ in die letzte Gleichung ein, so findet man für den Höhenunterschied zwischen A und B die Ausdrücke:

5. ... $h' - h = s\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,(z' + \Delta z' - z - \Delta z)$

$\qquad\quad = s\operatorname{cotg}(z + \Delta z - \frac{1}{2}\,C)$

$\qquad h - h' = s\operatorname{cotg}(z' + \Delta z' - \frac{1}{2}\,C)$

Nimmt man an, daſs die Brechungswinkel in A und B einander gleich sind, so folgt $\Delta z = \Delta z' = \frac{k\,C}{2} = \frac{k\,s\,\omega}{2\,r}$, und die obigen Ausdrücke gehen über in die folgenden:

6. ... $h' - h = s\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,(z' - z)$

$\qquad\quad = s\operatorname{cotg}\left(z - \frac{s\,\omega}{2\,r}\,(1-k)\right)$

$\qquad h - h' = s\operatorname{cotg}\left(z' - \frac{s\,\omega}{2\,r}\,(1-k)\right)$

Führt man anstatt der Zenithdistance den Winkel e ein, den die Linie AB mit dem Horizont von A macht, so ist $e = 90 - z$, also $z = 90 - e$. Für diesen Werth findet man:

$$h' - h = s\operatorname{cotg}\left\{90 - \left(e + \frac{s\,\omega}{2\,r}\,(1-k)\right)\right\} = s\operatorname{tg}\left(e + \frac{s\,\omega}{2\,r}\,(1-k)\right)$$

und wenn man die Tangente mit dem Bogen vertauscht, welches geschehen kann, sobald e ein kleiner Winkel ist, so erhält man:

7. ... $h' - h = \frac{e\,s}{\omega} + s^2\left(\frac{1-k}{2\,r}\right)$

Ist hier z kleiner als 90^0, so bedeutet e Elevation und ist positiv; ist z gröſser als 90^0 so bedeutet e Depression und ist negativ.

Ist in dem Punkte A die Zenithdistance des Meereshorizontes beobachtet, so ist AB in B eine Tangente der Erde, und daher $h' = 0$ und $z' = 90^0$. In diesem Fall erhält man aus Gleichung 4, indem man $z' = 90^0$ setzt:

8. ... $1-k = \frac{r}{s\,\omega}(z-90^0)$

und aus der ersten Gleichung 6.

$$-h = s \text{ tg } \tfrac{1}{2}(90^0-z) \text{ oder:}$$

9. ... $h = s \text{ tg } \frac{1}{2}(z-90^0)$

Setzt man aber den Werth von z aus Gleichung 8 in die zweite Gleichung 6, so erhält man $h = s \text{ tg } \frac{s\,\omega}{2r}(1-k)$ und wenn man die Tangente mit dem Bogen vertauscht:

10. ... $h = s^2\left(\frac{1-k}{2r}\right)$

Führt man endlich diesen Werth von $s = \sqrt{\left(\frac{2rh}{1-k}\right)}$ in die Gleichung 9 ein, so findet man aus der Zenithdistance des Meereshorizontes die Höhe des Standpunktes A unabhängig von der Entfernung, nämlich:

11. ... $h = \frac{2r}{1-k}.\text{tg}^2\,\frac{1}{2}(z-90^0) = \frac{r}{2(1-k)}\left(\frac{z-90^0}{\omega}\right)^2 = \frac{r}{2(1-k)}.\left(\frac{-e}{\omega}\right)^2$

Setzt man die Ausdrücke von 10 und 11 einander gleich, so ergiebt sich:

12. ... $s = \frac{2r}{1-k}\text{ tg } \frac{1}{2}(z-90^0) = \frac{r}{1-k}\left(\frac{z-90^0}{\omega}\right) = \frac{-re}{(1-k)\,\omega}$

In dem letzten Ausdruck ist e für sich als Depression des Meereshorizontes immer negativ, wodurch s positiv bleibt.

