

§. 101. Bestimmung einiger Objecte, welche von mehreren Dreieckspunkten beobachtet wurden, nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Sind verschiedene Richtungen oder Winkel unabhängig von einander beobachtet, denen die Gewichte $p, p', p'' \dots$ zugehören, und bezeichnet man die unbekanntenen Verbesserungen dieser Richtungen oder Winkel durch

$$(1), (2), (3) \dots$$

so muß die Function

$$\Sigma = \frac{1}{2} \{(1)^2 p + (2)^2 p' + (3)^2 p'' + \dots\} \dots\dots 1.$$

ein Minimum sein. (*Enke* Jahrbuch für 1836 Seite 280.)

$$\text{Daraus folgt, daß } \frac{d\Sigma}{d(1)} = 0; \frac{d\Sigma}{d(2)} = 0; \frac{d\Sigma}{d(3)} = 0.$$

Sind ferner aus der Figur des Dreiecksnetzes Bedingungen zwischen den unbekanntenen Verbesserungen vorhanden, so können sie dargestellt werden durch Gleichungen von der Form:

$$\left. \begin{aligned} u &= 0 = \mathfrak{A} + a(1) + a'(2) + a''(3) + \dots \\ u' &= 0 = \mathfrak{B} + b(1) + b'(2) + b''(3) + \dots \\ u'' &= 0 = \mathfrak{C} + c(1) + c'(2) + c''(3) + \dots \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \dots 2.$$

Multiplirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit den willkürlichen Factoren I, II, III \dots und fügt man dann ihre Differentialquotienten, die nach den Bedingungen des Minimums $= 0$ sein müssen, den obigen gleichnamigen Differentialquotienten hinzu, so erhält man nach §. 79:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{d\Sigma}{d(1)} + \frac{du}{d(1)} I + \frac{du'}{d(1)} II + \frac{du''}{d(1)} III + \dots \\ 0 &= \frac{d\Sigma}{d(2)} + \frac{du}{d(2)} I + \frac{du'}{d(2)} II + \frac{du''}{d(2)} III + \dots \\ 0 &= \frac{d\Sigma}{d(3)} + \frac{du}{d(3)} I + \frac{du'}{d(3)} II + \frac{du''}{d(3)} III + \dots \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \dots 3.$$

Nach Gleichung 1. ist aber $\frac{d\Sigma}{d(1)} = (1)p; \frac{d\Sigma}{d(2)} = (2)p; \frac{d\Sigma}{d(3)} = (3)p.$

Ferner hat man $\frac{du}{d(1)} = a; \frac{du'}{d(1)} = b; \frac{du''}{d(1)} = c, \frac{du}{d(2)} = a'$ u. s. w.

Setzt man diese Werthe in die vorigen Gleichungen, so gehen dieselben über in:

$$\begin{aligned} 0 &= (1)p + a \text{ I} + b \text{ II} + c \text{ III} \dots \\ 0 &= (2)p + a' \text{ I} + b' \text{ II} + c' \text{ III} \dots \\ 0 &= (3)p + a'' \text{ I} + b'' \text{ II} + c'' \text{ III} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

und hieraus findet man:

$$\left. \begin{aligned} (1) &= -\frac{1}{p} \{ a \text{ I} + b \text{ II} + c \text{ III} \dots \} \\ (2) &= -\frac{1}{p'} \{ a' \text{ I} + b' \text{ II} + c' \text{ III} \dots \} \\ (3) &= -\frac{1}{p''} \{ a'' \text{ I} + b'' \text{ II} + c'' \text{ III} \dots \} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \dots 4.$$

Schreibt man jetzt die Gleichungen 2. wie folgt, welches geschehen muß, weil in den Endgleichungen die Summen der Quadrate (aa), (bb) ... positiv werden müssen, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A} &= -\{ a(1) + a'(2) + a''(3) \dots \} \\ \mathfrak{B} &= -\{ b(1) + b'(2) + b''(3) \dots \} \\ \mathfrak{C} &= -\{ c(1) + c'(2) + c''(3) \dots \} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \dots 5.$$

und setzt man die Werthe von (1), (2), (3) ... aus den Gleichungen 4. in die Gleichungen 5., so enthalten dieselben nur die Faktoren I, II, III ... als unbekante Größen.

