§. 18. Ermittelung der wahrscheinlichsten Richtungen auf einer Station aus den daselbst angestellten Beobachtungen.

Die mancherlei nachtheiligen Einwirkungen auf die Beobachtungen, welche im vorigen §. angedeutet wurden, kommen, wie leicht zu erachten, in allen Abstufungen vor, es ist daher unmöglich, ein bestimmtes Maſs für den Werth der einzelnen Beobachtungen anzugeben. Aus diesem Grunde wurden in den Beobachtungs-Journalen in den Fällen, wo die Umstände nicht günstig, aber doch nicht so ungünstig erschienen, daſs man die Beobachtungen glaubte einstellen zu müssen, die erforderlichen Notizen gemacht, und wenn unter diesen weniger guten Beobachtungen einzelne unvollständige Sätze vorkamen, die gegen eine bedeutende Zahl guter Beobachtungen zu beträchtliche Abweichungen zeigten, oder wenn später eine hinreichende Anzahl Beobachtungen unter günstigeren Umständen erlangt wurde, so wurden die unvollständigen Sätze der weniger guten gestrichen, alle übrigen aber mit gleichem Gewicht zum Resultat vereinigt.

Wenn man auf jeder Station die zu beobachtenden Richtungen immer sämmtlich hätte einstellen können, so würde einfach das Mittel aus allen Ablesungen die wahrscheinlichsten Richtungen gegeben haben; da dies aber, aus den früher angeführten Gründen, nur höchst selten möglich ist, so muſs das Verfahren näher auseinander gesetzt werden, nach welchem die beliebig beobachteten Objecte zum Resultat vereinigt wurden.

Es sei die Anzahl der Objecte	1	2	3	m
Die beobachteten Richtungen	0	a	b	
ihre wahrscheinlichsten Richtungen	0	A	B	
Zieht man die letzten von den ersten ab:	0;	$a - A$;	$b - B$;	

Setzt man diese Unterschiede $= x$, so findet man eben so viel Gleichungen, als Objecte beobachtet wurden, nämlich:

$$o = x;\; a - A = x;\; b - B = x \;\ldots\ldots$$

Bei jeder anderen Anzahl der Objecte erhält man andere Gleichungen und andere Werthe für x; z. B. für 4 Objecte:

$$o = x';\; \alpha - A = x';\; \beta - B = x';\; \gamma - C = x'$$

Hat man die Beobachtungen der ersten 3 Objecte öfter wiederholt, und auch die Beobachtungen der 4 Objecte wiederholt, so entstehen aus diesen Beobachtungen zwei Gruppen von Gleichungen, wie:

m Punkte n mal eingestellt.

$$\begin{array}{llll}
 & 1 & 2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots & m \\
1 & x = 0; & x + A = a; & x + B = b. \\
2 & x = 0; & x + A = a'; & x + B = b' \;\ldots\ldots\; \text{I.} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
n & & & \\
\hline
 & nx = 0; & nx + nA = (a + a' + \ldots); & nx + nB = (b + b' + \ldots)
\end{array}$$

Summirt man die letzten Gleichungen, so erhält man:

$$mnx = (a + a' + \ldots + b + b' + \ldots) - n\,(A + B)$$

und hieraus folgt:

$$nx = \left(\frac{a + a' + \ldots + b + b' + \ldots}{m}\right) - \frac{n}{m}(A + B) \;\ldots\ldots\; 1.$$

m ist hier die Anzahl der beobachteten Objecte, und n die Zahl der Beobachtungen in der Gruppe.

Die zweite Gruppe ist:

$$\begin{array}{lllll}
 & 1 & 2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots & & m' \\
1 & x' = 0; & x' + A = \alpha; & x' + B = \beta; & x' + C = \gamma \\
2 & x' = 0; & x' + A = \alpha'; & x' + B = \beta'; & x' + C = \gamma' \;\ldots\ldots\; \text{II.} \\
3 & x' = 0; & x' + A = \alpha''; & x' + B = \beta''; & x' + C = \gamma'' \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n' & & & & \\
\hline
 & n'x' = 0; & n'x' + n'A = (\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots); & n'x' + n'B = (\beta + \beta' + \beta'' + \ldots); & n'x' + n'C = (\gamma + \gamma' + \gamma'' + \ldots)
\end{array}$$

Setzt man in diesen letzten Gleichungen die Parenthesen der Reihe nach $= s', s'', s'''$, summirt dieselben, und eliminirt $n'x'$, so findet man

$$n'x' = \frac{s' + s'' + s'''}{m'} - \frac{n'}{m'}(A + B + C) \;\ldots\ldots\; 2.$$

Die Anzahl der Unbekannten x, x' .... ist so groſs, wie die Anzahl der Gruppen, welche aus den Beobachtungen gebildet werden. Die gröſste Zahl der Gruppen bei m Objecten, ist aber gleich der Summe der Combinationen ohne Wiederholung zu 2, 3 bis m Objecten. Es geht hieraus hervor, daſs es für die Ausgleichung vortheilhaft ist, möglichst viele Objecte in einem Satz zu beobachten.

