§. 19. Ausgleichung der Winkel unter der Bedingung, dafs gewisse Richtungen unverändert bleiben.

Wenn eine Function φ von mehreren unabhängigen Veränderlichen x, y, z .... ein Maximum oder Minimum werden soll, so darf sie sich nur um Gröfsen der zweiten Ordnung verändern, wenn sich x, y, z .... um Gröfsen der ersten Ordnung ändern. Läfst man daher x, y, z .... in $x+h$, $y+i$, $z+k$ .... übergehen, so wird die Veränderung der Function φ dadurch:

$$\frac{d\varphi}{dx}h + \frac{d\varphi}{dy}i + \frac{d\varphi}{dz}k + \ldots \text{ plus Glieder höherer Ordnungen.}$$

Die Bedingung des Maximums oder Minimums erfordert also, dafs die Glieder der ersten Ordnung verschwinden, welche Werthe der ersten Ordnung man auch h, i, k .... beilegen möge. Es mufs also sein

$$0 = \frac{d\varphi}{dx}h + \frac{d\varphi}{dy}i + \frac{d\varphi}{dz}k + \ldots$$

und zwar so, dafs jedes Glied in diesem Ausdruck für sich gleich Null ist. Hieraus ergeben sich also eben so viele Gleichungen, als Differentialquotienten oder Unbekannte vorhanden sind.

Anders verhält es sich aber, wenn die Gröfsen x, y, z ...., oder einige davon, durch Bedingungen von einander abhängig sind. Eine solche Bedingung sei z. B. die Gleichung $u = 0$, wo u eine Function von einer oder mehreren der Unbekannten x, y, z .... sein kann. Es mag hier u eine Function von x und y bedeuten, so erhält man aus derselben für die oben angeführten Veränderungen dieser Unbekannten:

$$0 = \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}i + \ldots$$

Es sollen nun aber diese und die obige Bedingung gleichzeitig erfüllt werden, man kann daher beide vereinigen, wenn man letztere, als eine Gleichung die gleich Null ist, vorher mit einem willkührlichen Factor multiplicirt. Auf diese Weise erhält man den Ausdruck:

$$\frac{d\varphi}{dx}h + \frac{d\varphi}{dy}i + \frac{d\varphi}{dz}k + \ldots + p\left\{\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}i + \ldots\right\}$$

derselbe mufs aber ebenfalls, und zwar für jeden Werth von p, verschwinden. Dies wird der Fall sein, wenn man in dem obigen Ausdruck die Summe der Coeffizienten von $h, i, k \ldots$ gleich Null setzt. Man erhält alsdann:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{d\varphi}{dx} + p\,\frac{du}{dx} \\ 0 &= \frac{d\varphi}{dy} + p\,\frac{du}{dy} \\ 0 &= \frac{d\varphi}{dz} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \; 1.$$

Vermittelst dieser Gleichungen kann man x, y und z durch p ausdrücken; setzt man daher diese Ausdrücke für x und y in die Gleichung $u = 0$, so wird p bestimmt, und dadurch auch $x, y, z \ldots$

Ist die Zahl der unabhängigen Unbekannten gröfser als die der abhängigen, so kann man die Letzteren eliminiren und sie durch die Unabhängigen und p ausdrücken; man erhält dadurch so viel Gleichungen als unabhängige Unbekannte vorhanden sind, in denen aber aufserdem noch so viel willkührliche Factoren $p \ldots$ vorkommen, als Bedingungsgleichungen $u \ldots$ gegeben waren. Setzt man nun die gefundenen Ausdrücke der abhängigen Unbekannten in die Bedingungsgleichungen $u \ldots$, so kann man sämmtliche Factoren $p \ldots$ eliminiren, und es bleiben dann so viel Gleichungen als unabhängige Unbekannte aufzulösen übrig, deren Werthe die Factoren $p \ldots$ und die abhängigen Unbekannten $x, y \ldots$ bestimmen.

Anwendung dieser Theorie.