Der hier angegebene Gang der Rechnung ist aber einer Vereinfachung fähig. Betrachtet man die Minuszeichen in den Gleichungen 4. und 5., so ist klar, daß dieselben sich gegenseitig aufheben, sobald man die Werthe von (1), (2), (3) ... aus den Gleichungen 4. in die Gleichungen 5. setzt. Eben so verschwinden bei Bestimmung der Werthe der Verbesserungen in den Gleichungen 4. die Minuszeichen, wenn man die Faktoren I, II, III ... mit entgegengesetzten Zeichen nimmt. Man erhält daher dasselbe Resultat, wenn man die Minuszeichen in den Gleichungen 4. und 5. unterdrückt, und den Faktoren I, II, III ... entgegengesetzte Zeichen giebt, d. h. wenn man die Minuszeichen in den Gleichungen 4. und 5. fortläßt, und den constanten Größen \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} ... in den Gleichungen 5. entgegengesetzte Zeichen giebt, wodurch diese letzteren Gleichungen wieder in die Gleichungen 2. übergehen. Hieraus geht folgende einfachere Rechnungsvorschrift hervor:

Man läßt in den Gleichungen 4. die Minuszeichen fort, und setzt dann die Werthe von (1), (2), (3) ... direkt in die Gleichungen 2., so findet man die folgenden Endgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} - \mathfrak{A} &= (aa)I + (ab)II + (ac)III \dots \\ - \mathfrak{B} &= (ab)I + (bb)II + (bc)III \dots \\ - \mathfrak{C} &= (ac)I + (bc)II + (cc)III \dots \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 6.$$

$$\begin{aligned} \text{Hier ist } (aa) &= \frac{aa}{p} + \frac{a'a'}{p'} + \frac{a''a''}{p''} \dots \\ (ab) &= \frac{ab}{p} + \frac{a'b'}{p'} + \frac{a''b''}{p''} \dots \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Legt man den Beobachtungen gleiche Gewichte bei, so wird $p = p' = p'' = 1$.

Die Auflösung der Gleichungen 6. giebt die Werthe der Faktoren I, II, III; setzt man diese in die von den Minuszeichen befreiten Gleichungen 4., so findet man die richtigen Verbesserungen (1), (2), (3), welche den beobachteten Richtungen oder Winkeln hinzugefügt werden müssen, damit sie den Bedingungen des Minimums und zugleich den Bedingungen 2. entsprechen.

Bei der Formation der Bedingungsgleichungen nach §. 80 ist noch im Allgemeinen zu bemerken:

Kommen Dreiecke vor, in denen nur zwei Winkel beobachtet sind, so findet man den dritten Winkel dadurch, daß man die Summe der beiden gemessenen Winkel *nebst ihren Verbesserungen* von $180^\circ + \varepsilon$ abzieht. Die auf diese Weise gefundenen Winkel mit den zugehörigen Verbesserungen werden dann eben so behandelt, wie die gemessenen.

Wählt man die logarithmische Formation der Seitengleichungen §. 80, wo die logarithmischen Sinus-Differenzen von $1''$ die Coefficienten der Verbesserungen werden, so richten sich die Zeichen dieser Coefficienten nach den Zeichen der Cotangenten ihrer zugehörigen Winkel.

Kommen bei Formation der Seitengleichungen sehr spitze Winkel in den Figuren vor, so ist es vortheilhaft, wenn man dieselben durch einen andern Gang der Rechnung zu vermeiden sucht, welches in den meisten Fällen gelingen wird, indem die Bedingungen der Seitengleichungen in jeder Figur auf verschiedene Weise formirt werden können.

1. Bestimmung des Signals auf dem Timberge bei Klein-Mutz.

Beobachtungen in Mutz:

Gransee	0°	0'	0"	
20 Beob. Templin (Thurm) . . .	100	8	2,843	+ (1)
20 Beob. Hausberg	159	22	18,716	+ (2)
20 Beob. Prenden	196	9	54,087	+ (3)
20 Beob. Eichstädt	262	1	51,132	+ (4)

Die Richtungen von den Dreieckspunkten nach Mutz finden sich in den §§. 60, 62, 63, 64 aufgeführt.

Die Beobachtungen sind gegen 20 Mal wiederholt und die Gewichte werden bei allen gleich angenommen.

Bedingungsgleichungen.

I. Mutz-Gransee-Eichstädt.

Mutz	97° 58'	8,868	- (4)
Gransee	66 15	24,088	- (5)
Eichstädt	15 46	32,354	+ (6)
Summe	180 0	5,310	
180° + ε	180 0	0,776	
0 =	+ 4,534		- (4) - (5) + (6)

II. Mutz-Eichstädt-Prenden.

Mutz	65° 51'	57,045	+ (4) - (3)
Eichstädt	49 40	38,967	- (6)
Prenden	64 27	25,556	+ (7)
Summe	180 0	1,568	
180° + ε	180 0	2,033	
0 =	- 0,465		- (3) + (4) - (6) + (7)

III. Mutz-Prenden-Hausberg.

Mutz	36° 47'	35,371	+ (3) - (2)
Prenden	89 30	15,644	- (7)
Hausberg	53 42	9,533	+ (8)
Summe	180 0	0,548	
180° + ε	180 0	1,399	
0 =	- 0,851		- (2) + (3) - (7) + (8)