Die ganze Anzahl der unbekannten Gröſsen in beiden Gruppen ist x, x', A, B, C. Die Zahl der Gleichungen beträgt aber in Gruppe I. Sechs; in Gruppe II. Zwölf, und kann durch die Anzahl der Beobachtungen noch beliebig vermehrt werden. Diese Gleichungen sind daher nach der Methode der kleinsten Quadrate zu behandeln.

Bezeichnet man durch 2Σ die Summe der Quadrate der einzelnen Gleichungen in den Gruppen, so ist:

$$\begin{aligned}2\Sigma = {} & x^2 + (A + x - a)^2 + (B + x - b)^2 + \ldots + x^2 + (A + x - a')^2 \\ & + (B + x - b')^2 + \ldots + x'^2 + (A + x' - \alpha)^2 + (B + x' - \beta)^2 \\ & + (C + x' - \gamma)^2 + \ldots + x'^2 + (A + x' - \alpha')^2 + (B + x' - \beta')^2 \\ & + (C + x' - \gamma')^2 + \ldots + x'^2 + (A + x' - \alpha'')^2 + (B + x' - \beta'')^2 \\ & + (C + x' - \gamma'')^2 + \ldots\end{aligned}$$

Hieraus erhält man zunächst durch die Differentiation nach x und x'

$$\frac{d\Sigma}{dx} = 0 = + mnx + n(A + B) - (a + a' + \ldots + b + b' + \ldots) \ \ldots\ldots \ 3.$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Sigma}{dx'} = 0 = {} & + m'n'x' + n'(A + B + C + \ldots) - (\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots \\ & + \beta + \beta' + \beta'' + \ldots + \gamma + \gamma' + \gamma'' + \ldots) \ \ldots\ldots\ldots \ 4.\end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man dieselben Werthe von nx und $n'x'$, wie sie oben unter 1. und 2. aus den Summen der Gleichungen I. und II. gefunden wurden; man kann daher das dortige einfache Verfahren, als gleichbedeutend mit diesem, allgemein zur Bestimmung von nx, $n'x'$ .... anwenden. Ferner giebt die Differentiation nach A, B und C:

$$\begin{aligned}\frac{d\Sigma}{dA} = 0 = {} & nA - (a + a' + \ldots) + nx + n'A - (\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots) \\ & + n'x' \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ 5.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Sigma}{dB} = 0 = {} & nB - (b + b' + \ldots) + nx + n'B - (\beta + \beta' + \beta'' + \ldots) \\ & + n'x' \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ 6.\end{aligned}$$

$$\frac{d\Sigma}{dC} = 0 = n'C - (\gamma + \gamma' + \gamma'' + \ldots) + n'x' \ \ldots\ldots\ldots \ 7.$$

Setzt man die bereits gefundenen Werthe von nx und $n'x'$ in die Gleichungen 5, 6 und 7, so findet man die Endgleichungen, z. B. aus 5:

$$\left.\begin{aligned}0 = {} & nA - (a + a' + \ldots) + \frac{1}{m}\{a + a' + \ldots + b + b' + \ldots\} \\ & - \frac{n}{m}A - \frac{n}{m}B \\ 0 = {} & n'A - (\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots) + \frac{1}{m'}\{s + s' + s'' + \ldots\} \\ & - \frac{n'}{m'}A - \frac{n'}{m'}B - \frac{n'}{m'}C\end{aligned}\right\} \ \ldots\ldots \ 8.$$

Summirt man diese beiden Gleichungen, bringt die constanten Gröſsen auf die linke Seite und nennt ihre Summe an; die Summe der Coeffizienten von A aber aa; die Summe der Coeffizienten von B, ab; und die Summe der Coeffizienten von C, ac; so erhält man $an = aaA - abB - acC$.

Verfährt man mit den Gleichungen 6 und 7 ganz eben so, so findet man drei Gleichungen von der Form:

$$\left.\begin{aligned} an &= + aaA - abB - acC \\ bn &= - abA + bbB - bcC \\ cn &= - acA - bcB + ccC \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ 9.$$

deren gewöhnliche Auflösung die wahrscheinlichsten Richtungen A, B, C giebt. Sind stets alle Objecte beobachtet, so ist $aa = bb = cc = n - \frac{n}{m}$; und die übrigen Coeffizienten sämmtlich $= \frac{n}{m}$. Zur Vereinfachung der Rechnung, und damit man mit kleineren Zahlen zu thun hat, kann man bei den beobachteten Richtungen passende constante Werthe annehmen, die man bei der Rechnung fortläſst, etwa in der Art, daſs A, B und C nur die veränderlichen Theile innerhalb der Einer der Secunden darstellen; dann erhält man die wahrscheinlichsten Richtungen, indem man den Annahmen die Werthe von A, B und C hinzufügt. z. B. Die Richtung nach dem ersten Object sei 0; die nach dem zweiten $56^0\ 30'\ 24'',5$, so setzt man letztere $= 56^0\ 30'\ 20'' + A$, und erhält dann in der Gruppe I. die entsprechende Gleichung: $x + A = 4'',5$, und so für alle übrigen Objecte.