Es seien die Gleichungen gegeben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= 0 = an + aax + aby + acz + \ldots \\ \frac{d\varphi}{dy} &= 0 = bn + abx + bby + bcz + \ldots \\ \frac{d\varphi}{dz} &= 0 = cn + acx + bcy + ccz + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \; 2.$$

und es finde zwischen x und y die Bedingung

$$u = 0 = q + \alpha x + \beta y + \ldots \text{ statt.}$$

Aus der Gleichung u folgt: $\frac{du}{dx} = \alpha$; $\frac{du}{dy} = \beta$. Setzt man diese Werthe nach Gleichung 1. in die Gleichungen 2., so gehen dieselben über in:

$$\begin{aligned} 0 &= an + aax + aby + acz + \ldots + \alpha p \\ 0 &= bn + abx + bby + bcz + \ldots + \beta p \\ 0 &= cn + acx + bcy + ccz + \ldots \end{aligned}$$

Wird hieraus zunächst x eliminirt, so folgt:

$$0 = bn{\cdot}1 + bb{\cdot}1y + bc{\cdot}1z + \ldots\ldots + \left(\beta - \alpha\frac{ab}{aa}\right)p$$

$$0 = cn{\cdot}1 + bc{\cdot}1y + cc{\cdot}1z + \ldots\ldots - \alpha\frac{ac}{aa}p$$

$$\vdots$$

Wird auch y eliminirt, so erhält man:

$$0 = cn{\cdot}2 + cc{\cdot}2z + \ldots. - \left\{\alpha\frac{ac}{aa} + \left(\beta - \alpha\frac{ab}{aa}\right)\frac{bc.1}{bb.1}\right\}p \;\ldots\ldots\; 3.$$

und hieraus folgen nun die Werthe der Unbekannten, wenn man den Werth in der Klammer $= (s)$ setzt:

$$\left.\begin{aligned} z &= -\frac{cn.2}{cc.2} - \ldots. + \frac{(s)}{cc.2}p \\ &\vdots \\ y &= -\frac{bn.1}{bb.1} - \frac{bc.1}{bb.1}z - \frac{1}{bb.1}\left(\beta - \alpha\frac{ab}{aa}\right)p \\ x &= -\frac{an}{aa} - \frac{ab}{aa}y - \frac{ac}{aa}z - \frac{\alpha}{aa}p \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\; 4.$$

Setzt man diese Werthe von x und y, durch z und p ausgedrückt, in die Gleichung $u = 0$, so kommen darin nur p und die unabhängigen Unbekannten $z\ldots.$ vor. Eliminirt man p, und setzt seinen Werth in die Gleichungen 3., so erhält man eben so viel Gleichungen als unabhängige Unbekannten. Löst man dieselben auf, so findet man endlich durch die Substitution ihrer Werthe in 4. die abhängigen Unbekannten x, y und den willkührlichen Factor p. Die Zahl der Gleichungen 3. hängt von der Zahl der unabhängigen Unbekannten $z\ldots.$ ab; die Zahl der willkührlichen Factoren p, p' .... in denselben ist so grofs, als die Zahl der Bedingungsgleichungen u, u' ....; sie können daher sämmtlich eliminirt, und dann die unabhängigen Unbekannten bestimmt werden u. s. w.

Beispiel.

Bei der Fortsetzung der Gradmessung 1837 wurden auf der Station Trunz die Richtungen Galtgarben und Wildenhof, des sicheren Anschlusses wegen, von neuem beobachtet. Nach der Ausgleichung der Beobachtungen zeigte sich eine kleine Verschiedenheit mit den in der Gradmessung angegebenen Richtungen, und da man letztere nicht ändern wollte, so kam es darauf an, die Trunzer Beobachtungen unter der Bedingung auszugleichen, dafs der Winkel *Galtgarben-Trunz-Wildenhof* so bliebe, wie er in der Gradmessung gefunden worden war.

Die Gleichungen in Trunz waren:

$$\frac{d\varphi}{dA} = 0 = +30{,}5000\,A - 15{,}6667\,B - 4{,}1667\,C - 3{,}3333\,D \quad \text{———} \quad \text{———} \quad \text{———}$$

$$\frac{d\varphi}{dB} = 0 = -15{,}6667\,A + 60{,}3667\,B - 13{,}1667\,C - 8{,}0000\,D - 4{,}8000\,E - 0{,}8000\,F - 3{,}1333\,G$$

$$\frac{d\varphi}{dC} = 0 = -4{,}1667\,A - 13{,}1667\,B + 36{,}1667\,C - 6{,}3333\,D \quad \text{———} \quad \text{———} \quad \text{———}$$

$$\frac{d\varphi}{dD} = 0 = -3{,}3333\,A - 8{,}0000\,B - 6{,}3333\,C + 36{,}5000\,D \quad \text{———} \quad \text{———} \quad \text{———}$$

$$\frac{d\varphi}{dE} = 0 = - \text{———} - 4{,}8000\,B \quad \text{———} \quad \text{———} + 22{,}0333\,E - 6{,}9667\,F - 6{,}9667\,G$$

$$\frac{d\varphi}{dF} - 0 = - \text{———} - 0{,}8000\,B \quad \text{———} \quad \text{———} - 6{,}9667\,E + 19{,}3667\,F - 6{,}6333\,G$$

$$\frac{d\varphi}{dG} = 0 = - \text{———} - 3{,}1333\,B \quad \text{———} \quad \text{———} - 6{,}9667\,E - 6{,}6333\,F + 24{,}0333\,G$$

