Zweiter Abschnitt.

Das Dreiecksnetz und die Winkelmessungen im Allgemeinen.

Bei dem Entwurf eines trigonometrischen Netzes wird man wohlthun, wenn man von dem Gesichtspunkt ausgeht, dafs die dominirenden Punkte des Landes die natürlichen und besten Dreieckspunkte sind. Die besonderen Zwecke, welche indessen einer Vermessung zum Grunde liegen, gestatten nicht immer, diesen Gesichtspunkt in seiner völligen Allgemeinheit festzuhalten, und fügen den an sich schon vorhandenen Schwierigkeiten noch andere hinzu, die auf die Form des Dreiecksnetzes einen Einflufs erlangen. Die Aufgabe, welche daher bei Feststellung der Stationspunkte zu lösen ist, besteht darin, unter den vorliegenden Umständen diejenigen Punkte herauszufinden, welche bei den geringsten Schwierigkeiten noch eine dem Zweck entsprechende Form der Dreiecke geben. Um einerseits diese Schwierigkeiten bei dem vorliegenden Dreiecksnetz übersehen, und andererseits beurtheilen zu können, in wiefern sie durch die Wahl der Mittel mehr oder minder glücklich überwunden wurden, sollen dieselben, der Hauptsache nach, hier näher angedeutet werden.

Da die Dreieckskette längs der Küste fortgeführt werden sollte, so zeigte sich die erste Schwierigkeit gleich bei dem Überschreiten des Weichselthales. Die dominirenden Punkte des hohen und breiten Landrückens, welcher in Westpreufsen die Weichsel auf ihrem linken Ufer bis zur Ostsee begleitet und in dem höchsten Punkte, dem Thurmberge bei Schönberg, eine Höhe von 1057 Preufs. Fufs erreicht, waren von dem rechten, gegen 9 Meilen entfernten Thalrande, namentlich von Trunz aus, nicht sichtbar; es mufste daher im Weichselthale selbst zuerst eine Basis, *Brosowken-Stegen* genommen werden, um von dieser aus die Seite Buschkau-Dohnasberg, am östlichen Rande des Höhenzuges, zu gewinnen. Aus dieser Seite konnte erst der dominirende Thurmberg und das Signal Schönwalderhütte, am westlichen Abfall des Rückens, bestimmt werden. Dies ist der Grund, warum die Seiten Buschkau-Thurmberg und Dohnasberg-Schönwalderhütte klein ausgefallen sind. Ihre nach aufsen gekehrte Lage ist aber der Fortpflanzung der Entfernungen durchaus nicht nachtheilig.

Ein zweites bedeutendes Hindernifs bildeten die ausgedehnten Hochwaldungen auf der rechten Seite der unteren Oder; dasselbe konnte nur durch ein hohes Signal auf dem Sprengelberge beseitigt werden, weil sich in diesen Wäldern durchaus keine markirten Höhen vorfinden.

Eine dritte Schwierigkeit bestand in der Verbindung von Darserort mit dem Thurm in Veigerslöse auf der Insel Falster. Die Entfernung betrug nach den Karten über 6 Meilen, und die höchste Düne auf Darserort ist kaum 20 Fufs hoch. Nachdem Capt. *Nygaard*, der von Dänischer Seite die Arbeiten zur gemeinschaftlichen Verbindung der Dreiecke leitete, den Thurm von Veigerslöse als den günstigsten Stationspunkt auf der Insel Falster ausersehen, und gefunden hatte, dafs sein Dreieckspunkt nur 90 Preufs. Fufs, und der Heliotropenstand nur 108 Fufs über der Ostsee genommen werden konnte, zeigte die Rechnung, dafs der Standpunkt auf Darserort, bei einer gewöhnlichen Refraction, gegen 120 Fufs hoch genommen werden müsse. Ein so hoher Bau schien auf einer freien Düne, die allen Stürmen preisgegeben ist, mit den gewöhnlichen Mitteln und der nothwendigen Festigkeit nicht ausführbar; ehe aber zu aufsergewöhnlichen Mitteln gegriffen werden konnte, war erforderlich, alle Umstände einer genauen Prüfung zu unterwerfen, und namentlich die Entfernung sorgfältiger zu ermitteln. Es wurde daher, aus den vorläufigen Bestimmungen der Punkte von Darserort und Veigerslöse, ihre Entfernung durch Rechnnng abgeleitet und etwas geringer, in runder Zahl $= 23600$ T. gefunden. Da sich aber hierdurch die Höhe, welche für das Signal auf Darserort erforderlich gewesen wäre, fast um Nichts änderte, so wurde beschlossen, auf eine starke, ungewöhnliche Refraction zu rechnen, deren Coeffizient $k = 0{,}286$ angenommen wurde. Unter dieser Voraussetzung ergab sich, dafs man für den Beobachtungspfahl mit einer Höhe von 81 bis 82 Fufs, und für den Heliotropenstand mit einer Höhe von 105 Fufs über der Ostsee ausreichen würde. Der Beobachtungspfahl erhielt demnach eine Höhe von 63 Fufs über dem Boden ($81\frac{1}{2}$ Fufs über der Ostsee), und das um denselben aufgeführte starke Gerüst, welches den Fufsboden für die

Beobachter zu tragen hatte, noch einen $23\frac{1}{2}$ Fuſs höheren pyramidalen Aufsatz, der zur Aufstellung des Heliotropen für Veigerslöse benutzt wurde.

Im Jahre 1839 kam aber während des ganzen Monats September, wegen zu kleiner Refraction, kein Lichtblick von Veigerslöse nach dem Beobachtungspunkt auf Darserort herüber, obgleich man fast täglich gegen Abend das Licht am Meereshorizont hervortauchen sah, wenn man sich 6 bis 10 Fuſs über das Instrument erhob. Im August 1840 dagegen war die Refraction so beträchtlich, daſs nicht nur die Beobachtungen ohne alle Störung ausgeführt werden konnten, sondern daſs sogar einige Mal gegen Abend die ganze Küste von Falster zum Vorschein kam.