Aus Gleichung 10 folgt $s^2 = \frac{2r}{1-k}.h$ und hieraus findet man in Toisen für Log. $r = 6{,}51464$, und $k = 0{,}1306$

$$s^2 = (2743{,}5)^2\ h^{*})$$

Eine Preuſsische Meile ist $= 2000$ Ruthen $= 3864{,}72$ Toisen. Dividirt man daher auf beiden Seiten mit $(3864{,}72)^2$ und setzt $\frac{s^2}{(3864{,}72)^2} = m^2$ so folgt:

---

*) Es wird hier auf einen Druckfehler im Nivellement aufmerksam gemacht. Seite 67 daselbst in der Anmerkung ist anstatt $s^2 = 2743{,}5\,.\,h$ zu setzen: $s^2 = (2743{,}5)^2\ h$

$$m^2 = 0{,}5039\; h \text{ oder sehr nahe } m^2 = \tfrac{1}{2}\, h$$

wo m Preufsische Meilen und h Toisen bedeuten. Diese einfache Relation bestimmt für eine mittlere Strahlenbrechung die gröfste Entfernung in Preufsischen Meilen, auf welche man von einer in Toisen gegebenen Höhe in das Meer hinaussehen kann. Z. B. Ein Auge, welches am Strande sich 6 Pariser Fufs oder 1 Toise über dem Wasserspiegel befindet, kann 0,71 Meilen (also noch nicht $\frac{3}{4}$ Meilen) weit in die See hinaussehen. Ist $h = 2$ Toisen so kann man 1 Meile weit in die See hinaussehen.

Wenn ϱ den Krümmungsradius im Meridian und ϱ' den Krümmungsradius in einer auf den Meridian senkrechten Richtung bedeuten, so ist für einen Punkt dessen Polhöhe $= \varphi$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{(1 - ee \operatorname{Sin} \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{a\,(1 - ee)}\,;\quad \frac{1}{\varrho'} = \frac{(1 - ee \operatorname{Sin} \varphi^2)^{\frac{1}{2}}}{a}$$

wo a die grofse Axe und ee das Quadrat der Excentricität der Meridian-Ellipse sind.

Hieraus findet man den mittleren Krümmungshalbmesser r für irgend einen Bogen s, dessen Azimuth und Polhöhe (in der Mitte des Bogens) α und φ sind, durch folgende Gleichung:

$$\frac{1}{r} = \frac{\operatorname{Cos} \alpha^2}{\varrho} + \frac{\operatorname{Sin} \alpha^2}{\varrho'} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'}\right) \operatorname{Cos} 2\alpha$$

$$\text{daher: } \frac{\omega}{2r} = \frac{\omega}{4}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right) + \frac{\omega}{4}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'}\right) \operatorname{Cos} 2\alpha$$

$$\omega \text{ ist gleich } 206264''{,}8$$

Sind gegenseitige und gleichzeitige Zenithdistancen zwischen zwei Stationen mehrfach beobachtet worden, so kann der wahrscheinliche Fehler in folgender Weise ermittelt werden:

Wenn M den mittleren Werth von $\frac{1}{2}(z' - z)$ in Gleichung 6 bedeutet, so ist der Fehler jedes einzelnen Werthes:

$$v = M - \tfrac{1}{2}(z' - z)$$

der mittlere Fehler:

$$\varepsilon\varepsilon = \frac{1}{n}\,(vv)$$

der wahrscheinliche Fehler:

$$w = \varepsilon \,.\, 0{,}6745 \text{ in Secunden}$$

$$w_1 = \frac{s\,w}{\omega} \text{ im Maafs der Entfernung } s.$$

n bedeutet die Anzahl der Beobachtungen und (vv) die Summe der Quadrate sämmtlicher Fehler.