Giebt man den Gleichungen 9. die Form:

$$\left.\begin{aligned} A &= an\,.\,\alpha\alpha + bn\,.\,\alpha\beta + cn\,.\,\alpha\gamma\ \ldots. \\ B &= an\,.\,\alpha\beta + bn\,.\,\beta\beta + cn\,.\,\beta\gamma\ \ldots. \\ C &= an\,.\,\alpha\gamma + bn\,.\,\beta\gamma + cn\,.\,\gamma\gamma\ \ldots. \\ &\quad \text{u. s. w.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ 10.$$

so kann man *) die Coeffizienten $\alpha\alpha$, $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ .... aus den Coeffizienten in Gleichung 9. auf folgende Weise finden:

Zuerst, substituirt man für an, bn, cn .... die Werthe aus Gleichung 9, so erhält man:

$$A = \alpha\alpha\,(aaA - abB - acC) + \alpha\beta\,(-abA + bbB - bcC) + \alpha\gamma\,(-acA - bcB + ccC)\ \ldots.$$
$$B = \alpha\beta\,(aaA - abB - acC) + \beta\beta\,(-abA + bbB - bcC) + \beta\gamma\,(-acA - bcB + ccC)\ \ldots.$$
$$C = \alpha\gamma\,(aaA - abB - acC) + \beta\gamma\,(-abA + bbB - bcC) + \gamma\gamma\,(-acA - bcB + ccC)\ \ldots.$$

u. s. w.

Ordnet man auf der rechten Seite der Gleichungen nach A, B und C ...., so gehen dieselben über in:

*) *Gauſs*, Supplementum theoriae etc. S. 12. — *Bessel*, Gradmessung etc. S. 153. — *Enke*, Jahrbuch für 1835 S. 287 et seq.

$$A = A(aa.\alpha\alpha - ab.\alpha\beta - ac.\alpha\gamma) + B(-ab.\alpha\alpha + bb.\alpha\beta - bc.\alpha\gamma) + C(-ac.\alpha\alpha - bc.\alpha\beta + cc.\alpha\gamma)\dots$$
$$B = A(aa.\alpha\beta - ab.\beta\beta - ac.\beta\gamma) + B(-ab.\alpha\beta + bb.\beta\beta - bc.\beta\gamma) + C(-ac.\alpha\beta - bc.\beta\beta + cc.\beta\gamma)\dots$$
$$C = A(aa.\alpha\gamma - ab.\beta\gamma - ac.\gamma\gamma) + B(-ab.\alpha\gamma + bb.\beta\gamma - bc.\gamma\gamma) + C(-ac.\alpha\gamma - bc.\beta\gamma + cc.\gamma\gamma)\dots$$

u. s. w.

Sollen diese Gleichungen mit den Gleichungen 10. übereinstimmen, so muſs der Werth von A unabhängig von B und C, der Werth von B unabhängig von A und C, und der Werth von C unabhängig von A und B sein. Dies ist aber nur dann möglich, wenn in der ersten Gleichung $B = 0$ und $C = 0$; in der zweiten $A = 0$ und $C = 0$; in der dritten $A = 0$ und $B = 0$ gesetzt wird. Man erhält daher zur Bestimmung der unbekannten Coeffizienten aus jeder Gleichung drei andere, nämlich:

$$1 = +aa.\alpha\alpha - ab.\alpha\beta - ac.\alpha\gamma;\quad 0 = +aa.\alpha\beta - ab.\beta\beta - ac.\beta\gamma;\quad 0 = +aa.\alpha\gamma - ab.\beta\gamma - ac.\gamma\gamma$$
$$0 = -ab.\alpha\alpha + bb.\alpha\beta - bc.\alpha\gamma;\quad 1 = -ab.\alpha\beta + bb.\beta\beta - bc.\beta\gamma;\quad 0 = -ab.\alpha\gamma + bb.\beta\gamma - bc.\gamma\gamma$$
$$0 = -ac.\alpha\alpha - bc.\alpha\beta + cc.\alpha\gamma;\quad 0 = -ac.\alpha\beta - bc.\beta\beta + cc.\beta\gamma;\quad 1 = -ac.\alpha\gamma - bc.\beta\gamma + cc.\gamma\gamma$$

oder allgemein nach der *Gauſs*'schen Bezeichnungsart, und ohne Rücksicht auf die Zeichen:

$$\left.\begin{array}{l}
1 = aa\,.\,\alpha\alpha + ab\,.\,\alpha\beta + ac\,.\,\alpha\gamma\\
0 = ab\,.\,\alpha\alpha + bb\,.\,\alpha\beta + bc\,.\,\alpha\gamma\\
0 = ac\,.\,\alpha\alpha + bc\,.\,\alpha\beta + cc\,.\,\alpha\gamma\\
\qquad\text{u. s. w.}\\
1 = bb.1\,\beta\beta + bc.1\,\beta\gamma\ \dots\\
0 = bc.1\,\beta\beta + cc.1\,\beta\gamma\\
\qquad\text{u. s. w.}\\
1 = cc.2\,\gamma\gamma\\
\qquad\text{u. s. w.}
\end{array}\right\}\ \dots\dots\ 11.$$

Sobald A, B, C .... aus den Gleichungen 9. oder 10. bekannt sind, so hat man alles, was aus den Beobachtungen auf einer Station in Bezug auf diese Richtungen ermittelt werden kann. Wenn aber durch Beobachtungen auf mehreren Stationen ein zusammenhängendes Dreiecksnetz gebildet worden ist, welches neue Bedingungen enthält, die erfüllt werden müssen, so gehen daraus auch neue Verbesserungen für A, B, C .... hervor. Bezeichnet man dieselben als neue Unbekannten mit (1), (2), (3), so erhält man $A + (1)$; $B + (2)$; $C + (3)$ .... Wenn aber A, B und C in Gleichung 9. in diese Werthe übergehen, dann werden auch an, bn, cn Veränderungen erleiden, die durch $an + [1]$; $bn + [2]$; $cn + [3]$ dargestellt werden können. Setzt man diese Werthe (für A also $A + (1)$ .... und für an, $an + [1]$ ....) in die Gleichungen 9, und setzt dann für A, B und C die bereits gefundenen wahrscheinlichsten Werthe, wodurch die Gleichungen 9. selbst Null werden, so findet man:

$$\left.\begin{array}{l} [1] = +\, aa\ (1) - ab\ (2) - ac\ (3) \\ [2] = -\, ab\ (1) + bb\ (2) - bc\ (3) \\ [3] = -\, ac\ (1) - bc\ (2) + cc\ (3) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ 12.$$

Setzt man dieselben Werthe (für A, $A + (1)$, und für an, $an + [1]$ u. s. w.) auch in die Gleichungen 10, so gehen diese, wenn man für A, B, C die wahrscheinlichsten Werthe selbst setzt, über in:

$$\left.\begin{array}{l} (1) = \alpha\alpha\ [1] + \alpha\beta\ [2] + \alpha\gamma\ [3] \\ (2) = \alpha\beta\ [1] + \beta\beta\ [2] + \beta\gamma\ [3] \\ (3) = \alpha\gamma\ [1] + \beta\gamma\ [2] + \gamma\gamma\ [3] \end{array}\right\} \ldots\ldots\ 13.$$

Die Gleichungen 12. und 13. beziehen sich also bloſs auf die Ausgleichung des Dreiecksnetzes, und bestimmen die Abhängigkeit dieser Verbesserungen nach den auf der Station vorhandenen Bedingungen. Später werden wir auf diese Gleichungen zurückkommen.

Die Rechnungen, welche hiernach auf jeder Station auszuführen sind, bestehen zuerst in der Auflösung der Gleichungen 9. zur Bestimmung der Werthe von A, B, C .... und dann in der Auflösung der Gleichungen 11. zur Bestimmung der Coeffizienten in den Gleichungen 13.

Die Auflösung der Gleichungen 9. und 11., so wie überhaupt aller Gleichungen, welche nach der Methode der kleinsten Quadrate formirt sind, wurden nach der *Gauſs*'schen Methode in folgender Art ausgeführt:

Es seien die aufzulösenden Gleichungen ohne Rücksicht auf die Zeichen der Coeffizienten

$$\left.\begin{array}{l} an = aa \cdot w + ab \cdot x + ac \cdot y + ad \cdot z \\ bn = ab \cdot w + bb \cdot x + bc \cdot y + bd \cdot z \\ cn = ac \cdot w + bc \cdot x + cc \cdot y + dc \cdot z \\ dn = ad \cdot w + bd \cdot x + dc \cdot y + dd \cdot z \end{array}\right\} \ldots\ldots\ \alpha.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung successive mit den Quotienten $\frac{ab}{aa}$, $\frac{ac}{aa}$, $\frac{ad}{aa}$, und zieht diese 3 Gleichungen der Reihe nach von der zweiten, dritten und vierten Gleichung ab, so verschwindet w und man erhält:

$$bn - an\frac{ab}{aa} = \left(bb - ab\frac{ab}{aa}\right) x + \left(bc - ac\frac{ab}{aa}\right) y + \left(bd - ad\frac{ab}{aa}\right) z$$

$$cn - an\frac{ac}{aa} = \left(bc - ab\frac{ac}{aa}\right) x + \left(cc - ac\frac{ac}{aa}\right) y + \left(dc - ad\frac{ac}{aa}\right) z$$

$$dn - an\frac{ad}{aa} = \left(bd - ab\frac{ad}{aa}\right) x + \left(dc - ac\frac{ad}{aa}\right) y + \left(dd - ad\frac{ad}{aa}\right) z$$