Die Annahme, daſs die Refraction die obige Gröſse erreichen werde, hängt lediglich von der Örtlichkeit ab (auf dem festen Lande wird man sie nicht machen dürfen), und setzt die Wahrscheinlichkeit voraus, daſs Luftströmungen häufig die auf dem festen Lande stark erwärmten Luftschichten über die kältere See führen, wodurch eine Wärmezunahme nach oben, und in Folge derselben eine Refraction entsteht, deren Coeffizient 0,25 übersteigt.*)

In der Kette von Stettin bis zur Berliner Grundlinie bildeten die groſsen Wälder nördlich und nordwestlich von Berlin das bedeutendste Hinderniſs, welches nur durch hohe Signale bei Prenden und Eichstädt beseitigt werden konnte.

Gröſsere Durchhaue durch Wälder sind vorgekommen:

Bei Wildenhof, in der Richtung nach Sommerfeld; bei Trunz, in der Richtung nach Stegen und Buschkau; zwischen dem Dombrowaberge und Schönwalderhütte; auf dem Kleistberge, in den Richtungen nach dem Klorberge, Sprengelsberge und nach Vogelsang; auf Vogelsang, in der Richtung nach Anklam; auf dem Colberge, in der Richtung nach dem Eichberge; in Ziethen, in der Richtung nach dem Müggelsberge. Der gröſste unter diesen Durchhauen war der zwischen Trunz und Stegen; seine Länge betrug $\frac{1}{4}$ Meile.

---

*) Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin, §. 33.

---

§. 12. Beschreibung der Instrumente und Gebrauch der Heliotropen.

Die Messung der horizontalen Winkel ist, mit Ausnahme der Station Lübeck, ausschliefslich mit demselben Ertelschen Theodoliten ausgeführt worden, den *Bessel* in der Gradmessung in Ostpreufsen beschrieben hat.

Der Azimuthalkreis desselben hat 15 Preufs. Zoll Durchmesser; das Beobachtungsrohr der Alhidade ist 19 Zoll lang, hat 21 Linien Öffnung und trägt an einem Ende seiner horizontalen Axe einen $7\frac{1}{2}$zölligen Höhenkreis, dessen 4 Nonien unmittelbar 4 Sec. angeben. Die 4 Nonien des Azimuthalkreises geben 2 Sec. an. Das Fernrohr hat in seinem Brennpunkt, in vertikaler und horizontaler Richtung, je zwei Parallelfäden, die etwa 22 Sec. von einander entfernt sind. Die Höhe der Axe des Fernrohrs über dem Horizontalkreise beträgt 10 Zoll; die Höhe derselben über dem Fufs des Instruments ist, je nachdem die Fufsschrauben mehr oder weniger herausgeschraubt sind, veränderlich, und beträgt gewöhnlich zwischen $16\frac{1}{3}$ bis $17\frac{1}{4}$ Zoll.

Das Instrument ist zum Multipliciren der Winkel eingerichtet, es kann daher die Alhidade nebst dem Fernrohr entweder für sich allein, oder auch mit dem äufseren Kreise zusammen bewegt werden. Die Axe des Fernrohrs wird durch eine aufzusetzende Wasserwage, an der jeder Theilstrich 3,''065 beträgt, horizontal gestellt. Ein Theilstrich der Wasserwage am Höhenkreise ist gleich 4,''76. Die vortreffliche Construction dieses Instruments, die sich auch bei den späteren Veränderungen desselben vollständig bewährt hat, verdanken wir dem Herrn Conferenzrath *Schumacher*.

Nach Beendigung der Gradmessung in Ostpreufsen und des Nivellements zur Bestimmung der Höhe von Berlin über der Ostsee,*) hatte die Theilung des Horizontalkreises durch den Transport an einigen Stellen sehr gelitten; er wurde daher vor dem Beginn der neuen Vermessung im Winter von $18\frac{36}{37}$ von *Pistor* neu getheilt.

Bei dem Anschlufs an die Dänischen Messungen, im Herbst 1839, wo *Schumacher* mit mir auf der Station Hiddensoe die Anschlufswinkel gemeinschaftlich beobachtete, fand sich Gelegenheit, die Mikrometer-Ablesungen des ihm gehörigen Repsoldschen Theodoliten mit den Nonien des Ertelschen zu

---

*) Beide Werke sind in Berlin bei *Dümmler* erschienen.

vergleichen, wobei sich ein entschiedener Vortheil für die Mikrometer herausstellte und den Wunsch hervorrief, an dem Ertelschen Theodoliten ebenfalls die Nonien gegen Mikrometer zu vertauschen. Im Winter von $18\frac{39}{40}$ wurde diese Veränderung von *Pistor* in der Art ausgeführt, daſs die Theilung von dem äuſseren Kreise ganz fortgenommen, und auf demselben in 180° Abstand zwei Plan-Mikroskope mit Parallelfäden und Mikrometern aufgesetzt wurden. Ein Schraubenumgang der Mikrometer entspricht sehr nahe einer Minute, und der Schraubenkopf ist in 120 gleiche Theile getheilt, so daſs halbe Secunden unmittelbar abgelesen werden können. Die Kreistheilung von 4 zu 4 Minuten wurde auf dem äuſseren Rande des Alhidaden-Kreises angebracht.

Diese Einrichtung gewährt den Vortheil, daſs durch die unabhängigen Bewegungen des äuſseren und inneren Kreises die Mikroskope auf jeden beliebigen Punkt der Kreistheilung gebracht werden können, ohne daſs sie versetzt zu werden brauchen.