Sind die wahrscheinlichen Fehler w, w', w'' ... zwischen je zwei auf einander folgenden Stationen bekannt, so findet man den wahrscheinlichen Fehler des Endresultates:

$$W = \sqrt{(ww + w'w' + w''w'') \ldots}$$

Aufgaben.

1. Wenn in einem Standpunkt A die Zenithdistancen nach zwei anderen Punkten B und C, deren Entfernungen und Höhen bekannt sind, gemessen wurden, so kann die Höhe von A unabhängig von der Strahlenbrechung bestimmt werden, wenn man voraussetzt, daſs die Strahlenbrechung in beiden Richtungen gleich groſs gewesen ist.

Gegeben sind: h' und h'' die Höhen von B und C
s und s' die Entfernungen dieser Punkte von A
Gemessen sind: z und z' die Zenithdistancen von B und C
Gesucht werden: h die Höhe von A und k der Coeffizient der Strahlenbrechung.

Wenn $e = 90 - z$ und $e' = 90 - z'$ gesetzt wird, so findet man nach Gleichung 7 die beiden folgenden Gleichungen:

$$h' - h = \frac{s\,e}{\omega} + s^2 \left(\frac{1-k}{2\,r}\right)$$

$$h'' - h = \frac{s'\,e'}{\omega} + s'^2 \left(\frac{1-k}{2\,r}\right)$$

und hieraus folgt:

$$1 - k = \frac{2\,r}{s^2 - s'^2} \left\{h' - h'' - \frac{s\,e}{\omega} + \frac{s'\,e'}{\omega}\right\}$$

$$h = \frac{s'^2}{s^2 - s'^2} \left\{\frac{s\,e}{\omega} - h' - \frac{s^2}{s'^2} \left(\frac{s'\,e'}{\omega} - h''\right)\right\}$$

2. Sind dagegen von den bekannten Höhen B und C die Zeuithdistancen nach A gemessen, die durch $z_,$ und $z_{,,}$ bezeichnet werden mögen, so findet man die Höhe von A, unter der Voraussetzung, daſs die Refraktionen in B und C gleich gewesen sind, unabhängig von der Strahlenbrechung.

Es seien $e_, = 90^0 - z_,$; $e_{,,} = 90^0 - z_{,,}$ und alle übrigen Bezeichnungen dieselben wie vorhin, so erhält man die Gleichungen:

$$\text{In } B \ldots h - h' = \frac{s' e_{,}}{\omega} + s'^{2}\left(\frac{1-k}{2r}\right)$$

$$\text{In } C \ldots h - h'' = \frac{s'' e_{,,}}{\omega} + s''^{2}\left(\frac{1-k}{2r}\right)$$

Aus denen sich durch Elimination ergiebt:

$$1 - k = \frac{2r}{s'^{2} - s''^{2}}\left\{h'' - h' - \frac{s' e_{,}}{\omega} + \frac{s'' e_{,,}}{\omega}\right\}$$

$$h = \frac{s'^{2}}{s'^{2} - s''^{2}}\left\{h'' + \frac{s'' e_{,,}}{\omega} - \frac{s''^{2}}{s'^{2}}\left(h' + \frac{s' e_{,}}{\omega}\right)\right\}$$

3. Sind in B und in C die Zenithdistancen nach mehreren der Lage nach bekannten Punkten A, A^{1} ... gemessen, dann können für je zwei dieser Punkte ihre Höhen und die Strahlenbrechung in B und in C unabhängig von einander bestimmt werden.

