

§. 98. *Einführung der Grundlinie in das Dreiecksnetz.*

Die nach §. 10 in zwei Abtheilungen gemessene Grundlinie kann auf zweierlei Weise in das Dreiecksnetz eingeführt werden:

- 1) Wenn die Ausgleichung der Richtungen ohne Rücksicht auf die gemessenen Linien ausgeführt wird, und
- 2) Wenn dieser Ausgleichung noch die Bedingung hinzugefügt wird, daß die gemessenen Theile der Grundlinie AB und BC als absolut richtig angesehen werden.

Das erste Verfahren wird zur Berechnung des Dreiecksnetzes gewählt werden, es sollen aber vorher die Ergebnisse beider mit einander verglichen werden.

Einführung der Grundlinie ohne Rücksicht auf die beiden unabhängig von einander gemessenen Stücke derselben.

Werden den im Mittelpunkt der Grundlinie B (§. 77) beobachteten Richtungen die Verbesserungen, welche in §. 96 aufgeführt sind, hinzugefügt, so findet man den Winkel CBA (Taf. II.), den die beiden Theile der gemessenen Grundlinie AB und CB einschließen $= 179^{\circ} 59' 14,2495$. Nach §. 10 ist $AB = 588,509172$; $CB = 610,213860$. Aus diesen drei Stücken erhält man zunächst durch genaue Berechnung die ganze Grundlinie $AC = 1198,723025$; und dieser Werth weicht erst in der fünften Decimalstelle von der Summe der beiden gemessenen Stücke ab. Ferner findet man die beiden anliegenden Winkel $\angle BCA = 22,4611$ und $\angle BAC = 23,2894$, und daraus die entsprechenden Richtungen.

Die definitiven Richtungen in den Endpunkten der Grundlinie sind daher folgende:

In A .				In C .			
Marienfelde	0°	0'	— 0,1305	Buckow . .	0°	0'	— 0,0011
B	57	45	54,4986	A	58	55	46,3450
C	57	46	17,7880	B	58	56	8,8061
Buckow . .	122	20	48,9211	Marienfelde	126	50	40,3284
				Rauenberg .	223	58	55,5645

Aus diesen Richtungen, in Verbindung mit den verbesserten Richtungen in Buckow, erhält man das erste Dreieck wie folgt:

	Buckow	56° 29' 42",5336	56° 29' 42",529	cpl log Sin	0,0789177, 6	0,0789177, 6
I.	C	58 55 46,3461	58 55 46,342	log AC	3,0787188, 5	3,0787188, 5
	A	64 34 31,1331	64 34 31,129	log Sin C	9,9327442, 4	l. Sin A 9,9557600, 8
		180 0 0,0128	180 0 0,000	l. Bu A =	3,0903808, 5	l. Bu C = 3,1133966, 9
	ε	0,013				

Betrachtet man (Taf. II.) die Figur *ABC* *Buckow*, so findet man, daß mit Zuziehung des angeführten Dreiecks die beiden Theile *BC* und *AB* der Grundlinie durch die beiden nachfolgenden Dreiecke unabhängig von einander mit der Linie *AC* in Verbindung stehen.

	Buckow	27° 59' 21",8689
II.	B	93 4 29,3309
	C	58 56 8,8072
		180 0 0,0070
	ε	0,007

	Buckow	28° 30' 20",6648
III.	A	64 34 54,4225
	B	86 54 44,9186
		180 0 0,0059
	ε	0,006

Vermittelst dieser Dreiecke kann daher die Seite *AC* auf doppelte Weise bestimmt werden: einmal aus der Seite *BC* und den Dreiecken *Buckow BC* und *ABuckow C*; und dann aus der Seite *AB* und den Dreiecken *Buckow AB* und *CBuckow A*.

Im ersten Fall, oder aus dem nördlichen Theil der Grundlinie *BC*, erhält man $\text{Log } AC = 3,0787202, 9 \dots 1198,7270$. Der Unterschied mit dem vorhin direct gefundenen Werth beträgt $+ 0,003975$ oder $\frac{1}{302000}$ der Länge.

Im zweiten Fall, oder aus dem südlichen Theil der Grundlinie *AB*, erhält man $\text{Log } AC = 3,0787173, 5 \dots 1198,7189$. Der Unterschied beträgt $- 0,004125$ oder $\frac{1}{291000}$ der Länge.