Setzt man um abzukürzen $bn - an\frac{ab}{aa} = bn.1$; $bb - ab\frac{ab}{aa} = bb.1$; $bc - ac\frac{ab}{aa} = bc.1$ u. s. w., so erhalten diese Gleichungen die Form:

$$\left.\begin{aligned} bn.1 &= bb.1\,x + bc.1\,y + bd.1\,z \\ nc.1 &= bc.1\,x + cc.1\,y + dc.1\,z \\ dn.1 &= bd.1\,x + dc.1\,y + dd.1\,z \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \beta.$$

Behandelt man diese Gleichungen wieder wie die ersten, d. h. multiplicirt man die erste Gleichung mit den Quotienten $\frac{bc.1}{bb.1}$; $\frac{bd.1}{bb.1}$ und zieht die dadurch erhaltenen Gleichungen der Reihe nach von den übrigen ab, so findet man:

$$cn.1 - bn.1\frac{bc.1}{bb.1} = (cc.1 - bc.1\frac{bc.1}{bb.1})\,y + (cd.1 - bd.1\frac{bc.1}{bb.1})\,z$$
$$dn.1 - bn.1\frac{bd.1}{bb.1} = (dc.1 - bc.1\frac{bd.1}{bb.1})\,y + (dd.1 - bd.1\frac{bd.1}{bb.1})\,z$$

und setzt man um abzukürzen $cn.1 - bn.1\frac{bc.1}{bb.1} = cn.2$; $cc.1 - bc.1\frac{bc.1}{bb.1} = cc.2$ u. s. w., so erhält man

$$\left.\begin{aligned} cn.2 &= cc.2\,y + dc.2\,z \\ dn.2 &= dc.2\,y + dd.2\,z \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \gamma.$$

Wendet man auf diese Gleichungen abermals das frühere Verfahren an, d. h. multiplicirt man die erste mit $\frac{dc.2}{cc.2}$ und zieht sie von der zweiten ab, so ergiebt sich

$$dn.2 - cn.2\frac{dc.2}{cc.2} = (dd.2 - dc.2\frac{dc.2}{cc.2})\,z; \text{ oder abgekürzt:}$$
$$dn.3 = dd.3\,z$$

Hieraus erhält man endlich $z = \frac{dn.3}{dd.3}$ (wo $dd.3$ zugleich das Gewicht von z ist) und nun aus den Gleichungen γ, β und α der Reihe nach:

$$y = \frac{cn.2}{cc.2} - \frac{dc.2}{cc.2}z;\quad x = \frac{bn.1}{bb.1} - \frac{bc.1}{bb.1}y - \frac{bd.1}{bb.1}z \text{ und}$$
$$w = \frac{an}{aa} - \frac{ab}{aa}x - \frac{ac}{aa}y - \frac{ad}{aa}z.$$

Diese Auflösungsweise läſst sich zur Bequemlichkeit der Rechnung in folgendes Schema bringen.

$an=$	$aa\,w$	$ab\,x$	$ac\,y$	$ad\,z$	bn	bb	bc	bd	cn	cc	cd	dn	dd
$\log an$	$\lg aa$	$\lg ab$	$\log ac$	$\log ad$	$-an\frac{ab}{aa}$	$-ab\frac{ab}{aa}$	$-ac\frac{ab}{aa}$	$-ad\frac{ab}{aa}$	$-an\frac{ac}{aa}$	$-ac\frac{ac}{aa}$	$-ad\frac{ac}{aa}$	$-an\frac{ad}{aa}$	$-ad\frac{ad}{aa}$
$\log\frac{an}{aa}$		$\lg\frac{ab}{aa}$	$\lg\frac{ac}{aa}$	$\lg\frac{ad}{aa}$	$bn.1=$	$bb.1.x$	$bc.1.y$	$bd.1.z$	$cn.1$	$cc.1$	$cd.1$	$dn.1$	$dd.1$
$\frac{an}{aa}$		$\lg x$	$\lg y$	$\lg z$	$\lg bn.1$	$\lg bb.1$	$\lg bc.1$	$\lg bd.1$	$-bn.1\frac{bc.1}{bb.1}$	$-bc.1\frac{bc.1}{bb.1}$	$-bd.1\frac{bc.1}{bb.1}$	$-bn.1\frac{bd.1}{bb.1}$	$-bd.1\frac{bd.1}{bb.1}$
$-x\frac{ab}{aa}$		$\lg x\frac{ab}{aa}$	$\lg y\frac{ac}{aa}$	$\lg z\frac{ad}{aa}$	$\lg\frac{bn.1}{bb.1}$		$\lg\frac{bc.1}{bb.1}$	$\lg\frac{bd.1}{bb.1}$	$cn.2=$	$cc.2.y$	$cd.2.z$	$dn.2$	$dd.2$
$-y\frac{ac}{aa}$					$\frac{bn.1}{bb.1}$		$\lg y$	$\lg z$	$\log cn.2$	$\lg cc.2$	$\lg cd.2$	$-cn.2\frac{cd.2}{cc.2}$	$-cd.2\frac{cd.2}{cc.2}$
$-z\frac{ad}{aa}$					$-y\frac{bc.1}{bb.1}$		$\lg y\frac{bc.1}{bb.1}$	$\lg z\frac{bd.1}{bb.1}$	$\lg\frac{cn.2}{cc.2}$		$\lg\frac{cd.2}{cc.2}$	$dn.3=$	$dd.3.z$
w					$-z\frac{bd.1}{bb.1}$				$\frac{cn.2}{cc.2}$		$\lg z$	$\lg dn.3$	$\log dd.3$
					x				$-z\frac{cd.2}{cc.2}$		$\lg z\frac{cd.2}{cc.2}$	$\lg\frac{dn.3}{dd.3}$	
									y			z	