Es sei gegeben:

In B.	In C.
die Höhe .... h'	.... h''
die Entfern. BA .. s	CA .... s''
- - BA' .. s'	CA' .... s'''

gemessen wurden:

die Elevation von $A = 90 - z = e$	$90 - z'' = e''$
- - - $A' = 90 - z' = e'$	$90 - z''' = e'''$

Hieraus sollen $h_{,}$ und $h_{,,}$ die Höhen von A und A', und k und k' die Refraktionen in B und in C gefunden werden. Für jeden Standpunkt findet man zwei Gleichungen nämlich:

$$\text{Für } B. \quad h_{,} - h' = \frac{s e}{\omega} + s^{2}\left(\frac{1-k}{2r}\right) \quad ; \quad h_{,,} - h' = \frac{s' e'}{\omega} + s'^{2}\left(\frac{1-k}{2r}\right)$$

$$\text{Für } C. \quad h_{,} - h'' = \frac{s'' e''}{\omega} + s''^{2}\left(\frac{1-k'}{2r}\right) \quad ; \quad h_{,,} - h'' = \frac{s''' e'''}{\omega} + s'''^{2}\left(\frac{1-k'}{2r}\right)$$

Hieraus findet man:

$$h_{,} = \frac{1}{1 - \frac{s^{2} s'''^{2}}{s'^{2} s''^{2}}}\left\{h' + \frac{s e}{\omega} - \left(h'' + \frac{s'' e''}{\omega}\right)\frac{s^{2} s'''^{2}}{s'^{2} s''^{2}} + \left(h'' + \frac{s''' e'''}{\omega} - h' - \frac{s' e'}{\omega}\right)\frac{s^{2}}{s'^{2}}\right\}$$

$$h_{,,} = \frac{1}{1 - \frac{s^{2} s'''^{2}}{s'^{2} s''^{2}}}\left\{h'' + \frac{s''' e'''}{\omega} - \left(h' + \frac{s' e'}{\omega}\right)\frac{s^{2} s'''^{2}}{s'^{2} s''^{2}} + \left(h' + \frac{s e}{\omega} - h'' - \frac{s'' e''}{\omega}\right)\frac{s'''^{2}}{s''^{2}}\right\}$$

$$1 - k = \frac{2r}{s^2 - s'^2} \left\{ h_{,} - h_{,,} - \frac{s\,e}{\omega} + \frac{s'\,e'}{\omega} \right\}$$

$$1 - k' = \frac{2r}{s''^2 - s'''^2} \left\{ h_{,} - h_{,,} - \frac{s''\,e''}{\omega} + \frac{s'''\,e'''}{\omega} \right\}$$

Ausgleichung der Höhenmessungen nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Wenn in einem Dreiecksnetze mehr Zenithdistancen gemessen wurden, als zur Bestimmung der Höhen der Dreieckspunkte unumgänglich nothwendig sind, so lassen sich, analog wie bei den horizontalen Messungen, Bedingungen angeben, welche erfüllt werden müssen, wenn die gemessenen Höhen bei der Vergleichung unter einander von jedem Widerspruch frei werden sollen. Diese Bedingungen stellen die Unterschiede oder die Fehler dar, welche zwischen den nothwendigen und den überschüssigen Bestimmungen der Höhenunterschiede satt finden, und können eben so, wie die Bedingungen in einem horizontalen Dreiecksnetze, nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt werden. Es kömmt daher zunächst darauf an, die Bedingungen zu formiren, und eine Regel aufzustellen, aus der sich ihre Anzahl mit Sicherheit erkennen läſst, damit man nicht zu viel und nicht zu wenig Bedingungen in die Rechnung aufnehme.

In einem Dreieck ABC können drei Höhenunterschiede, zwischen A und B, zwischen A und C und zwischen B und C gemessen werden. In Bezug z. B. auf den Ausgangspunkt A (dessen Höhe man als gegeben ansehen oder gleich Null annehmen kann) bestimmen die beiden ersten Höhenunterschiede die Höhen der beiden andern Punkte B und C; der dritte Höhenunterschied liefert daher eine Bedingungsgleichung, ganz so, wie der dritte gemessene Winkel in dem horizontalen Dreieck. Hieraus folgt: *wenn in einem Dreieck die Höhenunterschiede zwischen je zwei Punkten gemessen sind, so ist eine Höhenbedingung vorhanden.*