Den ersten Fehler würde man begangen haben, wenn man *BC* allein, und den zweiten, wenn man *AB* allein gemessen hätte. Dafs beide Fehler einander nahe gleich, aber entgegengesetzt sind, ist durch die Figur und die Abhängigkeit, in der sie zu einander stehen, bedingt; denn rechnet man z. B. von *BC* nach *AB*, so findet man den Quotienten $\frac{AB}{BC}$ gleich einer Sinusfunction. Ist die in dieser Gleichung enthaltene Bedingung vollständig erfüllt, so verschwinden die obigen Unterschiede gänzlich; ist sie aber, wie es oben der Fall ist, nicht erfüllt, und der eine Fehler ist bekannt, so läßt sich der andere durch Rechnung finden.

Es bleibt noch zu untersuchen, in wiefern die obigen Unterschiede sich aus dem mittleren Fehler der Winkelmessungen erklären lassen.

Die logarithmische Differenz mit dem direct gefundenen AC beträgt im ersten Fall in den letzten Stellen $+ 14,4$; im zweiten Fall $- 15,0$. Der mittlere Fehler der Winkelmessung kann nach §. 97 gleich $\frac{1}{3}$ Secunde angenommen werden. In dem Dreieck \mathcal{N}° II. ist für den Winkel in Buckow die logarithmische Differenz des Sinus für $1'' = 39,6$, also für $\frac{1}{3}$ Secunde $= 13,2$. In dem Dreieck \mathcal{N}° III. $= 38,8$, also für $\frac{1}{3}$ Secunde $= 12,9$. Da nun das Geschlossensein der Figur verlangt, daß wenn ein Winkel um $\frac{1}{3}$ Secunde zu groß ist, der andere um eben so viel zu klein sein muß, so kann der erwähnte Unterschied, unter der Voraussetzung, daß eine Richtung um $\frac{1}{3}$ Secunde fehlerhaft gemessen wurde, ziemlich genügend erklärt werden. Zu bemerken ist noch, daß die obigen Winkel sehr spitz sind, und daß bei günstig geformten Dreiecken der Einfluß eines solchen Winkelfehlers auf die Seiten nur etwa den dritten Theil der logarithmischen Unterschiede betragen haben würde. Dieser Vortheil kömmt daher der Operation zu Gute, wenn man anstatt der einzelnen Theile die ganze gemessene Grundlinie AC einführt.

Einführung der Grundlinie unter der Bedingung, daß die beiden unabhängig von einander gemessenen Theile derselben als absolut richtig angesehen werden.

Die unter diesem Gesichtspunkt zu erfüllende Bedingung ist:

$$1 = \frac{AB \cdot \sin BB^u A \cdot \sin BCB^u}{BC \cdot \sin BAB^u \cdot \sin BB^u C}$$

Hätte man diese Bedingung als 87ste denen in §. 89 hinzugefügt und dann dieselben aufgelöst, so würde man die Verbesserungen der Winkel so gefunden haben, daß die Berechnungen von AC aus AB und aus BC mit der directen Messung von AC eine völlige Uebereinstimmung gegeben hätten. Es hätte sich alsdann aber nicht beurtheilen lassen, welche Unterschiede bei dem ersten Verfahren, wo nur die Winkelbedingungen allein erfüllt wurden, zum Vorschein gekommen wären, und ob diese Unterschiede durch den mittleren Fehler der Winkelmessung befriedigend erklärt werden können. Diese Gründe, so wie die Absicht, die Längen- und Winkelmessungen von einander getrennt zu halten, bestimmten mich bei der Einführung der Grundlinie das erste Verfahren in Anwendung zu bringen. Um indessen übersehen zu können, welchen Einfluß das zweite Verfahren auf die Berechnung der Dreiecksseiten erlangt haben möchte, wurde die Figur $ABuckowCMarienfelde$ mit Hinzufügung der obigen Bedingung für sich ausgeglichen. Diese Rechnung hat, anstatt der in §. 96 aufgeführten Verbesserungen, die folgenden ergeben:

(116) = + 0,3687	(127) = - 0,8297	(135) = + 0,3993
(117) = - 0,0491	(128) = - 0,7330	(137) = + 0,2568
(118) = + 0,6037	(129) = - 0,4085	(138) = - 0,2459
(119) = + 0,9284	(132) = - 0,3731	(140) = + 0,3449
(125) = - 0,3687	(133) = - 0,0066	(141) = + 0,2766