Hieraus ergeben sich unmittelbar die Gleichungen 11. wie folgt:

1	aa	ab	ac	ad	0	bb	bc	bd	0	cc	cd	0	dd
					1	$bb.1$	$bc.1$	$bd.1$	0	$cc.1$	$cd.1$	0	$dd.1$
									1	$cc.2$	$cd.2$	0	$dd.2$
												1	$dd.3$
												$\frac{1}{dd.3}=$	$\delta\delta$

Die Auflösungen der letzten Gleichungen, die gröſstentheils schon in den ersten enthalten sind, geben die Coeffizienten $\alpha\alpha$, $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ u. s. w.

Als Beispiel mögen hier die vollständig durchgeführten Rechnungen von einer Station folgen.

Station Brosowken.

Gruppirung der Beobachtungen und Bestimmung der Werthe von nx, $n'x'$ u. s. w.

Busch-kau	A Stegen	B Trunz	C Talpitten	Annahme.
0° 0′ 0″	51° 22′ 38″,50	93° 55′ 51″,25	137° 33′ 33″,00	Buschkau 0° 0′ 0″
0	37,25	50,50	27,25	Stegen..... 51 22 30 $+ A$
0	38,50	50,00	26,50	Trunz...... 93 55 50 $+ B$
0	39,00	50,50	29,25	Talpitten 137 33 30 $+ C$
0	33,50	49,50	25,75	
0	36,75	50,50	26,75	
0	38,25	51,00	31,50	$16\,x = 0$
0	36,00	47,00	27,50	$16\,x + 16\,A = +\,110{,}12$
0	37,50	49,00	28,50	$16\,x + 16\,B = -\;\;9{,}38$
0	36,75	50,00	29,25	$16\,x + 16\,C = -\;31{,}88$
0	37,25	50,50	26,50	
0	36,50	48,25	28,00	$16\,x = +\,17{,}2150 - 4\,\{A + B + C\}$
0	37,75	48,75	30,00	
0	35,37	46,12	22,12	
0	34,50	47,50	24,25	
0	36,75	50,25	32.00	
(16)	+ 110,12	− 9,38	− 31,88	
0 0 0	38,50	52,00		$5\,x' = 0$
0	37,25	49,00		$5\,x' + 5\,A = +\,41{,}88$
0	36,50	48,50		$5\,x' + 5\,B = +\;\;2{,}75$
0	38,88	52,00		
0	40,75	51,25		$5\,x' = +\,14{,}8767 - 1{,}6667\,\{A + B\}$
(5)	+ 41,88	+ 2,75		$x'' = 0$
				$x'' + A = +\,4{,}25$
				$x'' + C = -\,4{,}75$
0 0 0	34.25		25,25	$x'' = -\,0{,}1667 - 0{,}3333\,\{A + C\}$
(1)	+ 4,25		− 4,75	
0 0 0	39,25			$4\,x''' = 0$
0	39,25			$4\,x''' + 4\,A = +\,27{,}75$
0	34,25			
0	35,00			$4\,x''' = +\,13{,}8750 - 2\,A$
(4)	+ 27,75			
0 0 0			25,75	$4\,x^{\mathrm{IV}} = 0$
0			28,50	$4\,x^{\mathrm{IV}} + 4\,C = -\,5{,}50$
0			31,25	
0			29,00	$4\,x^{\mathrm{IV}} = -\,2{,}7500 - 2\,C$
(4)			− 5,50	