Das Ablesen ist bei den Mikrometern viel leichter, als bei den Nonien, und die Ablesungsfehler sind mindestens eben so klein, als sie bei den Nonien waren; der Hauptvortheil aber besteht in einem beträchtlichen Zeitgewinn. Bei den Nonien waren durchschnittlich zu jeder Einstellung und Ablesung 5 Minuten Zeit erforderlich, während bei den Mikrometern noch nicht volle 3 Minuten dazu gebraucht werden.

Auſser dem Ertelschen Theodoliten wurde noch ein Theodolit von *Gambey* in Paris, der früher schon bei dem Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin gebraucht worden war, vorzugsweise zur Messung von Zenithdistancen und zu verschiedenen Nebenoperationen benutzt. Derselbe hat einen 12zölligen Azimuthal- und einen 12zölligen Höhenkreis, von denen der erste mit 2, der andere mit 4 Nonien versehen ist, welche eine unmittelbare Ablesung der Winkel von 3 Secunden gestatten. Das Beobachtungsrohr befindet sich ex centro an der horizontalen Axe des Höhenkreises. Zur Messung eines centralen Winkels sind daher vier Einstellungen, z. B. zwei mit Kreis rechts und zwei mit durchgeschlagenem Fernrohr und Kreis links, erforderlich. Ein Theilstrich der Wasserwage am Höhenkreis giebt 3,″63 an, und die gemeinschaftliche Axe des Fernrohrs und des Höhenkreises steht 0,ᵀ1739 über dem Fuſs des Instruments. Der Höhenkreis *) giebt die Zenith-Distance um 2,″68 zu groſs an.

---

*) Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin, §. 20.

Die Heliotropen, welche angewendet wurden, sind von einfacher Construction (Fig. 3. Taf. III.). AB ist ein Brett von festem, gutem Holz mit Ölfarbe angestrichen, in dessen Mitte eine gerade Linie gezogen ist. Auf dieser Linie befindet sich:

1. Die Schraube a, die zum Heben und Senken des Brettes bestimmt ist.
2. Der Spiegelrahmen b, der sich um die vertikale Axe h dreht. In diesem Rahmen bewegt sich der in Metall gefaſste Spiegel ef um die horizontale Axe ki, in deren Mitte g sich in der Fassung ein kleines rundes Loch befindet, welches die Stelle eines Oculars vertritt. Central um dieses Ocular befindet sich im Spiegel selbst ein etwa 2 Linien im Durchmesser haltender, runder Ausschnitt, welcher bewirkt, daſs der Mittelpunkt kein Licht zurückwerfen kann, und daher bei der Lichtreflection der Spiegelfläche einen kleinen runden Schatten bildet.
3. c ist eine Schraube, vermittelst welcher der Heliotrop im Centrum festgeschraubt wird.
4. d ist eine horizontale, etwa $1\frac{1}{2}$ Zoll lange Röhre, die auf einem vertikalen Zapfen festgelöthet ist. In der Axe dieser Röhre befindet sich ein Fadenkreuz, welches mit dem Mittelpunkt des Spiegels gleiche Höhe über dem Brett hat; l ist eine Klappe, die inwendig mit weiſsem Papier beklebt ist, und auf- und zugemacht werden kann. Sämmtliche Zapfen und Schrauben in dem Brett laufen in metallenen Buchsen.

Die Aufstellung und der Gebrauch der Heliotropen sind ebenfalls sehr leicht. Wenn die Schraube c im Centrum befestigt und das Instrument nahe in die Richtung derjenigen Station gebracht ist, nach welcher geleuchtet werden soll, so findet man die genaue Richtung desselben dadurch, daſs man das Auge hinter die Öffnung g im Spiegel bringt, und das Fadenkreuz in der Hülse d auf das Object einrichtet. Das hierzu erforderliche Heben oder Senken geschieht vermittelst der Schraube a, und die Azimuthal-Bewegung erfolgt um die Schraube c. Ist die Aufstellung berichtigt, dann wird die Klappe l vorsichtig heruntergeklappt, und mit dem Spiegel das Sonnenlicht so in die Röhre geworfen, daſs der runde Schatten, welcher vom Mittelpunkt des Spiegels ausgeht, auf dem weiſsen Papier der Klappe central über dem Fadenkreuz erscheint. Da die vom Spiegel reflectirten Strahlen parallel mit der Richtung des runden Schattens gehen, so bedarf das Instrument gar keiner anderweitigen Berichtigung, und das Licht wird überall da sichtbar sein, wo der Schatten hingerichtet ist. Wird daher der Schatten stets über dem Fadenkreuz erhalten, so wird der Beobachter auf der Station, nach welcher der Heliotrop die Richtung hat, auch beständig Licht sehen.

Anstatt der wagerechten, auf einem vertikalen Zapfen stehenden Hülse *d* kann auch die mit einem ähnlichen Zapfen versehene Messingplatte *mn* in *d* eingesetzt werden, so daſs die Fläche *mn* senkrecht zu der Linie *AB* ist. In der Mitte dieser Platte, die etwas breiter als der Spiegel in *b* sein muſs, befindet sich ein vertikaler, $\frac{3}{4}$ bis 1 Zoll breiter Einschnitt, der bei *q* ein Fadenkreuz, und um dasselbe eine senkrecht gegen die Fläche *mn* stehende, etwa 1 Zoll lange Röhre trägt. In der Seitenansicht der Platte *uv* ist *w* diese Röhre.

Sobald der Heliotrop so gestellt ist, daſs Ocular und Fadenkreuz sich in der Richtung nach dem Object befinden, nach welchem geleuchtet werden soll, wird eine Glasplatte *rs*, die in der Mitte mit einem etwa $\frac{1}{2}$ Zoll breiten Streifen von weiſsem Papier beklebt ist, in den Einschnitt *op* geschoben, so daſs der Papierstreifen sich hinter dem Fadenkreuz befindet. Wird jetzt der Spiegel *b* so gedreht, daſs der runde Schatten vom Mittelpunkt auf das Fadenkreuz fällt, so erhält das Object, nach der Farbe des Glases, ein grünes, rothes u. s. w. Licht.

