## §. 80. Formation der Bedingungsgleichungen.

Da die Richtungen auf den einzelnen Stationen bereits nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen sind, so können hier keine anderen Bedingungen vorkommen, als solche, die aus der Verbindung der auf verschiedenen Stationen beobachteten Richtungen zu Dreiecken, Vierecken u. s. w. entstehen. Solcher Bedingungen giebt es zweierlei: die ersten bestehen darin, daſs die Summe der Winkel eines jeden Dreiecks $= 180^0 + \varepsilon$ sein muſs, wo $\varepsilon$ den sphärischen Exceſs bedeutet; die zweiten fordern, daſs alle beobachteten Richtungen nach einem Punkt, auch wirklich genau in diesem Punkte zusammentreffen. Die aus den ersten Bedingungen hervorgehenden Gleichungen werden Winkelgleichungen, die aus den zweiten Seitengleichungen genannt.

Um die Bedingungsgleichungen vollständig zu finden und auch keine doppelt zu erhalten, muſs man die Entstehung des Dreiecksnetzes aus einer seiner Seiten und den sich an einander reihenden beobachteten Richtungen verfolgen.

Ist eine Dreiecksseite $AB$ gegeben, so sind zur Bestimmung irgend eines Punktes $N$ zwei Richtungen erforderlich. Liefern daher die Beobachtungen mehr als zwei Data zu seiner Bestimmung, so ist der Ueberschuſs über zwei die Zahl der Bedingungsgleichungen, welche die Bestimmung des Punktes $N$ ergiebt. Sind daher im Punkte $N$ selbst die Richtungen nach $A$ und $B$ gemessen, die wegen des willkührlich bleibenden Anfangspunktes nur einen Winkel geben, also auch nur für ein Datum gelten können, so sind drei Data vorhanden, die folglich eine Bedingungsgleichung und zwar eine Winkelgleichung geben. Ist der Punkt $N$ von drei schon bestimmten Punkten $A$, $B$ und $C$ beobachtet, so sind drei Richtungen dahin vorhanden, und sind diese drei Punkte auch in $N$ beobachtet, so bilden diese Beobachtungen in $N$ zwei Winkel: es sind demnach 5 Data, also 3 Bedingungsgleichungen, und zwar zwei Winkelgleichungen und eine Seitengleichung vorhanden u. s. w. Es seien z. B. (Taf. III. Fig. 1.) folgende Richtungen beobachtet:

| In $A$ | In $B$ |
|---|---|
| die Richtung $D = o$ | die Richtung $A = o$ |
| - - $C = e + (5)$ | - - $D = c + (3)$ |
| - - $B = f + (6)$ | - - $C = d + (4)$ |

| In $C$ | In $D$ |
|---|---|
| die Richtung $B = o$ | die Richtung $C = o$ |
| - - $A = a + (1)$ | - - $B = g + (7)$ |
| - - $D = b + (2)$ | - - $A = h + (8)$ |

wo die Ausdrücke (1), (2), (3) .... die Verbesserungen bezeichnen, welche die Figur mathematisch möglich machen.

Geht man jetzt bei der Formation der Bedingungsgleichungen von der Seite $AB$ aus, so sind die Richtungen $f$ und $c$ nothwendig, um den Punkt $D$ zu bestimmen; da aber in $D$ auch die Richtungen $g$ und $h$ gemessen sind, die den Winkel $h - g$ geben, so ist ein überschüssiges Datum, und zwar eine Winkelbedingung vorhanden. Stellt man daher die drei Winkel des Dreiecks zusammen, so erhält man:

$$o = f + (6) + c + (3) + h + (8) - g - (7) - 180 - \varepsilon$$

und setzt man die Summe der drei Winkel $f + c + (h - g) = S$ so ist:

$$o = (3) + (6) - (7) + (8) + S - 180 - \varepsilon\} \text{ I.}$$

die erste Bedingungsgleichung.

