§. 16. Ermittelung der Werthe der Theilstriche der Wasserwagen in Secunden.

Wenn man die Wasserwage, deren Theilstriche bestimmt werden sollen, mit dem Fernrohr eines Höhenkreises so in Verbindung bringt, daſs sie jede Bewegung desselben mitmachen muſs, und daſs sich die Längenaxe der Blase in der Mitte der Theilstriche auf der Röhre, mit dem Höhenkreise in einer parallelen Ebene bewegt, so können aus einer Anzahl Beobachtungen der Höhenwinkel, bei denen man der Blase der Wasserwage nach und nach verschiedene Stellungen giebt, die Werthe der Theilstriche in Secunden gefunden werden. Die Schärfe der Bestimmung hängt von der Genauigkeit ab, mit der die Höhenwinkel gemessen werden.

Bedeuten a, a', a'' .... die Ablesungen am Höhenkreis; n, n', n'' .... die correspondirenden Stellungen der Blase der Wasserwage, die man findet, wenn beide Enden der Blase abgelesen werden, und das Mittel aus beiden Ablesungen genommen wird (dies Verfahren ist nothwendig, um die, während der Beobachtungszeit stattgefundene Veränderung der Temperatur unschädlich zu machen), so erhält man den zwischen den Angaben der Wasserwage n und n' durchlaufenen Bogen $= a' - a$ u. s. w. Auf diese Weise findet man die folgenden correspondirenden Werthe der Kreistheilung und der Niveauangaben:

$$a - a \;......\; n$$
$$a' - a \;......\; n'$$
$$a'' - a \;......\; n''$$
u. s. w.

Setzt man, um abzukürzen, $a - a = 0$; $a' - a = m'$; $a'' - a = m''$ .... und bezeichnet man durch y den Werth eines Theilstrichs der Wasserwage in Secunden; durch x die Anzahl Secunden welche $= ny$ ist, so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$0 = x + ny \quad .... \; 1.$$
$$m' = x + n'y$$
$$m'' = x + n''y$$
u. s. w.

Da nur 2 Unbekannte in diesen Gleichungen vorkommen, so müssen sie nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt werden, d. h. die folgende Function muſs zu einem Minimum gemacht werden:

$$2\Sigma = (+x + ny)^2 + (-m' + x + n'y)^2 + (-m'' + x + n''y)^2 + \ldots$$

Differentiirt man dieselbe zuerst nach x, dann nach y, und setzt die Differentialquotienten gleich 0, so findet man:

$$\frac{d\Sigma}{dx} = 0 = (x + ny) + (-m' + x + n'y) + (-m'' + x + n''y) + \ldots \quad 2.$$

$$\frac{d\Sigma}{dy} = 0 = (+nx + n^2y) + (-n'm' + n'x + n'^2y) + (-n''m'' + n''x + n''^2y) + \ldots 3.$$

Die zusammengehörigen Werthe in jeder dieser Gleichungen summirt, geben zwei Gleichungen von der Form:

$$an = aax + aby$$
$$bn = abx + bby,$$

deren Auflösung den gesuchten Werth von y giebt.

Die Gleichung 3. erhält man auch, wenn man sämmtliche Gleichungen 1. mit den Coeffizienten von y multiplizirt und summirt; und die Gleichung 2., wenn man sämmtliche Gleichungen 1. summirt.

Zur Bestimmung der Theilstriche der Wasserwage, welche zum Horizontiren des Ertelschen Theodoliten dient, wurde dieselbe auf dem Fernrohr des Meridiankreises der Königsberger Sternwarte befestigt und die nachfolgenden Beobachtungen gemacht:

Ablesungen am Höhenkreis	Wasserwage rechts	Wasserwage links	Werthe von n, n' ...	Werthe von a, a' ...	Endgleichungen.
21,645	− 23,8	+ 7,4	− 8,2	0,000	$+ 3{,}508 = 5\,x - 1{,}85\,y$
21,974	− 20,2	+ 10,9	− 4,65	0,329	$+ 13{,}702 = - 1{,}85\,x + 163{,}4875\,y$
22,328	− 15,8	+ 15,3	− 0,25	0,683	
22,676	− 12,3	+ 18,8	+ 3,25	1,031	$x = 0{,}73470; \quad y = 0{,}090097$
23,110	− 7,6	+ 23,6	+ 8,0	1,465	
23,138	− 7,5	+ 23,7	+ 8,1	1,430	$+ 3{,}567 = 5\,x + 0{,}35\,y$
22,826	− 11,2	+ 19,9	+ 4,35	1,118	$+ 14{,}8512 = + 0{,}35\,x + 161{,}0975\,y$
22,383	− 15,9	+ 15,2	− 0,35	0,675	
22,052	− 15,5	+ 11,6	− 3,95	0,344	$x = 0{,}70714; \quad y = 0{,}090652$
21,708	− 23,4	+ 7,8	− 7,8	0,000	
21,708	− 23,5	+ 7,6	− 7,95	0,000	$+ 3{,}531 = 5\,x + 1{,}1\,y$
21,990	− 20,0	+ 11,1	− 4,45	0,282	$+ 15{,}2522 = 1{,}1\,x + 164{,}59\,y$
22,506	− 14,2	+ 16,9	+ 1,35	0,798	
22,777	− 11,2	+ 19,9	+ 4,35	1,069	$x = 0{,}68650; \quad y = 0{,}088077$
23,090	− 7,8	+ 23,4	+ 7,8	1,382	

Ablesungen am Höhenkreis	Wasserwage rechts	Wasserwage links	Werthe von $n, n' \ldots$	Werthe von $a, a' \ldots$	Endgleichnngen.
23,115	— 7,7	+ 23,5	+ 7,9	1,354	$+ 3{,}417 = 5\,x + 1{,}70\,y$
22,723	— 12,1	+ 19,0	+ 3,45	0,962	$+ 13{,}3407 = + 1{,}70\,x + 137{,}68\,y$
22,474	— 15,0	+ 16,1	+ 0,55	0,713	
22,149	— 18,3	+ 12,8	— 2,75	0,388	$x = 0{,}65300;\quad y = 0{,}088830$
21,761	— 23,0	+ 8,1	— 7,45	0,000	
21,714	— 23,5	+ 7,6	— 7,95	0,000	$+ 3{,}525 = 5\,x + 1{,}6\,y$
22,032	— 19,5	+ 11,6	— 3,95	0,318	$+ 15{,}3789 = 1{,}6\,x + 163{,}74\,y$
22,475	— 14,5	+ 16,7	+ 1,1	0,761	
22,766	— 11,2	+ 19,9	+ 4,35	1,052	$x = 0{,}67635;\quad y = 0{,}087307$
23,108	— 7,5	+ 23,6	+ 8,05	1,394	
23,155	— 7,0	+ 24,1	+ 8,55	1,418	$+ 3{,}483 = 5\,x + 2{,}2\,y$
22,729	— 11,8	+ 19,2	+ 3,7	0,992	$+ 14{,}9058 = 2{,}2\,x + 152{,}04\,y$
22,415	— 15,2	+ 15,9	+ 0,35	0,678	
22,132	— 18,4	+ 12,7	— 2,85	0,395	$x = 0{,}65720;\quad y = 0{,}088523$
21,737	— 23,1	+ 8,0	— 7,55	0,000	

Hätte man die Ablesungen der Wasserwage mit entgegengesetzten Zeichen notirt, so hätte man dieselben Werthe für y aber auch mit entgegengesetzten Zeichen gefunden.

Aus den obigen 6 Bestimmungen findet man den mittleren Werth von

$$y = 0{,}089526 \text{ Umgängen der Schraube.}$$

Ein Umgang der Schraube ist aber $= 34'',239$, und daraus folgt der Werth eines Theilstriches der Wasserwage $= 3'',065$. (§. 12.)

Die Summe der Quadrate der Fehler von den 6 Bestimmungen von y ist $= 0{,}000010257104$, und da $\varepsilon\varepsilon = \frac{1}{n}(vv)$, so findet man den mittleren Fehler eines Werthes von $y = \pm 0{,}0013075$ in Umgängen des Mikrometers oder $= \pm 0'',045$.

Wenn bei den Beobachtungen die Blase der Wasserwage ganz auf die eine oder die andere Seite gebracht wird, so daſs die Ablesungen beider Enden einerlei Zeichen erhalten, dann muſs allen diesen Ablesungen der halbe, in der Mitte der Wasserwage nicht eingetheilte Zwischenraum, der gewöhnlich 5 Theile beträgt, mit dem Zeichen der Ablesungen hinzugefügt werden, um sie mit den übrigen auf einen gemeinschaftlichen Nullpunkt zu bringen.