Diese Vorrichtung giebt bei kleineren Entfernungen ein angenehmes Licht, und kann bis zu Entfernungen von 3 bis 4 Meilen mit Vortheil gebraucht werden.

§. 13. Aufstellung der Instrumente und Sichtbarmachung der Dreieckspunkte.

Wo die Örtlichkeit die Messung unmittelbar an der Erde gestattete, wurden $3\frac{1}{4}$ Fuſs hohe, 18 Zoll im Durchmesser haltende Pfeiler von Stein, Mauerwerk oder eingegrabenen Holzstämmen errichtet, auf denen das Centrum der Station bezeichnet wurde, und die zur Aufstellung des Theodoliten, der Heliotropen oder sonstigen Signalisirungen dienten. Wo kleine Waldstriche die Aussicht hinderten, wurden Durchhaue gemacht, wo aber groſse Wälder, Erhebungen des Bodens oder andere nicht wegzuräumende Gegenstände die Fernsicht von der Erde aus nicht gestatteten, wurden höhere Signale aufgeführt. Fig. 2. Taf. III. giebt eine Ansicht von einem solchen Signal: *ab* ist der in der Mitte von starkem Bauholz errichtete Beobachtungspfahl, der durch 4 starke Stützen gegen Erschütterungen durch den Wind geschützt ist. Um den Beobachtungspfahl herum, und völlig isolirt von demselben, ist ein durch Leitern zu ersteigendes Gerüst für die Beobachter errichtet, welches $3\frac{1}{4}$ Fuſs unter der oberen Fläche des Pfahls einen bequemen Fuſsboden, und in der Höhe des Pfahls ein Geländer hat. Die meisten dieser Signale haben zwischen 10 und 30 Fuſs Höhe, doch kommen auch Fälle vor, wie z. B. auf Darserort, wo der Beobachtungspfahl, um nach Veigerslöse auf der Insel Falster sehen zu können, 63 Fuſs, und ein Fall sogar (bei dem Signal Prenden), wo er durch auf einander gesetzte Sägeblöcke 83 Fuſs hoch aufgeführt werden muſste, weil ein meilenweit ausgedehnter, 70 bis 80 Fuſs hoher Hochwald den Ort des Signals umgab, und keine bessere Auswahl der Dreieckspunkte zur Bildung eines Polygons um Berlin aufgefunden werden konnte. Der Lieut. und Ingenieur Geograph *Bertram*, der den Bau des Signals leitete, wuſste dem Beobachtungspfahl durch eine sinnreiche Construction solche Festigkeit zu geben, daſs bei sehr mäſsigem Winde und den ergriffenen Schutzmaſsregeln kaum eine störende Erschütterung zu bemerken war. Diese Schutzmaſsregeln bestanden darin, daſs auf der Windseite, auswendig an dem Gerüst auf welchem sich die Beobachter befanden, und das, wie erwähnt, von dem Beobachtungspfahl völlig isolirt war, von oben bis in den Wald herunter Leinwand ausgespannt wurde. Den Hauptschutz gewährte indessen der Wald, und es ist sehr wahrscheinlich, daſs ohne denselben die Messungen in dieser

Höhe kaum ausführbar gewesen sein würden. Sobald der Wind so stark wurde, dafs die Erschütterungen einen nachtheiligen Einflufs befürchten liefsen, wurden die Beobachtungen eingestellt.

Dadurch, dafs auf den hohen Signalen meist nur bei völliger Windstille beobachtet werden konnte, ging allerdings viel Zeit verloren, auf die Sicherheit der Messungen scheinen sie aber keinen bemerkbar nachtheiligen Einflufs gehabt zu haben.

Über jedem Beobachtungspfeiler, so wie über den Beobachtungspfählen der höheren Signale, wurde für die Dauer der Beobachtungen ein leichtes Gerüst aufgeführt. Dasselbe bestand aus 4 Eckstangen, die drei bis vier Fufs über den Pfeiler oder Pfahl hervorragten, und oben durch Latten unter sich und kreuzweise verbunden waren. Diese Vorrichtung diente dazu, um das Instrument durch ausgespannte Leinwand gegen Wind und Sonne zu schützen, und ist einem eigentlichen Zelte vorzuziehen.

Bei der Aufstellung des Theodoliten mufs zwar das Centrum desselben immer senkrecht über den Dreieckspunkt gebracht werden, allein die Vorsicht, mit der man dabei zu Werke gehen mufs, vergröfsert sich, wenn man von kleinen Seiten auf gröfsere übergehen will, wie dies bei der Messung der Grundlinie der Fall war. Es sollen daher die Mittel näher angegeben werden, deren man sich zur möglichst vollständigen Erreichung des Zweckes bediente. Die lothrechte Axe des Theodoliten, die unter dem Fufsgestell desselben zum Vorschein kömmt, und die früher stumpf endigte, hatte *Pistor* zu einer Spitze abgedreht, und die oberen Flächen der Beobachtungspfeiler waren bei ihrer Errichtung möglichst genau in eine horizontale Lage gebracht worden. Nachdem der Theodolit näherungsweise über das Centrum gebracht war, wurde ein rechtwinkliges Dreieck mit einer Kathete auf die Fläche des Pfeilers so aufgesetzt, dafs die andere Kathete lothrecht stand; längs der lothrechten Kathete wurde nun nach dem Centrum visirt, und die Spitze der Axe des Theodoliten in diese Vertikalebene gebracht. Dasselbe Verfahren wurde dann in einer um 90° veränderten Richtung vorgenommen, und in beiden Richtungen so lange wiederholt, bis die Spitze der Axe in beiden auf einander senkrechten, und durch das Centrum der Station gehenden Vertikalebenen erschien.