Geht man nun zu dem folgenden Punkt $C$ über, so ist derselbe von den drei bereits bestimmten Punkten $B$, $A$ und $D$ beobachtet worden, und in $C$ sind die drei Richtungen nach $B$, $A$ und $D$, oder die beiden Winkel $a$ und $(b - a)$ gemessen: es sind also fünf Data, und daher $5 - 2$ Bedingungsgleichungen vorhanden, und zwar zwei Winkelgleichungen und eine Seitengleichung. Die Winkelgleichungen sind:

$$o = (2) + (7) + (4) - (3) + S - 180 - \varepsilon\} \text{ II.}$$

$$o = (1) + (4) + (6) - (5) + S - 180 - \varepsilon\} \text{ III.}$$

Um die Seitengleichung zu finden, rechnet man von einer Seite bis wieder zu derselben zurück, z. B.

$$\text{Sin } AB : \text{Sin } AD = \text{Sin }\{h + (8) - g - (7)\} : \text{Sin }(c + (3))$$

$$\text{Sin } AD : \text{Sin } AC = \text{Sin }\{b + (2) - a - (1)\} : \text{Sin }(h + (8))$$

$$\text{Sin } AC : \text{Sin } AB = \text{Sin }(d + (4)) : \text{Sin }(a + (1))$$

---

$$\text{Sin}(c+(3)) \cdot \text{Sin}(h+(8)) \cdot \text{Sin}(a+(1)) = \text{Sin}\{(h-g)+(8)-(7)\} \cdot \text{Sin}\{(b-a)+(2)-(1)\} \cdot \text{Sin}(d+(4)) \ldots. \alpha$$

Nimmt man die Logarithmen dieser Sinus, so findet man:

$$\text{Log Sin } c + \Delta^3(3) + \text{Log Sin } h + \Delta^8(8) + \text{Log Sin } a + \Delta^1(1) = \text{Log Sin }(h-g) + \Delta^7\{(8)-(7)\}$$
$$+ \text{Log Sin }(b-a) + \Delta^2\{(2)-(1)\} + \text{Log Sin } d + \Delta^4(4)$$

wo unter $\Delta^1$, $\Delta^2$, $\Delta^3$ .... die jedem Sinus zugehörige logarithmische Differenz für 1″ zu verstehen ist. Bringt man diese Gleichung auf $o$, so wird die Bedingung der Seitengleichung

$$o = \log\left\{\frac{\operatorname{Sin}(h-g)\,.\operatorname{Sin}(b-a)\,.\operatorname{Sin} d}{\operatorname{Sin} c\,.\operatorname{Sin} h\,.\operatorname{Sin} a}\right\} - (\Delta^1+\Delta^2)(1)+\Delta^2(2)-\Delta^3(3)+\Delta^4(4)+(\Delta^7-\Delta^8)(8)-\Delta^7(7)\Big\}\ \text{IV.}$$

Bei Anwendung dieses Verfahrens erhält man aber leicht die Coeffizienten der Endgleichungen in grofsen Zahlen, weil die logarithmischen Differenzen der Sinusse kleiner Winkel an sich schon grofse Zahlen sind. Dieser Uebelstand wird vermieden, wenn man oben in Gleichung $\alpha$ $\operatorname{Sin}(c+(3)) = \operatorname{Sin} c + \operatorname{Cos} c\,(3)$; $\operatorname{Sin}(h+(8)) = \operatorname{Sin} h + \operatorname{Cos} h\,(8)$ u. s. w. einführt (weil $\operatorname{Sin}(x+dx) = \operatorname{Sin} x + \operatorname{Cos} x\,.\,dx$). Man erhält alsdann, wenn $s = \operatorname{Sin} c\,.\operatorname{Sin} h\,.\operatorname{Sin} a$, und $p = \operatorname{Sin}(h-g)\,.\operatorname{Sin}(b-a)\,.\operatorname{Sin} d$ gesetzt wird:

$$s+s\operatorname{Cot}c(3)+s\operatorname{Cot}h(8)+s\operatorname{Cot}a(1)=p+p\operatorname{Cot}(h-g)((8)-(7))+p\operatorname{Cot}(b-a)((2)-(1))+p\operatorname{Cot}d(4);$$

dividirt man diese Gleichung durch $s$, und nimmt den Quotienten $\frac{p}{s}$, da wo derselbe ein Faktor der Verbesserungen ist, $= 1$, welchen Werth derselbe vollständig erlangen mufs, sobald die Bedingung IV. erfüllt ist, so findet man die Bedingungsgleichung wie folgt:

$$o = \frac{1}{\operatorname{Sin}1''}\left\{\frac{\operatorname{Sin}(h-g)\,.\operatorname{Sin}(b-a)\,.\operatorname{Sin} d}{\operatorname{Sin} c\,.\operatorname{Sin} h\,.\operatorname{Sin} a}-1\right\}-\left\{\operatorname{Cot}a+\operatorname{Cot}(b-a)\right\}(1)+\operatorname{Cot}(b-a)(2)-\operatorname{Cot}c(3)+\operatorname{Cot}d(4)$$
$$+\left\{\operatorname{Cot}(h-g)-\operatorname{Cot}h\right\}(8)-\operatorname{Cot}(h-g)(7)\Big\}\ \text{IV.}$$

Nach dieser Vorschrift sind die sämmtlichen Bedingungen der Seitengleichungen im folgenden §. berechnet worden.