IV. *Gransee-Eichstädt-Prenden-Mutz.*

$$1 = \frac{\sin EMG \cdot \sin EPM \cdot \sin EGP}{\sin EGM \cdot \sin EMP \cdot \sin EPG}$$

$$EMG = 97^\circ 58' 8,868 - (4)$$

$$EPM = 64 27 25,556 + (7)$$

$$EGP = 54 16 29,251$$

$$9,9957852,6 + 2,947(4)$$

$$9,9553277,4 + 10,062(7)$$

$$9,9094689,3$$

$$\underline{9,8605819,3}$$

$$EGM = 66^\circ 15' 24,088 - (5)$$

$$EMP = 65 51 57,045 + (4) - (3)$$

$$EPG = 60 16 22,662$$

$$9,9615874,4 - 9,262(5)$$

$$9,9602731,3 + 9,434\{(4) - (3)\}$$

$$9,9387252,6$$

$$\underline{9,8605858,3}$$

$$0 = -39,0 + 9,434(3) - 6,487(4) + 9,262(5) + 10,062(7)$$

Anmerkung. Die logarithmischen Differenzen von $1''$ sind hier aus zehnstelligen Tafeln genommen.

V. *Hausberg-Prenden-Templin-Mutz.*

$$1 = \frac{\sin HMP \cdot \sin HTM \cdot \sin HPT}{\sin HPM \cdot \sin HMT \cdot \sin HTP}$$

$$HMP = 36^\circ 47' 35,371 + (3) - (2)$$

$$HTM = 76 43 36,564 + (1) - (2) + (8)$$

$$HPT = 50 37 49,831$$

$$HPM = 89^\circ 30' 15,644 - (7)$$

$$HMT = 59 14 15,873 + (2) - (1)$$

$$HTP = 31 37 52,812$$

$$9,7773746,0 + 28,152\{(3) - (2)\}$$

$$9,9882406,8 + 4,967\{(1) - (2) + (8)\}$$

$$9,8882196,3$$

$$\underline{9,6538349,1}$$

$$9,9999837,5 - 0,182(7)$$

$$9,9341433,0 + 12,533\{(2) - (1)\}$$

$$9,7197054,6$$

$$\underline{9,6538325,1}$$

$$0 = +24,0 + 17,500(1) - 45,652(2) + 28,152(3) + 0,182(7) + 4,967(8)$$

VI. *Eichstädt-Prenden-Hausberg-Templin-Gransee-Mutz.*

$$1 = \frac{\sin MPE \cdot \sin MHP \cdot \sin MTH \cdot \sin MGT \cdot \sin MEG}{\sin MEP \cdot \sin MPH \cdot \sin MHT \cdot \sin MTG \cdot \sin MGE}$$

$$MPE = 64^\circ 27' 25,556 + (7)$$

$$MHP = 53 42 9,533 + (8)$$

$$MTH = 76 43 36,564 + (1) - (2) + (8)$$

$$MGT = 59 48 47,833 + (5)$$

$$MEG = 15 46 32,354 + (6)$$

$$9,9553329,9 + 10,062(7)$$

$$9,9063111,4 + 15,466(8)$$

$$9,9882406,8 + 4,967\{(1) - (2) + (8)\}$$

$$9,9367104,5 + 12,248(5)$$

$$9,4343634,5 + 74,525(6)$$

$$\underline{9,2209587,1}$$

$$MEP = 49^\circ 40' 38,967 - (6)$$

$$MPH = 89 30 15,644 - (7)$$

$$MHT = 44 2 9,342 - (8)$$

$$MTG = 20 3 9,901 - (1) - (5)$$

$$MGE = 66 15 24,088 - (5)$$

$$9,8821909,6 - 17,871(6)$$

$$9,9999837,5 - 0,182(7)$$

$$9,8420531,0 - 21,777(8)$$

$$9,5351486,7 - 57,688\{(1) + (5)\}$$

$$9,9615912,2 - 9,262(5)$$

$$\underline{9,2209677,0}$$

$$0 = -89,9 + 62,655(1) - 4,967(2) + 79,198(5) + 92,396(6) + 10,244(7) + 42,210(8)$$

Gleichungen zwischen den Verbesserungen und den Faktoren I, II, III ...