Buschkau	A Stegen	B Trunz	C Talpitten
	0° 0′ 0″	42° 33′ 12,75″	86° 10′ 52,50″
	0	14,75	53,25
	0	14,50	51,50
	0	15,50	49,50
	0	16,25	47,75
	0	9,75	53,25
	(6)	— 36,50	— 52,25
		0 0 0	43 37 37,75
		0	40,75
		0	37,00
		0	37,25
		0	37,25
		0	36,75
		0	42,00
		0	34,75
		(8)	— 16,50

$$6\,x^{\text{v}} + 6\,A = 0$$
$$6\,x^{\text{v}} + 6\,B = -\,36{,}50$$
$$6\,x^{\text{v}} + 6\,C = -\,52{,}25$$

$$6\,x^{\text{v}} = -\,29{,}5833 - 2\,\{A + B + C\}$$

$$8\,x^{\text{vi}} + 8\,B = 0$$
$$8\,x^{\text{vi}} + 8\,C = -\,16{,}50$$

$$8\,x^{\text{vi}} = -\,8{,}25 - 4\,\{B + C\}$$

Bildung der Endgleichungen nach den Gl. 5, 6 und 7, und Substitution der Werthe von nx, $n'x'$ ....

1) für A nach Gl. 8.

$$\begin{array}{rcllllll}
+\,110{,}12 & = & (16)\,A & +\,17{,}2150 & -\,4{,}0000\,A & -\,4{,}0000\,B & -\,4{,}0000\,C \\
+\,41{,}88 & = & (5)\ \text{-} & +\,14{,}8767 & -\,1{,}6667\ \text{-} & -\,1{,}6667\ \text{-} & \underline{\phantom{0{,}0000}} \\
+\,4{,}25 & = & (1)\ \text{-} & -\,0{,}1667 & -\,0{,}3333\ \text{-} & \underline{\phantom{0{,}0000}}\ \text{-} & -\,0{,}3333\ \text{-} \\
+\,27{,}75 & = & (4)\ \text{-} & +\,13{,}8750 & -\,2{,}0000\ \text{-} & \underline{\phantom{0{,}0000}} & \underline{\phantom{0{,}0000}} \\
0 & = & (6)\ \text{-} & -\,29{,}5833 & -\,2{,}0000\ \text{-} & -\,2{,}0000\ \text{-} & -\,2{,}0000\ \text{-} \\
\hline
+\,184{,}00 & = & (32)\,A & +\,16{,}2167 & -10{,}0000\,A & -\,7{,}6667\,B & -\,6{,}3333\,C \\
+\,167{,}7833 & = & & +\,22\,A & & -\,7{,}6667\,B & -\,6{,}3333\,C
\end{array}$$

2) für B.

$$\begin{array}{rcllllll}
-\,9{,}38 & = & (16)\,B & +\,17{,}2150 & -\,4{,}0000\,A & -\,4{,}0000\,B & -\,4{,}0000\,C \\
+\,2{,}75 & = & (5)\ \text{-} & +\,14{,}8767 & -\,1{,}6667\ \text{-} & -\,1{,}6667\ \text{-} & \underline{\phantom{0{,}0000}} \\
-\,36{,}50 & = & (6)\ \text{-} & -\,29{,}5833 & -\,2{,}0000\ \text{-} & -\,2{,}0000\ \text{-} & -\,2{,}0000\ \text{-} \\
0 & = & (8)\ \text{-} & -\,8{,}2500 & \underline{\phantom{0{,}0000}}\ \text{-} & -\,4{,}0000\ \text{-} & -\,4{,}0000\ \text{-} \\
\hline
-\,43{,}13 & = & (35)\,B & -\,5{,}7416 & -\,7{,}6667\,A & -11{,}6667\,B & -10{,}0000\,C \\
-\,37{,}3884 & = & & & -\,7{,}6667\,A & +23{,}3333\,B & -10{,}0000\,C
\end{array}$$

3) für C.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
-\ 31{,}88 = (16)\ C & +\ 17{,}2150 & -\ 4{,}0000\ A & -\ 4{,}0000\ B & -\ 4{,}0000\ C \\
-\ 4{,}75 = (1)\ \text{-} & -\ 0{,}1667 & 0{,}3333\ \text{-} & \text{———}\ \text{-} & -\ 0{,}3333\ \text{-} \\
-\ 5{,}50 = (4)\ \text{-} & -\ 2{,}7500 & \text{———}\ \text{-} & \text{———}\ \text{-} & -\ 2{,}0000\ \text{-} \\
-\ 52{,}25 = (6)\ \text{-} & -\ 29{,}5833 & -\ 2{,}0000\ \text{-} & -\ 2{,}0000\ \text{-} & -\ 2{,}0000\ \text{-} \\
-\ 16{,}50 = (8)\ \text{-} & -\ 8{,}2500 & \text{———}\ \text{-} & -\ 4{,}0000\ \text{-} & -\ 4{,}0000\ \text{-} \\
\hline
-\ 110{,}88 = (35)\ C & -\ 23{,}5350 & -\ 6{,}3333\ A & -10{,}0000\ B & -12{,}3333\ C \\
-\ 87{,}3450 & = & -\ 6{,}3333\ A & -10{,}0000\ B & +22{,}6667\ C
\end{array}
$$