Die Formation der Höhenbedingungen wird durch die folgende Betrachtung sehr einfach: Wenn man in einem Dreieck von einem Punkt ausgehend, in der Richtung der Seiten dem Umfange folgt, bis wieder zu dem Ausgangspunkt zurück, so ist klar, daſs man eben so viel herabsteigen muſs, als man hinaufgestiegen ist, oder umgekehrt. Hieraus folgt also: *dafs die Summe der Höhenunterschiede zwischen den Winkelpunkten eines Dreiecks gleich Null sein mufs.*

Eben so folgt aus denselben Gründen, dafs die Summe der Höhenunterschiede zwischen den Umfangspunkten einer jeden Figur gleich Null sein mufs. Legt man aber zwei Dreiecke, in denen die obige Bedingung erfüllt ist zu einem Viereck zusammen, so ist die Höhenbedingung des Umfanges in dem Viereck mit erfüllt. Der Beweis von dieser Behauptung ist sehr einfach. Es sei h_1 der Höhenunterschied der gemeinschaftlichen Seite beider Dreiecke und:

für das 1ste Dreieck $0 = + h_1 + h_2 - h_3$

- - 2te - $0 = - h_1 + h_4 - h_5$

so ist für den Umfang des Vierecks $0 = + h_2 - h_3 + h_4 - h_5$

Hieraus ergiebt sich, wie leicht einzusehen, dafs in jeder Figur, die aus Dreiecken zusammengesetzt ist, die Höhenbedingung des Umfanges mit erfüllt ist, sobald die Höhenbedingungen der einzelnen Dreiecke erfüllt sind. Diese Betrachtung erleichtert die Formation der Bedingungsgleichungen wesentlich, weil daraus hervorgeht, dafs man bei allen Figuren, die aus Dreiecken zusammengesetzt sind, nur die Höhenbedingungen in den Dreiecken aufzusuchen und zu erfüllen hat, um allen andern Höhenbedingungen, welche noch in der Figur enthalten sind, zugleich mit Genüge zu leisten.

Die Bestimmung der Anzahl der Bedingungsgleichungen, welche in einer Figur vorhanden sind, hat nach dem bisher Gesagten keine Schwierigkeit mehr: sie ist gleich der Anzahl der gemessenen Höhenunterschiede, weniger der Zahl *der* Höhenunterschiede die (von einem Ausgangspunkte aus) zur Bestimmung der übrigen Punkte durchaus nothwendig sind. Oder in Zeichen: Hat eine Figur n Punkte, so sind von einem Ausgangspunkte aus, $n-1$ Höhendifferenzen zur Bestimmung der übrigen Punkte nothwendig; sind nun überhaupt in einer Figur, m Höhendifferenzen gemessen, so ist die Anzahl der Bedingunsgleichungen $= m - n + 1$.

Für das Dreieck, ist $m = 3$ und $n = 3$, also giebt $m - n + 1$ eine Bedingung; für das Viereck mit beiden Diagonalen ist $m = 6$, $n = 4$, also $m - n + 1 = 3$ Bedingungen.

Für das Viereck um einen Mittelpunkt ist $m = 8$, $n = 5$, also $m - n + 1$ gleich 4 Bedingungen u. s. w.

Nennt man H den Höhenunterschied zwischen zwei Punkten, so ist nach Gleichung 6:

$$H = s \operatorname{cotg} \left(z - \frac{s\,\omega}{2\,r} (1-k) \right)$$

Die Abhängigkeit einer kleinen Höhenänderung von der Zenithdistance z findet man durch Differentiation dieser Gleichung nämlich:

$$dH = d.\,s \operatorname{cotg} \left(z - \frac{s\,\omega}{2\,r} (1-k) \right) = - \frac{s.\,d\,z}{\omega \operatorname{Sin} z^2}$$

Sind die Höhenunterschiede nicht groſs, so ist z nahe an 90^0, und man wird ohne erheblichen Fehler $\operatorname{Sin} z^2 = 1$ setzen können. Auf die Zeichen ist sorgfältig zu achten: ist z kleiner als 90^0 so ist dz negativ; ist z gröſser als 90^0 so ist es positiv. Oder: ist der Höhenunterschied positiv, so ist dz negativ, und ist der Höhenunterschied nagativ, so ist dz positiv.