$$\begin{aligned}
 (1) &= \{+ 17,500 \text{ V} + 62,655 \text{ VI}\} \\
 (2) &= \{- \text{III} - 45,652 \text{ V} - 4,967 \text{ VI}\} \\
 (3) &= \{- \text{II} + \text{III} + 9,434 \text{ IV} + 28,152 \text{ V}\} \\
 (4) &= \{- \text{I} + \text{II} - 6,487 \text{ IV}\} \\
 (5) &= \{- \text{I} + 9,262 \text{ IV} + 79,198 \text{ VI}\} \\
 (6) &= \{+ \text{I} - \text{II} + 92,396 \text{ VI}\} \\
 (7) &= \{- \text{III} + 10,062 \text{ IV} + 0,182 \text{ V} + 10,244 \text{ VI}\} \\
 (8) &= \{+ \text{III} + 4,967 \text{ V} + 42,210 \text{ VI}\}
 \end{aligned}$$

Endgleichungen.

$$\begin{aligned}
 - 4,534 &= + 3,0000 \text{ I} - 2,0000 \text{ II} & 0 & - 2,7750 \text{ IV} & 0 & + 13,1980 \text{ VI} \\
 + 0,465 &= - 2,0000 \text{ I} + 4,0000 \text{ II} - 2,0000 \text{ III} - 5,8590 \text{ IV} - 27,9700 \text{ V} - 82,1520 \text{ VI} \\
 + 0,851 &= & 0 & - 2,0000 \text{ II} + 4,0000 \text{ III} - 0,6280 \text{ IV} + 78,5890 \text{ V} + 36,9330 \text{ VI} \\
 + 39,0 &= - 2,7750 \text{ I} - 5,8590 \text{ II} - 0,6280 \text{ III} + 318,1000 \text{ IV} + 267,4173 \text{ V} + 836,6070 \text{ VI} \\
 - 24,0 &= & 0 & - 27,9700 \text{ II} + 78,5890 \text{ III} + 267,4173 \text{ IV} + 3107,5944 \text{ V} + 1534,7375 \text{ VI} \\
 + 89,9 &= + 13,1980 \text{ I} - 82,1520 \text{ II} + 36,9330 \text{ III} + 836,6070 \text{ IV} + 1534,7375 \text{ V} + 20646,2877 \text{ VI}
 \end{aligned}$$

Aus der Auflösung dieser Gleichungen ergeben sich folgende Faktoren und Verbesserungen.

I = - 1,5438	(1) = - 0,830
II = - 0,2510	(2) = + 1,123
III = + 1,0406	(3) = + 1,337
IV = + 0,1462	(4) = + 0,344
V = - 0,0474	(5) = + 2,906
VI = + 0,0001	(6) = - 1,284
	(7) = + 0,172
	(8) = + 0,809

Werden diese Verbesserungen den Beobachtungen hinzugefügt, so erhält man die Richtungen und Entfernungen in Mutz.

Station Mutz.

	0°	0'	0''	Log.	
Gransee	0°	0'	0''	3,6917636,	3
Templin	100	8	2,013	—	4,0933409, 6
Hausberg	159	22	19,839	—	4,2395310, 9
Prenden	196	9	55,424	—	4,1458598, 7
Eichstädt	262	1	51,476	—	4,2190011, 2

Anmerkung. Um die Endgleichungen zu erhalten werden die durch die Faktoren ausgedrückten Werthe von (1), (2), (3) ... geradezu in die Bedingungsgleichungen gesetzt.

2. Bestimmung des Thurmes in Spandau.

Beobachtungen:

In Eichstädt.			In Eichberg.		
Berlin (Marienth.)	0° 0' 0"		Eichstädt (Dreiecksp.)	0° 0' 0"	
3 Beob. Spandau (Thurm)	23 14 12,1+(1)	6 Beob. Spandau (Thurm)	17 4 1,02+(2)		
Eichberg (Dreiecksp.)	47 9 48,65	Berlin (Marienth.)	43 47 54,72		
		Rauenberg	51 11 22,90		
		Müggelsberg	74 19 48,24		

In Berlin (Marienthurm).			In Müggelsberg.		
Müggelsberg	0° 0' 0"		Eichberg	0° 0' 0"	
Rauenberg	72 10 2,54		Rauenberg	30 21 51,31	
Eichberg	93 45 16,75	2 Beob. Spandau (Thurm)	43 19 30,48+(4)		
4 Beob. Spandau	150 39 51,46+(3)	Berlin (Marienth.)	55 42 51,18		
Eichstädt	182 47 35,60				

In Rauenberg.

Eichberg	0° 0' 0"
2 Beob. Spandau (Thurm)	82 35 11,84+(5)
Berlin (Marienth.)	151 1 17,84
Müggelsberg	233 30 15,80

Bedingungsgleichungen.