Werden diese Verbesserungen eingeführt, so findet man das erste Dreieck, von dem dann die Berechnungen der Seiten, ganz wie bei dem ersten Verfahren ausgehen, wie folgt:

Buckow	56 29 42,5082	56 29 42,504	epl log Sin 0,0789177, 9	0,0789177, 9
A	64 34 31,2373	64 34 31,233	log AC 3,0787188, 5	3,0787188, 5
C	58 55 46,2674	58 55 46,263	log Sin A 9,9557601, 8 l. Sin C 9,9327441, 4	
	180 0 0,0129	180 0 0,000	l. Bu C = 3,1133968, 2 l. Bu A = 3,0903807, 8	

Oben wurden die Logarithmen dieser	
Seiten gefunden	3,1133966, 9 3,0903808, 5
Differenz	+ 0,0000001, 3 - 0,0000000, 7

Diese Uebereinstimmung liefert den Beweis für die Sicherheit der Operationen und gewährt die Ueberzeugung, daß durch dies letztere Verfahren bei Einführung der Grundlinie durchaus keine erhebliche Veränderung der Entfernungen der Dreieckspunkte unter einander entstanden wäre.

Es wird daher das erste Verfahren zur Berechnung der Dreiecksseiten beibehalten und die Resultate in den folgenden §§. aufgeführt werden.

Grundlinie des ganzen Dreiecksnetzes ist die Linie

$$AC = 1198,723025 \mid \text{Log. } 3,0787188, 5 \mid$$

Bemerkung. Ob der Fehler, welcher sich bei der Vergleichung beider Theile der Grundlinie durch Rechnung gezeigt hat, ganz allein der Winkelmessung zuzuschreiben ist, oder ob eine durch die Einwirkung der Sonnenstrahlen herbeigeführte Veränderlichkeit des 73 Fufs hohen Standpunktes (ähnlich der, welche auf dem Leuchtturm bei Memel, Gradmessung Seite 242, bemerkt worden ist) mit eingewirkt hat, kann nicht entschieden werden, da der Oertlichkeit wegen keine directen Beobachtungen angestellt werden konnten, um sich einer solchen Bewegung zu vergewissern.

Während der Beobachtungen in Buckow war beständiger Sonnenschein, und die Temperatur erreichte täglich eine Höhe von 24 bis 26° R. — Nur die Süd- und Westseite des steinernen Thurmes sind den Sonnenstrahlen ausgesetzt; die Ostseite ist durch den Anbau der Kirche geschützt, und man kann annehmen, daß der Temperaturunterschied zwischen dieser und den von der Sonne beschienenen Seiten 14 bis 16° betragen haben mag.

In Marienfelde ist die Oertlichkeit dieselbe wie in Buckow, nur daß zur Zeit der Beobachtungen häufige Gewitter den Sonnenschein vielfach unterbrochen und überhaupt die Temperatur etwas herabgedrückt hatten.

Außerdem ist noch zu bemerken, daß die Tafel in Buckow des Nachmittages der Sonne zu-, die in Marienfelde der Sonne abgekehrt war, wodurch die erste volles Licht erhielt, während die andere sich im Schatten befand.

Wenn auch ein Einfluß der Sonnenstrahlen hier nicht direct nachgewiesen werden kann, so bin ich doch der Meinung, daß das Resultat noch günstiger ausgefallen sein würde, wenn man die Winkelmessungen an der Grundlinie, wo nach Signaltafeln beobachtet wurde, hätte bei bedecktem Himmel und zu einer Zeit anstellen können, wo keine zitternde Bewegung der Objecte stattfindet.

Schließlich will ich noch das Ergebniß anführen, welches die beobachteten Richtungen vor der Ausgleichung des Dreiecksnetzes gegeben haben.

Rechnet man mit der Seite *AB* (§. 10) und den Dreiecken (§. 81 LXXXV und LXXXI) *BuckowAB* und *CBBuckow*, indem man $\frac{1}{3}$ des Ueberschusses der drei Winkel eines jeden Dreiecks über 180° von jedem Winkel abzieht, die Linie *CB*, so findet man dieselbe = 610, ^r20844

Rechnet man dieselbe Linie ebenfalls mit *AB* aus den Dreiecken §. 81 LXXXIII und LXXX, so findet man *CB* = 610, 21354
 Gemessen wurde dieselbe §. 10 = 610, 21386