Bezeichnet man in einer Figur die gemessenen Höhendifferenzen durch H_1, H_2, H_3 ...; die zugehörigen Entfernungen durch $s_{,}$, $s_{,,}$, $s_{,,,}$ ...., und die unbekannten Verbesserungen der Zenithdistancen durch (1), (2), (3) ... so formirt man die Bedingungsgleichungen nach den gegebenen Vorschriften, indem man $-\frac{s_{,}}{\omega}(1)$ zu $+H_1$ und $+\frac{s_{,,}}{\omega}(2)$ zu $-H_2$ u. s. w. hinzufügt. z. B. In einem Dreieck ABC sei der Höhenunterschied zwischen $AB = +H_1$ zwischen $BC = +H_2$ und zwischen $CA = -H_3$; und $s_{,}$, $s_{,,}$, $s_{,,,}$ die entsprechenden Entfernungen, so findet man die Bedingungsgleichung:

$$0 = +H_1 + H_2 - H_3 - \frac{s_{,}(1)}{\omega} - \frac{s_{,,}(2)}{\omega} + \frac{s_{,,,}(3)}{\omega}$$

und wenn man den bekannten Werth von $+H_1 + H_2 - H_3 = a$ setzt:

$$0 = a - \frac{s_{,}(1)}{\omega} - \frac{s_{,,}(2)}{\omega} + \frac{s_{,,,}(3)}{\omega}$$

Auf ganz ähnliche Weise bildet man alle übrigen Bedingungsgleichungen.

Wenn sämmtliche Bedingungsgleichungen formirt sind, so werden sie mit den willkürlichen Faktoren I, II, III ... multiplicirt und bis zur Bestimmung der Verbesserungen, nach der in §. 101 gegebenen Anleitung behandelt. Die Verbesserungen (1), (2), (3) ... drücken die Veränderungen der Zenithdistancen in Secunden aus; die ihnen entsprechenden Höhenänderungen, die mit Δ_1, Δ_2, Δ_3 ... bezeichnet werden mögen, findet man, indem man sie mit den zugehörigen in Bogentheilen von einer Secunde ausgedrückten Entfernungen multiplicirt. Man erhält daher wie oben $\Delta_1 = \frac{s_{,}}{\omega}(1)$; $\Delta_2 = \frac{s_{,,}}{\omega}(2)$ u. s. w.

Ist die Anzahl der gleich gut beobachteten Zenithdistancen ungleich, so sind die Gewichte derselben der Anzahl der Beobachtungen proportional zu setzen Die obige Behandlung der Aufgabe setzt voraus, dafs k eine beständige Gröfse sei, es leidet indessen keinen Zweifel, dafs die aus der Veränderlichkeit von k hervorgehende Unsicherkeit, die der Beobachtungsfehler bei weitem übertrifft; es giebt aber kein Mittel, diese Veränderlichkeit ihrem Werthe nach zu schätzen, wodurch sie sich der Rechnung gänzlich entzieht.

Anmerkung. Wenn Barometermessungen in ähnlicher Weise angeordnet werden, so sind die gemessenen Höhenunterschiede innerhalb mäfsiger Grenzen unabhängig von den Entfernungen, aber abhängig von den Veränderungen, welche ein festes Barometer in der Nähe, während der Zwischenzeiten der Beobachtungen anzeigte, weil bei veränderlichem Barometerstande die Höhenmessung unsicherer wird. In diesem Fall erhalten die Bedingungsgleichuugen die Form:

$$0 = a - \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3$$

und die Gewichte der Verbesserungen können den Veränderungen eines festen Barometers umgekehrt proportional gesetzt werden.