I. Eichberg-Eichstädt-Berlin-Spandau.

$$1 = \frac{\sin SE'E\epsilon \cdot \sin SBE' \cdot \sin SE\epsilon B}{\sin SE\epsilon E' \cdot \sin SE'B \cdot \sin SBE\epsilon}$$

$SE'E\epsilon = 23^\circ 55' 36,55 - (1)$	$SE\epsilon E' = 17^\circ 4' 1,02 + (2)$
$SBE' = 32 7 44,14 - (3)$	$SE'B = 23 14 12,10 + (1)$
$SE\epsilon B = 26 43 53,70 - (2)$	$SBE\epsilon = 56 54 34,71 + (3)$
9,6080653, 1 - 47,5 (1)	9,4675917, 9 + 68,5 (2)
9,7257697, 7 - 33,5 (3)	9,5960805, 9 + 49,0 (1)
9,6530304, 7 - 41,8 (2)	9,9231458, 5 + 13,7 (3)
<u>8,9868655, 5</u>	<u>8,9868182, 3</u>

$$0 = + 473,2 - 96,5 (1) - 110,3 (2) - 47,2 (3) \cdot 1$$

II. Eichberg-Rauenberg-Berlin-Spandau.

$$1 = \frac{\sin SRE \cdot \sin SBR \cdot \sin SEB}{\sin SER \cdot \sin SRB \cdot \sin SBE}$$

$SRE = 82^\circ 35' 11,84 + (5)$

$SER = 34^\circ 7' 21,88 - (2)$

$SBR = 78 29 48,92 + (3)$

$SRB = 68 26 6,00 - (5)$

$SEB = 26 43 53,70 - (2)$

$SBE = 56 54 34,71 + (3)$

$9,9963545,0 + 2,7 (5)$

$9,7489378,5 - 31,1 (2)$

$9,9911879,4 + 4,3 (3)$

$9,9684834,8 - 8,3 (5)$

$9,6530304,7 - 41,8 (2)$

$9,9231458,5 + 13,7 (3)$

$9,6405729,1$

$9,6405671,8$

$0 = + 57,3 - 10,7 (2) - 9,4 (3) + 11,0 (5) \cdot II$

III. Eichberg-Müggelsberg-Berlin-Spandau.

$$1 = \frac{\sin EBS \cdot \sin EMB \cdot \sin EMS}{\sin ESB \cdot \sin EBM \cdot \sin EMS}$$

$EBS = 56^\circ 54' 34,71 + (3)$

$ESB = 96^\circ 21' 32,49 + (2) - (3)$

$EMB = 55 42 51,18$

$EBM = 93 45 16,75$

$ESM = 79 24 44,32 + (2) - (4)$

$EMS = 43 19 30,48 + (4)$

$9,9231458,5 + 13,7 (3)$

$9,9973197,0 - 2,4 (2) + 2,4 (3)$

$9,9171052,0$

$9,9990668,6$

$9,9925423,8 + 3,9 (2) - 3,9 (4)$

$9,8364111,7 + 22,3 (4)$

$9,8327934,3$

$9,8327977,3$

$0 = - 43,0 + 6,3 (2) + 11,3 (3) - 26,2 (4) \cdot III$

Gleichungen zwischen den Verbesserungen und den Faktoren I, II, III.

$(1) = \frac{1}{3} \left\{ - 96,5 I \right.$

$(2) = \frac{1}{6} \left\{ - 110,3 I - 10,7 II + 6,3 III \right.$

$(3) = \frac{1}{4} \left\{ - 47,2 I - 9,4 II + 11,3 III \right.$

$(4) = \frac{1}{2} \left\{ \quad \quad \quad - 26,2 III \right.$

$(5) = \frac{1}{2} \left\{ \quad \quad \quad + 11,0 II \quad \quad \right.$

Die Gewichte sind der Anzahl der Beobachtungen proportional angenommen worden.

Endgleichungen.

$- 473,2 = + 5688,725 I + 307,622 II - 249,155 III$

$- 57,3 = + 307,622 I + 101,672 II - 37,790 III$

$+ 43,0 = - 249,155 I - 37,790 II + 381,758 III$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt die Faktoren und die Verbesserungen wie folgt:

VIII. §. 101. *Bestimmung einiger Objecte, welche*

I = - 0,0620	(1) = + 2,00
II = - 0,3625	(2) = + 1,82
III = + 0,0363	(3) = + 1,69
	(4) = - 0,48
	(5) = - 1,99

Werden diese Verbesserungen den beobachteten Richtungen hinzugefügt, so findet man die Log. der Entfernungen, von den Dreieckspunkten.

Spandau-Berlin	Log.	3,8510130, 0
Spandau-Eichberg . . .	-	4,1211389, 0
Spandau-Rauenberg . . .	-	3,8737167, 9
Spandau-Müggelsberg . .	-	4,2096069, 5
Spandau-Eichstädt . . .	-	3,9806868, 1

3. *Bestimmung des Thurmes von Mariendorf.*

Beobachtungen.