Bei den Winkelbeobachtungen der ganzen Dreieckskette ist fast ausschliefslich Heliotropenlicht zur Sichtbarmachung der entfernten Stationen angewendet worden; nur in einigen wenigen Fällen, wo die Entfernungen nicht grofs waren, und die Objecte den Himmel als Hintergrund hatten, wurden aufser den Heliotropen rectangulaire schwarze Tafeln als Zielpunkte benutzt, die senkrecht über den Dreieckspunkten aufgestellt waren. Die Spiegel der Heliotropen wurden, den Entfernungen und der Durchsichtigkeit der Luft angemessen, bald vergröfsert bald verkleinert, welches schnell und leicht durch Aufkleben von Papier, oder Abschaben desselben bewirkt werden kann. Häufig wird die Stärke des Lichts schon hinreichend gemildert, wenn man den Spiegel mit Fett bestreicht. Die geübteren Heliotropisten wurden zur Vergröfserung oder Verkleinerung der Spiegel durch Heliotropensignale aufgefordert, die in dem Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin beschrieben sind; die weniger geübten durch Boten. Die Heliotropen-Telegraphie ist überhaupt bei der Anwendung des Heliotropenlichtes zu geodätischen Operationen ein so unentbehrliches Hülfsmittel, dafs ohne dieselbe die schöne Erfindung, mit der *Gaufs* die praktische Geodäsie bereicherte, viel von ihren Vortheilen verliert, wenn die Heliotropisten auf 6 bis 8 Meilen entfernten Stationen durch Boten auf die begangenen Fehler aufmerksam gemacht werden müssen. Das Mittel, die Zeichen zu geben, besteht im secundenweisen Zu- und Aufdecken des Spiegels, wodurch Lichtblicke entstehen, die gezählt werden können. Trennt man diese Lichtblicke durch längere Pausen, und läfst man die vor der ersten Pause *Einer,* die vor der zweiten *Zehner* u. s. w. bedeuten, so kann man jede beliebige Zahl telegraphiren. Für das gewöhnliche Bedürfnifs reichen indessen 5 bis 6 Zeichen aus.

Bei der Basisoperation wurden, auf den Stationen in der Nähe der Grundlinie, schwarze Tafeln mit einem, nach den Entfernungen 3 bis 5 Zoll breiten Strich in der Mitte, als Zielpunkte benutzt. In dem breiten Fufsgestell dieser Tafeln waren drei Holzschrauben eingeschraubt, durch die ihre vordere Fläche lothrecht gestellt werden konnte. In der Mitte des weifsen Streifens befand sich eine feine schwarze Linie, die durch Visiren von oben herunter leicht über das Centrum zu bringen war. Hinter der Tafel auf ihrem Fufsgestell wurde ein Gewicht von einem halben Centner aufgesetzt, um ihr Festigkeit gegen Verschiebungen durch den Wind zu geben, und ein Wächter schützte sie aufserdem gegen Muthwillen.

Auf den entfernteren Stationen der Basisoperation, wo die Sichtbarkeit der Tafeln nicht ausreichte, wurden Heliotropen aufgestellt, deren Licht durch einen lothrechten Ausschnitt in einer Messingplatte ging, und durch eingeschobene, gefärbte Glasplatten gedämpft wurde. Von verschieden gefärbten

Gläsern schienen die grünen das angenehmste Licht zu geben. Um diese Heliotropen genau im Centrum aufstellen zu können, war in der Mitte der Sandstein- oder Granitplatten der Signalpfeiler ein metallenes Centrum mit einer Schraubenmutter eingegossen, in welche die Schraube des Heliotropen paſste. Für gewöhnlich wurde eine zweite Schraube, auf deren Kopf das Centrum bezeichnet war, eingesetzt, die herausgeschraubt wurde, wenn der Heliotrop aufgestellt werden sollte. Auf den Kirchthürmen, welche in dem Dreiecksnetz vorkommen, wurden ebenfalls Heliotropen aufgestellt, denen durch einen besonderen Spiegel *C* (Fig. 3. Taf. III.), der in einer Thurm-Luke angebracht war, Licht zugeworfen wurde. Wenn die Thürme aber beschattet waren, dann wurden die Helmstangen unter den Knöpfen beobachtet. Die Lothlinie der Helmstangen, welche die Dreieckspunkte bildet, wurde von auſserhalb vermittelst des Theodoliten, aus zwei gegen einander rechtwinkligen Richtungen bis zum Beobachtungspunkt herunter gelothet, und danach die Elemente zur Reduction auf das Centrum bestimmt.

---

§. 14. Berichtigung der Instrumente.

Die Berichtigung der einzelnen Theile des Theodoliten, wenn dieselbe wünschenswerth erschien, wurde in folgender Weise ausgeführt:

1. *Stellung des Fadennetzes.* Nachdem das Fernrohr auf einen entfernten aber deutlichen Gegenstand gerichtet, und das Ocular-Ende so herausgezogen ist, daſs es ein deutliches Bild giebt, bringt man das Fadennetz in den Brennpunkt. Die Stellung desselben ist richtig, wenn die Fäden schwarz und deutlich erscheinen, und wenn ein zwischen die Fäden gestellter Gegenstand, bei einer Hin- und Herbewegung des Auges vor dem Ocular unbeweglich in der Mitte der Fäden bleibt.
2. *Berichtigung der Wasserwage.* Wenn das Instrument durch die auf die Axe des Fernrohrs aufgesetzte Wasserwage an den Fuſsschrauben in zwei auf einander senkrechten Richtungen vorläufig horizontirt ist, bringe man die Blase der Wasserwage genau in die Mitte. Hierauf wird die Wasserwage um 180° umgesetzt, so daſs das Ende, welches vorher rechts war, nach links zu stehen kömmt. Die Abweichung der Blase gegen die vorige Stellung wird bemerkt, und die Hälfte dieser Abweichung an den Fuſsschrauben, die andere Hälfte an der Wasserwage verbessert. Wenn man nun die Wasserwage abermals um 180° umsetzt, und sie zeigt eben so wie vorher, so ist sie berichtigt; ist dies aber nicht der Fall, so wird die Verbesserung, in derselben Art wie vorhin, so lange wiederholt, bis die Blase vor und nach dem Umsetzen in der Mitte bleibt.
3. *Berichtigung der Axe des Fernrohrs.* Nachdem die Wasserwage berichtigt ist, wird das Instrument in zwei auf einander senkrechten Richtungen horizontirt, dann das Fernrohr um die Alhidaden-Axe um 180° gedreht. Spielt die Wasserwage nun noch richtig, so steht die Axe des Fernrohrs senkrecht auf der Alhidaden-Axe, ist dies nicht der Fall, so wird die Hälfte der Abweichung, welche die Wasserwage angiebt, an den Fuſsschrauben, die andere Hälfte an dem mit Zug- und Druckschrauben versehenen Axenträger verbessert. Dies Verfahren wird so lange wiederholt, bis die Wasser-

wage nach einer Umdrehung der Alhidade um 180°, eben so zeigt wie vorher.

4. *Berichtigung der optischen Axe.* Nachdem man einen deutlichen Gegenstand im Fernrohr eingestellt, und die Richtung an den Mikroskopen abgelesen hat, hebt man dasselbe (weil es sich an dem Ertelschen Theodoliten nicht durchschlagen läſst) aus seinen Lagern heraus und legt es um 180° um, ohne jedoch die Enden der Axe zu vertauschen, stellt denselben Gegenstand abermals ein, und liest die Richtung ab. Stimmen beide Ablesungen der Richtung auf 180° überein, so ist die Lage der optischen Axe richtig, ist dies nicht der Fall, so wird die Hälfte der Abweichung an den Schrauben, welche das Fadennetz bewegen, verbessert, dann der Gegenstand von Neuem eingestellt und das vorhergehende Verfahren so lange wiederholt, bis die Richtungen vor und nach dem Umlegen übereinstimmen.

Diese Berichtigungen des Theodoliten brauchen vor jeder Campagne nur einmal gemacht zu werden, damit man sicher ist, daſs keine groben Fehler vorhanden sind. Die kleineren Fehler, die sich auch bei der sorgfältigsten Berichtigung nie ganz, oder wenigstens nicht auf längere Zeit fortschaffen lassen, müssen durch die Anordnung der Beobachtungen aus dem Resultat geschafft werden.

Die gewöhnliche Aufstellung des Theodoliten, bei der es nur darauf ankömmt, die Drehungsaxe desselben lothrecht zu stellen, ist leicht und schnell zu bewerkstelligen. Man horizontirt zu dem Ende vorläufig, liest dann die Wasserwage an einem bestimmten Ende, welches das Kreisende heiſsen mag, ab, dreht die Alhidade um 180° und liest die Wasserwage abermals an dem Kreisende ab. Den halben Unterschied dieser Ablesungen verbessert man an den Fuſsschrauben. Dann dreht man die Alhidade wieder um 180° zurück, und wenn die Wasserwage in dieser Stellung noch einen kleinen Unterschied gegen die vorhergehende zeigt, so wird wieder die Hälfte desselben an den Fuſsschrauben verbessert. In dieser Weise setzt man die Verbesserungen fort, bis die Stellung der Wasserwage vor und nach der Drehung dieselbe bleibt. Hierauf dreht man die Alhidade um 90° und bringt die Wasserwage vermittelst der Fuſsschrauben in dieselbe Stellung, welche sie zuletzt in der vorhergehenden Richtung hatte. Ist das Instrument so aufgestellt, daſs die Wasserwage bei einer vollen Umdrehung der Alhidade unverändert stehen bleibt, so ist die Axe der Alhidade lothrecht, und die Beobachtungen können ihren Anfang nehmen. Es versteht sich von selbst, daſs die Wasserwage hierbei nicht in der Mitte einzuspielen braucht, sondern auf jeden beliebigen Theilstrich zeigen kann; es ist daher auch selbst dann, wenn dieselbe ganz in Unordnung gekommen sein sollte, nur nöthig, sie nach № 2. näherungsweise zu berichtigen. Bei jeder Prüfung der horizontalen Stellung des Instruments muſs diese Operation vollständig wiederholt werden, weil die Blase der Wasserwage mit der wechselnden Temperatur ihre Länge ändert.

Wenn sich der Fall ereignet, daſs man die Wasserwage bei den Drehungen der Alhidade nicht auf einem bestimmten Theilstrich erhalten kann, so ist dies ein Beweis, daſs die Axe derselben einen zu groſsen Spielraum hat, und deswegen hin und her schwankt; sie muſs alsdann tiefer eingesenkt werden.