Aufzulösende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
+\ 167{,}7833 &= +\ 22{,}0000\ A - \ \ 7{,}6667\ B - \ \ 6{,}3333\ C \\
-\ 37{,}3884 &= -\ \ 7{,}6667\ A + 23{,}3333\ B - 10{,}0000\ C \\
-\ 87{,}3450 &= -\ \ 6{,}3333\ A - 10{,}0000\ B + 22{,}6667\ C
\end{aligned}
$$

Auflösung der Gleichungen:

	$an =$	aa	ab	ac	bn	bb	bc	cn	cc
	+167,7833	+ 22	− 7,6667	− 6,3333	−37,3884	+23,3333	−10,0000	−87,3450	+22,6667
	2,2247488	1,3424227	0,8846085$_n$	0,8016301$_n$	−58,4702	+ 2,6717	+ 2,2071	−48,3010	+ 1,8232
	0,8823261		9,5421858$_n$	9,4592079$_n$	+21,0818	+20,6616	−12,2071	−39,0440	+20,8435
	+ 7,6265		9,1209028$_n$	0,2901550$_n$	1,3239077	1,3151640	1,0866125$_n$	−12,4554	+ 7,2121
	− 0,0460		8,663089	9,749363	0,0087437		9,7714485$_n$	−26,5886	+13,6314
	− 0,5615				+ 1,0203		0,2901550$_n$	1,4246955$_n$	1,1345405
$A =$	+ 7,0190				− 1,1524		0,0616035	0,2901550$_n$	
				$B =$	− 0,1321		$C =$	− 1,9505	
	1				0			0	
	0,…………							+ 0,2879	
	8,65758		9,54219$_n$	9,45921$_n$	9,54219			− 0,2059	
	+ 0,0455		8,58320	8,55901	8,22703		9,77145$_n$	+ 0,4938	
	+ 0,0133		8,12539$_n$	8,01822$_n$	+ 0,0169		8,55901	9,69355	
	+ 0,0104				+ 0,0214		8,33046$_n$	8,55901	
$\alpha\alpha =$	+ 0,0692			$\alpha\beta =$	+ 0,0383		$\alpha\gamma =$	+ 0,0362	
					1			0	
					0,…………				
					8,6848		9,77145$_n$		
					+ 0,0484		8,63691	9,77145	
					+ 0,0256		8,40836$_n$	8,63691	
				$\beta\beta =$	+ 0,0740		$\beta\gamma =$	+ 0,0433	
								1	

0,………

8,86546

$\gamma\gamma = +\ 0{,}0734$

Hieraus erhält man nun:

1) Die wahrscheinlichsten Richtungen, indem man den Annahmen die gefundenen Werthe von *A, B, C* hinzufügt:

Buschkau	0°	0′	0″	— 0,″147 Reduction aufs Centrum.
Stegen	51	22	37,019 + (12)	
Trunz	93	55	49,868 + (13) — 31,″631	Reduct. auf d. astron. Pfeiler.
Talpitten	137	33	28,050 + (14)	

Die Ausdrücke (12), (13) und (14) beziehen sich auf die Verbesserungen, die aus den Bedingungen im Dreiecksnetz hervorgehen.

2) Die Gleichungen 12., die in der Gradmessung mit *P, Q, R* bezeichnet sind.

$$[12] = +\ 22{,}0000\ (12) - 7{,}6667\ (13) - 6{,}3333\ (14)$$
$$[13] = -\ 7{,}6667\ (12) + 23{,}3333\ (13) - 10{,}0000\ (14)$$
$$[14] = -\ 6{,}3333\ (12) - 10{,}0000\ (13) + 22{,}6667\ (14)$$

3) Die Gleichungen 13.

$$(12) = +\ 0{,}0692\ [12] + 0{,}0383\ [13] + 0{,}0362\ [14]$$
$$(13) = +\ 0{,}0383\ [12] + 0{,}0740\ [13] + 0{,}0433\ [14]$$
$$(14) = +\ 0{,}0362\ [12] + 0{,}0433\ [13] + 0{,}0734\ [14]$$

Bei der Ausgleichung des Dreiecksnetzes kommen nur diese letzteren Gleichungen in Betracht; es sind daher bei den Beobachtungen auch nur diese Gleichungen aufgenommen und die ersteren ganz weggelassen worden. In der Gradmessung in Ostpreufsen dagegen sind die letzteren Gleichungen weggelassen, und die ersteren bei den Beobachtungen aufgeführt worden.