<i>Marienfelde.</i>			<i>Ziethen.</i>		
Rauenberg	0° 0' 0"		Marienfelde	0° 0' 0"	
1 Beob. Mariendorf	24 37 59,05 + (1)		Rauenberg	18 50 16,60	
C	49 49 9,36	1 Beob. Mariendorf	23 23 38,81 + (2)		
B	78 50 39,44	Müggelsberg	116 1 38,87		
Ziethen	135 7 56,05				

Müggelsberg.

Ziethen	0° 0' 0"	Marienfelde	0° 0' 0"
1 Beob. Mariendorf	28 26 42,59 + (3)	Rauenberg	71 57 50,48
Rauenberg	32 8 34,71	2 Beob. Mariendorf	82 57 35,33 + (4)
		C	83 3 58,40

C.

B	0° 0' 0"	<i>Rauenberg.</i>	
Marienfelde	67 54 31,52	Müggelsberg	0° 0' 0"
3 Beob. Mariendorf	179 48 36,62 + (5)	4 Beob. Mariendorf	32 21 7,74 + (6)
		B	47 30 20,65
		Ziethen	50 40 3,36
		Marienfelde	76 41 50,75

Bedingungsgleichung.

I. Mariendorf-C-B-Marienfelde.

$$1 = \frac{\sin M^e C M^f \cdot \sin M^e B C \cdot \sin M^e M^f B}{\sin M^e M^f C \cdot \sin M^e C B \cdot \sin M^e B M^f}$$

$M^e C M^f = 111^\circ 54' 5''10 + (5)$	$M^e M^f C = 42^\circ 54' 44''59 + (1) - (5)$
$M^e B C = 83 \quad 3 \quad 58,40$	$M^e C B = 67 \quad 54 \quad 31,52$
$M^e M^f B = 42 \quad 49 \quad 44,29 + (1) - (4)$	$M^e B M^f = 82 \quad 57 \quad 35,33 + (4)$
9,9674670, 2 - 8,4 (5)	9,8330700, 7 + 22,6 (1) - 22,6 (5)
9,9968120, 8	9,9668857, 9
9,8323889, 4 + 22,7 (1) - 22,7 (4)	9,9967131, 9 + 2,6 (4)
<u>9,7966680, 4</u>	<u>9,7966690, 5</u>
0 = - 10,1 + 0,1 (1) - 25,3 (4) + 14,2 (5) . I	

II. B-Mariendorf-Rauenberg-Marienfelde.

$$1 = \frac{\sin M^e M^f R \cdot \sin M^e B M^f \cdot \sin M^e R B}{\sin M^e R M^f \cdot \sin M^e M^f B \cdot \sin M^e B R}$$

$M^e M^f R = 111^\circ 1' 17''96 - (1) + (6)$	$M^e R M^f = 44^\circ 20' 43''01 - (6)$
$M^e B M^f = 82 \quad 57 \quad 35,33 + (4)$	$M^e M^f B = 42 \quad 49 \quad 44,29 + (1) - (4)$
$M^e R B = 29 \quad 11 \quad 30,10$	$M^e B R = 71 \quad 57 \quad 50,48$
9,9700886, 5 + 8,1 (1) - 8,1 (6)	9,8444651, 7 - 21,5 (6)
9,9967131, 9 + 2,6 (4)	9,8323889, 4 + 22,7 (1) - 22,7 (4)
9,6881822, 8	9,9781176, 3
<u>9,6549841, 2</u>	<u>9,6549717, 4</u>
0 = + 123,8 - 14,6 (1) + 25,3 (4) + 13,4 (6) . II	

III. Ziethen-Marienfelde-Rauenberg-Mariendorf.

$$1 = \frac{\sin M^e M^f R \cdot \sin M^e Z M^f \cdot \sin M^e R Z}{\sin M^e R M^f \cdot \sin M^e M^f Z \cdot \sin M^e Z R}$$

$M^e M^f R = 111^\circ 1' 17''96 - (1) + (6)$	$M^e R M^f = 44^\circ 20' 43''01 - (6)$
$M^e Z M^f = 23 \quad 23 \quad 38,81 + (2)$	$M^e M^f Z = 46 \quad 6 \quad 24,23 + (1) - (2)$
$M^e R Z = 26 \quad 1 \quad 47,39$	$M^e Z R = 18 \quad 50 \quad 16,60$
9,9700886, 5 + 8,1 (1) - 8,1 (6)	9,8444651, 7 - 21,5 (6)
9,5988491, 2 + 48,6 (2)	9,8577138, 9 + 20,3 (1) - 20,3 (2)
9,6423052, 5	9,5090580, 2
<u>9,2112430, 2</u>	<u>9,2112370, 8</u>
0 = + 59,4 - 12,2 (1) + 68,9 (2) + 13,4 (6) . III	