Die Buchstaben bezeichnen der Reihe nach die Richtungen: Buschkau, Dohnasberg, Stegen, Galtgarben, Wildenhof, Sommerfeld und Talpitten. Die Richtung Brosowken ist Null.

Die Bedingungsgleichung, damit der Winkel Galtgarben-Trunz-Wildenhof ungeändert bleibt, ist:

$$u = 0 = -0{,}613 + E - D$$

Hieraus folgt: $\frac{du}{dE} = 1$; $\quad \frac{du}{dD} = -1$.

Man erhält daher nach den Gleichungen 1.:

$$0 = \frac{d\varphi}{dD} - p$$

$$0 = \frac{d\varphi}{dE} + p$$

d. h. man fügt oben der 4. Gl. $-p$ und der 5. $+p$ hinzu; alle übrigen bleiben unverändert. Eliminirt man nun, was hier gleich direct durch bloſse Division mit ihrem Coeffizienten geschehen kann, D und E, und drückt dieselben durch die übrigen Unbekannten und p aus, so erhält man:

$$D = +0{,}09132\,A + 0{,}2192\,B + 0{,}1735\,C + 0{,}0274\,p$$

$$E = +0{,}21785\,B + 0{,}3162\,F + 0{,}3162\,G + 0{,}0454\,p$$

Setzt man diese Werthe in die obigen Gleichungen, wo der 4. und 5. bereits $-p$ und $+p$ hinzugefügt gedacht werden muſs, so verschwinden D und E aus diesen Gleichungen, und man erhält 5 neue Gleichungen mit den 6 Unbekannten A, B, C, D, F, G und p.

Substituirt man nun die Werthe von D und E in die Bedingungsgleichung u, so findet man daraus:

$$p = -8{,}4223 - 1{,}2545\,A - 0{,}01827\,B - 2{,}3841\,C + 4{,}3445\,F + 4{,}3445\,G$$

und setzt man diesen Werth in die zuletzt erhaltenen 5 Gleichungen, so verschwindet darin p, und man findet folgende 5 Endgleichungen zwischen den 5 unabhängigen Unbekannten:

$$\begin{aligned}
+6{,}9439 &= +30{,}3102\,A - 16{,}3956\,B - 4{,}5274\,C - 0{,}3968\,F - 0{,}3968\,G\\
+0{,}1011 &= -16{,}3956\,A + 57{,}5676\,B - 14{,}5516\,C - 2{,}3232\,F - 4{,}6565\,G\\
+13{,}1935 &= -4{,}5274\,A - 14{,}5516\,B + 35{,}4815\,C - 0{,}7538\,F - 0{,}7538\,G\\
-24{,}0413 &= -0{,}3968\,A - 2{,}3232\,B - 0{,}7538\,C + 18{,}5376\,F - 7{,}4624\,G\\
-24{,}0413 &= -0{,}3968\,A - 4{,}6565\,B - 0{,}7538\,C - 7{,}4623\,F + 23{,}2042\,G
\end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt:

$A = -0{,}01904$; $B = +0{,}01042$; $C = -0{,}03077$; $F = +0{,}21803$; $G = +0{,}18565$;

Durch Substitution dieser Werthe in die vorigen Ausdrücke findet man aber auch: $p = -6{,}5717$; $D = -0{,}185$; $E = +0{,}428$.

Werden diese Verbesserungen den betreffenden Richtungen hinzugefügt, so erfüllen sie die obige Bedingung.

Bezeichnet man in den letzten 5 Gleichungen die Verbesserungen, welche auf die Ausgleichung des Dreiecksnetzes Bezug haben, mit (7), (8), (9), (10), (11), so erhält man die Gleichungen, wie sie §. 23. angegeben sind. Aus diesen Gleichungen sind demnächst nach §. 18. Gl. 11. die Coeffizienten der letzten Gleichungen in §. 23. bestimmt worden.