Führt man zum Auffinden der Bedingungen eine allgemeine Bezeichnung ein, so ergiebt sich die Regel: Wenn ein Punkt $X$ von $m$ bereits bestimmten Punkten beobachtet wurde, so sind $m-2$ Seitengleichungen vorhanden. Sind in dem Punkt $X$ selbst zwischen einigen der festen Punkte $n$ Winkel gemessen, so kommen eben so viele Winkelgleichungen hinzu. Sind in $X$ aber alle $m$ Punkte, also $m-1$ Winkel beobachtet, so kommen auch $m-1$ Winkelgleichungen hinzu. In diesem Fall erhält man also im Ganzen $2m-3$ Bedingungsgleichungen. Sind in dem Punkt $X$ gar keine Winkel gemessen worden, so fallen auch alle Winkelgleichungen fort, und man erhält nur $m-2$ Seitengleichungen.

Die Endgleichungen zwischen den unbekannten Factoren I, II, III .... welche man nach dem vorigen §. aus den Bedingungsgleichungen erhält, haben, wie alle nach der Methode der kleinsten Quadrate formirten Gleichungen, die Eigenthümlichkeit, dafs sämmtliche Coeffizienten der Unbekannten, mit Ausnahme der quadratischen, die man deswegen durch Unterstreichen leicht kenntlich machen kann, doppelt vorkommen, und zwar so, dafs alle Coeffizienten, die in der horizontalen Reihe rechts neben dem quadratischen Factor stehen, sich in der verticalen Reihe unter demselben wiederholen; z. B.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} \\
o = & -\,1{,}395 & +\,\underline{0{,}18568} & -\,0{,}08235 & -\,0{,}02250 & +\,0{,}00575 \\
o = & +\,0{,}586 & -\,0{,}08235 & +\,\underline{0{,}19477} & -\,0{,}05753 & -\,0{,}00017 \\
o = & +\,0{,}506 & -\,0{,}02250 & -\,0{,}05753 & +\,\underline{0{,}17041} & -\,0{,}03420 \\
o = & +\,1{,}336 & +\,0{,}00575 & -\,0{,}00017 & -\,0{,}03420 & +\,\underline{0{,}14346}
\end{array}$$

Man kann daher diese Gleichungen auch so schreiben:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} \\
o = & -\,1{,}395 & +\,\underline{0{,}18568} & -\,0{,}08235 & -\,0{,}02250 & +\,0{,}00575 \\
o = & +\,0{,}586 & \ldots\ldots & +\,\underline{0{,}19477} & -\,0{,}05753 & -\,0{,}00017 \\
o = & +\,0{,}506 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & +\,\underline{0{,}17041} & -\,0{,}03420 \\
o = & +\,1{,}336 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & +\,\underline{0{,}14346}
\end{array}$$

oder:

$$\begin{array}{l}
o = -\,1{,}395 + \underline{0{,}18568}\;\mathrm{I} - 0{,}08235\;\mathrm{II} - 0{,}02250\;\mathrm{III} + 0{,}00575\;\mathrm{IV} \\
o = +\,0{,}586 + \underline{0{,}19477}\;\mathrm{II} - 0{,}05753\;\mathrm{III} - 0{,}00017\;\mathrm{IV} \\
o = +\,0{,}506 + \underline{0{,}17041}\;\mathrm{III} - 0{,}03420\;\mathrm{IV} \\
o = +\,1{,}336 + \underline{0{,}14346}\;\mathrm{IV}
\end{array}$$

Diese beiden Darstellungsweisen der Gleichungen enthalten alles, was zur Auflösung derselben nach §. 18. erforderlich ist, und es lassen sich aus denselben, wenn es wünschenswerth erscheinen sollte, die vollständigen Gleichungen sehr leicht herstellen.

Von diesen Abkürzungen wird in der Folge, je nachdem es der Raumersparniſs wegen zweckmäſsig erscheint, Gebrauch gemacht werden.