IV. Ziethen-Mariendorf-Rauenberg-Müggelsberg.

$$1 = \frac{\sin M^s M^f Z \cdot \sin M^s R M^f \cdot \sin M^s Z R}{\sin M^s Z M^f \cdot \sin M^s M^f R \cdot \sin M^s R Z}$$

$M^s M^f Z = 58^\circ 55' 17''63 + (2) - (3)$	$M^s Z M^f = 92^\circ 38' 0''06 - (2)$
$M^s R M^f = 32 \quad 21 \quad 7,74 + (6)$	$M^s M^f R = 143 \quad 57 \quad 0,20 + (3) - (6)$
$M^s Z R = 97 \quad 11 \quad 22,27$	$M^s R Z = 50 \quad 40 \quad 3,36$

$$9,9327077, 9 + 12,7 (2) - 12,7 (3)$$

$$9,7284524, 0 + 33,2 (6)$$

$$9,9965719, 1$$

$$\underline{9,6577321, 0}$$

$$9,9995410, 9 + 0,9 (2)$$

$$9,7697392, 2 - 28,9 (3) + 28,9 (6)$$

$$9,8884501, 8$$

$$\underline{9,6577304, 9}$$

$$0 = + 16,1 + 11,8 (2) + 16,2 (3) + 4,3 (6) \cdot IV$$

Gleichungen zwischen den Verbesserungen und den Faktoren I, II

$$\begin{aligned} (1) &= \left\{ \begin{array}{l} + 0,1 \text{ I} - 14,6 \text{ II} - 12,2 \text{ III} - - - \\ - - - - - + 68,9 \text{ III} + 11,8 \text{ IV} \\ - - - - - + 16,2 \text{ IV} \end{array} \right\} \\ (2) &= \left\{ \begin{array}{l} - - - - - \\ - - - - - \\ - - - - - \end{array} \right\} \\ (3) &= \left\{ \begin{array}{l} - - - - - \\ - - - - - \\ - - - - - \end{array} \right\} \\ (4) &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} - 25,3 \text{ I} + 25,3 \text{ II} - - - - - \\ - - - - - \\ - - - - - \end{array} \right\} \\ (5) &= \frac{1}{3} \left\{ \begin{array}{l} + 14,2 \text{ I} - - - - - \\ - - - - - \\ - - - - - \end{array} \right\} \\ (6) &= \frac{1}{3} \left\{ \begin{array}{l} - - - + 13,4 \text{ II} + 13,4 \text{ III} + 4,3 \text{ IV} \\ - - - - - \\ - - - - - \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Endgleichungen.

$$\begin{aligned} + 10,1 &= + 387,268 \text{ I} - 321,505 \text{ II} - 1,220 \text{ III} - - - \\ - 123,8 &= - 321,505 \text{ I} + 578,095 \text{ II} + 223,010 \text{ III} + 14,405 \text{ IV} \\ - 59,4 &= - 1,220 \text{ I} + 223,010 \text{ II} + 4940,940 \text{ III} + 827,425 \text{ IV} \\ - 16,1 &= - - - + 14,405 \text{ II} + 827,425 \text{ III} + 406,303 \text{ IV} \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt die Faktoren und die Verbesserungen wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{I} &= - 0,2881 & (1) &= + 5,32 \\ \text{II} &= - 0,3785 & (2) &= + 0,33 \\ \text{III} &= + 0,0142 & (3) &= - 0,89 \\ \text{IV} &= - 0,0552 & (4) &= - 1,14 \\ & & (5) &= - 1,36 \\ & & (6) &= - 1,28 \end{aligned}$$

Werden diese Verbesserungen den beobachteten Richtungen hinzugefügt, so findet man die Entfernungen von den Dreieckspunkten:

$$\begin{aligned} \text{Rauenberg-Mariendorf} & \dots \text{ Log. } 3,0062525, 0 \\ \text{Marienfelde-Mariendorf} & \dots - 3,2307625, 5 \\ \text{Ziethen-Mariendorf} & \dots - 3,6035058, 5 \\ \text{Müggelsberg-Mariendorf} & \dots - 3,9251543, 3 \\ \text{B-Mariendorf} & \dots - 3,1431579, 4 \\ \text{C-Mariendorf} & \dots - 2,8922325, 8 \\ \text{Berlin-Mariendorf} & \dots - 3,6703067, 9 \end{aligned}$$

Aus 2. und 3. folgt das Dreieck:

Mariendorf Thurm . .	56° 42' 3,40	Log.	3,8510130, 0
Berlin Marienthurm . .	89 50 29,14	—	3,9289006, 0
Spandau Thurm . . .	33 27 27,78	—	3,6703067, 9
	<u>180 0 0,32</u>		

4. Bestimmung des Monuments auf dem Kreuzberge.

Eichberg.

Berlin Gallerie . .	0° 0' 0"
6 Beob. Kreuzberg	2 25 36,7 + (1)
Rauenberg	7 23 3,7
Müggelsberg . . .	30 31 29,0

Berlin.

Müggelsberg . . .	0° 0' 0"
Rauenberg	72 11 37,5
4 Beob. Kreuzberg	77 30 39,8 + (2)
Eichberg	93 46 28,6

Rauenberg.

Eichberg	0° 0' 0"
8 Beob. Kreuzberg	145 48 10,3 + (3)
Berlin Gallerie . .	151 2 5,4
Müggelsberg . . .	233 30 15,8

Müggelsberg.

Eichberg	0° 0' 0"
Rauenberg	30 21 51,3
4 Beob. Kreuzberg	43 17 9,3 + (4)
Berlin Gallerie . .	55 42 3,8

Bedingungsgleichungen.

I. Berlin-Müggelsberg-Rauenberg-Kreuzberg.

$$1 = \frac{\sin MKB \cdot \sin MRK \cdot \sin MBR}{\sin MBK \cdot \sin MKR \cdot \sin MRB}$$

$MKB = 90^\circ 4' 25,9 - (2) + (4)$
$MRK = 87 42 5,5 - (3)$
$MBR = 72 11 37,5$

$MBK = 77^\circ 30' 39,8 + (2)$
$MKR = 79 22 36,7 + (3) - (4)$
$MRB = 82 28 10,4$

9,9999996, 4 + 0,1 (2) - 0,1 (4)
9,9996504, 4 - 0,8 (3)
9,9786807, 3
<u>9,9783308, 1</u>

9,9896001, 1 + 4,7 (2)
9,9924920, 8 + 4,0 (3) - 4,0 (4)
9,9962381, 1
<u>9,9783303, 0</u>

$$0 = + 5,1 - 4,6 (2) - 4,8 (3) + 3,9 (4) \cdot 1$$

II. Berlin-Müggelsberg-Eichberg-Kreuzberg.

$$1 = \frac{\sin MKB \cdot \sin MEK \cdot \sin MBE}{\sin MBK \cdot \sin MKE \cdot \sin MEB}$$

$MKB = 90^\circ 4' 25,9 - (2) + (4)$
$MEK = 28 5 52,3 - (1)$
$MBE = 93 46 28,6$

$MBK = 77^\circ 30' 39,8 + (2)$
$MKE = 108 36 59,6 + (1) - (4)$
$MEB = 30 31 29,0$

9,9999996, 4 + 0,1 (2) - 0,1 (4)	9,9896001, 1 + 4,7 (2)
9,6730014, 9 - 39,5 (1)	9,9766599, 8 - 7,1 (1) + 7,1 (4)
<u>9,9990569, 0</u>	<u>9,7057868, 3</u>
9,6720580, 3	9,6720469, 2

$$0 = + 111,1 - 32,4 (1) - 4,6 (2) - 7,2 (4) \cdot \text{II}$$

Gleichungen zwischen den Verbesserungen und den Faktoren I, II

$$\begin{aligned} (1) &= \frac{1}{6} \left\{ \text{---} - 32,4 \text{ II} \right\} \\ (2) &= \frac{1}{4} \left\{ - 4,6 \text{ I} - 4,6 \text{ II} \right\} \\ (3) &= \frac{1}{8} \left\{ - 4,8 \text{ I} \text{ ---} \right\} \\ (4) &= \frac{1}{4} \left\{ + 3,9 \text{ I} - 7,2 \text{ II} \right\} \end{aligned}$$

Endgleichungen.

$$\begin{aligned} - 5,1 &= + 11,9725 \text{ I} - 1,73 \text{ II} \\ - 111,1 &= - 1,73 \text{ I} + 193,21 \text{ II} \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt die Faktoren und die Verbesserungen wie folgt:

I = - 0,5097	(1) = + 3,1298
II = - 0,5796	(2) = + 1,2527
	(3) = + 0,3058
	(4) = + 0,5463

Werden diese Verbesserungen den beobachteten Richtungen hinzugefügt, so findet man die Entfernungen von den Dreieckspunkten:

Muggelsberg-Kreuzberg	Log.	3,9736026
Eichberg-Kreuzberg	-	4,1367111
Berlin-Kreuzberg	-	3,3164212
Rauenberg-Kreuzberg	-	3,3234648

Anmerkung. Der Standpunkt Berlin bezieht sich hier auf den steinernen Pfeiler auf der untern Gallerie des Marienthurms. (§. 103.)