Auſser diesen Berichtigungen wurde das Instrument auch rücksichtlich seiner übrigen Bewegungen untersucht, und geprüft, ob die Unveränderlichkeit der Feststellungen, die bei dem Beobachten vorausgesetzt wird, auch wirklich stattfinde. Die Feststellungen und Mikrometer-Bewegungen können in folgender Weise geprüft werden:

Nachdem das Instrument im Übrigen berichtigt und horizontirt ist, stellt man ein deutliches Object zwischen die Fäden des Fernrohrs in der Art ein, daſs man die Mikrometerschraube nur nach einerlei Richtung dreht, z. B. nach rechts. Hat man dabei die Schraube zu weit gedreht, so dreht man sie wieder zurück und stellt von Neuem ein, so lange, bis die Einstellung durch die bloſse Rechtsdrehung der Schraube gelungen ist. Hat man die Richtung abgelesen, so bringt man das Object vermittelst der Mikrometerschraube auf die entgegengesetzte Seite der Fäden, stellt es nun durch Linksdrehen der Schraube abermals ein, und liest wieder ab. Stimmen beide Ablesungen überein, so ist in dieser Beziehung kein Fehler zu befürchten. Dies ist aber selten oder nie der Fall; es zeigt sich vielmehr bei diesen Einstellungsweisen fast immer ein constanter Fehler, der gewöhnlich einer Biegung der Speichen zugeschrieben wird, weil er sich weder durch die Einrichtung der Klemmen, noch durch die Versicherung gegen einen todten Gang der Schrauben ganz fortschaffen läſst. Hat man sich überzeugt, daſs die Klemmen gut und vollständig wirken, und ist gegen den todten Gang der Schrauben durch eine Feder gesorgt, die gegen dieselben drückt (die indessen nicht zu stark und nicht zu wenig angespannt sein darf), so kann, wenn dennoch ein Fehler übrig bleibt, derselbe dadurch aus dem Resultat geschafft werden, dafs man bei dem Einstellen der Objecte die Mikrometerschraube stets nach einerlei Richtung dreht.

Eine andere Fehlerquelle entsteht, wenn die Bewegungen des Instruments anfangen schwer zu gehen. Dies ist der Fall, wenn niedrige Temperaturen eintreten, oder wenn das Öl an den Axen sich verdickt. Im ersten Falle wurde die Axe ein wenig gehoben, im zweiten reichte oft ein Tropfen Öl aus; wenn dieser aber seine Wirkung versagte, so wurde das Instrument aus einander genommen und gereinigt.

§. 15. Gebrauch der Mikrometer und Ermittelung ihrer Schraubentheile in Secunden.

Die Eintheilung des Ertelschen Theodoliten geht, vom Centrum ausgesehen, rechts herum, und in demselben Sinne muſs auch die Eintheilung des Kopfes der Mikrometerschraube gehen. Hieraus folgt, daſs man das Fernrohr nach links drehen muſs, wenn die Gradzahlen wachsen sollen, die der Zeiger an dem feststehenden Mikroskop angiebt, und daſs bei kleinen Bewegungen des Fernrohrs nach links, ein vorher zwischen die Fäden des Mikroskops gestellter und abgelesener Theilstrich, in demselben nach links auszuweichen scheint, weil es die Bilder umkehrt. Eben so folgt auch, daſs bei einer Bewegung der Mikrometerschraube nach links die Zahlen der Theilung des Schraubenkopfes wachsen. Man wird also den Winkel einer kleinen Drehung des Fernrohrs nach links in Theilen des Mikrometers messen, wenn man die Schraube links dreht, und den im Mikroskop links ausgewichenen Theilstrich wieder einstellt. Zieht man die erste Ablesung von der zweiten ab, so giebt der Unterschied, in Secunden verwandelt, den gesuchten Winkel, der der ersten Richtung des Fernrohrs hinzugefügt werden muſs, um die zweite zu erhalten.

Der Kreis ist von 4 zu 4 Minuten eingetheilt, und die Schrauben der Mikrometer geben für ein solches Intervall nahe 4 Umgänge. Damit man aber nicht nöthig habe, die vollen Umgänge der Schraube direct zu zählen, so ist in dem Felde des Mikroskops ein gezähnter Index angebracht, an dem sich zwischen je 4 Zähnen ein tieferer Einschnitt befindet, der so eingerichtet ist, daſs die Bewegung der Parallelfädan, von einem Einschnitt zum andern, einem vollen Umgange der Schraube, oder einer Minute entspricht. Dieser Index wird in folgender Weise zum Ablesen benutzt: Zuerst bringt man die Fäden in die Mitte des Feldes des Mikroskops und stellt den Schraubenkopf auf Null. Dann stellt man den Index vermittelst der ihn bewegenden Schraube so, daſs ein tieferer Einschnitt zwischen die Fäden zu stehen kömmt. Diese Stellung ist der Nullpunkt, von dem alle Ablesungen im Mikroskop ausgehen.

Will man nun die Richtung nach einem Object bestimmen, so stellt man dasselbe im Fernrohr ein, liest am Kreise die Grade und Minuten bis zu demjenigen Theilstrich ab, der links von den Fäden der nächste ist. Hierauf bringt man diesen Theilstrich zwischen die Fäden im Mikroskop und liest am Index, von dem Einschnitt in der Mitte oder von dem Nullpunkt bis zu den Fäden, zuerst die vollen Umgänge, und dann am Kopf der Schraube die 60tel Umgänge und die Theile derselben ab. Diese Ablesung in Minuten und Secunden verwandelt, und den am Kreise abgelesenen Graden und Minuten hinzugefügt, giebt die gesuchte Richtung.

Der Werth der Schraubenumgänge in Secunden wird gefunden, wenn man im Mikroskop zuerst den Theilstrich rechts von den Fäden einstellt und abliest, und dann durch Linksdrehen der Schraube, wobei die Theilung am Schraubenkopf beständig wächst, den nächsten Theilstrich links einstellt und abliest. Zieht man die erste Ablesung von der zweiten ab, so erhält man das Intervall von 4 Minuten auf dem Kreise in Schraubenumgängen; zieht man aber die zweite Ablesung von der ersten ab, so erhält man die Verbesserung, welche für das Intervall von 4 Minuten an den Schraubenumgängen angebracht werden mufs, um sie auf Secunden zu reduciren. Z. B. die Ablesung rechts sei 25,5, die Ablesung links 4 Umgänge und 27,6 Theile, so erhält man $4' = 4\frac{2,1}{60}$ Umgänge oder $240'' = 242,1$ Theile der Schraube. Zieht man die Ablesung links von der rechts ab, so ist die Verbesserung $= -2,1$ Theile. Man erhält daher x Theile der Schraube $= (x - \frac{2,1 . x}{242,1})$ Secunden. Solche Ermittelungen wurden auf verschiedenen Stellen des Kreises durch die ganze Peripherie hindurch gemacht, und das arithmetische Mittel aus allen zur Reduction der Mikrometer-Angaben auf Secunden benutzt. Z. B.:

Ablesungen am Kreise	I. Mikroskop links	I. Mikroskop rechts	Differenz	II. Mikroskop links	II. Mikroskop rechts	Differenz
0° 0′	47,7	44,3	— 0,4	33,7	36,2	+ 2,5
30 0	30,9	29,5	— 1,4	19,0	21,9	+ 2,9
60 0	37,2	37,3	+ 0,1	27,5	29,9	+ 2,4
90 0	18,6	17,2	— 1,4	7,2	9,6	+ 2,4
120 0	23,6	24,1	+ 0,5	15,4	18,3	+ 2,9
150 0	9,7	10,6	+ 0,9	59,8	63,2	+ 3,4
180 0	26,5	24,8	— 1,7	9,8	12,3	+ 2,5
210 0	35,2	34,6	— 0,6	15,7	18,5	+ 2,8
240 0	37,8	38,4	+ 0,6	15,1	18,0	+ 2,9
270 0	25,6	24.0	— 1,6	59,4	62,1	+ 2,7
300 0	30,6	30,2	— 0,4	3,9	7,5	+ 3,6
330 0	34,3	34,7	+ 0,4	6,7	8,9	+ 2.2
		Summe	— 5,0		Summe	+ 33,2
mittlerer Werth			— 0,417	....		+ 2,766

Diese Ermittelungen wurden öfter und auf anderen Stellen des Kreises wiederholt, und dann Tafeln angefertigt, mit deren Hülfe die Angaben der Mikrometer auf Secunden reducirt wurden.

In Bezug auf die Berichtigung der Mikroskope ist zu bemerken:

1. Das deutliche Sehen der Theilstriche auf dem Kreise wird durch ein Heben oder Senken der ganzen Hülse des Mikroskops erlangt.
2. Wenn die Fäden im Felde des Mikroskops mit den Theilstrichen auf dem Kreise nicht parallel laufen, so verbessert man ihre Stellung durch ein aufwärts oder niederwärts Drehen des horizontalen Prismas, in welchem sich der Index und die Mikrometerschraube befinden.

---

§. 16. Ermittelung der Werthe der Theilstriche der Wasserwagen in Secunden.

Wenn man die Wasserwage, deren Theilstriche bestimmt werden sollen, mit dem Fernrohr eines Höhenkreises so in Verbindung bringt, daſs sie jede Bewegung desselben mitmachen muſs, und daſs sich die Längenaxe der Blase in der Mitte der Theilstriche auf der Röhre, mit dem Höhenkreise in einer parallelen Ebene bewegt, so können aus einer Anzahl Beobachtungen der Höhenwinkel, bei denen man der Blase der Wasserwage nach und nach verschiedene Stellungen giebt, die Werthe der Theilstriche in Secunden gefunden werden. Die Schärfe der Bestimmung hängt von der Genauigkeit ab, mit der die Höhenwinkel gemessen werden.

Bedeuten a, a', a'' .... die Ablesungen am Höhenkreis; n, n', n'' .... die correspondirenden Stellungen der Blase der Wasserwage, die man findet, wenn beide Enden der Blase abgelesen werden, und das Mittel aus beiden Ablesungen genommen wird (dies Verfahren ist nothwendig, um die, während der Beobachtungszeit stattgefundene Veränderung der Temperatur unschädlich zu machen), so erhält man den zwischen den Angaben der Wasserwage n und n' durchlaufenen Bogen $= a' - a$ u. s. w. Auf diese Weise findet man die folgenden correspondirenden Werthe der Kreistheilung und der Niveauangaben:

$$a - a \;......\; n$$
$$a' - a \;......\; n'$$
$$a'' - a \;......\; n''$$
u. s. w.

Setzt man, um abzukürzen, $a - a = 0$; $a' - a = m'$; $a'' - a = m''$ .... und bezeichnet man durch y den Werth eines Theilstrichs der Wasserwage in Secunden; durch x die Anzahl Secunden welche $= ny$ ist, so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$0 = x + ny \quad .... \; 1.$$
$$m' = x + n'y$$
$$m'' = x + n''y$$
u. s. w.

Da nur 2 Unbekannte in diesen Gleichungen vorkommen, so müssen sie nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt werden, d. h. die folgende Function muſs zu einem Minimum gemacht werden:

$$2\,\Sigma = (+x+ny)^2 + (-m'+x+n'y)^2 + (-m''+x+n''y)^2 + \ldots$$

Differentiirt man dieselbe zuerst nach x, dann nach y, und setzt die Differentialquotienten gleich 0, so findet man:

$$\frac{d\Sigma}{dx} = 0 = (x+ny) + (-m'+x+n'y) + (-m''+x+n''y) + \ldots \quad 2.$$

$$\frac{d\Sigma}{dy} = 0 = (+nx+n^2y) + (-n'm'+n'x+n'^2y) + (-n''m''+n''x+n''^2y) + \ldots 3.$$

Die zusammengehörigen Werthe in jeder dieser Gleichungen summirt, geben zwei Gleichungen von der Form:

$$an = aax + aby$$
$$bn = abx + bby,$$

deren Auflösung den gesuchten Werth von y giebt.

Die Gleichung 3. erhält man auch, wenn man sämmtliche Gleichungen 1. mit den Coeffizienten von y multiplizirt und summirt; und die Gleichung 2., wenn man sämmtliche Gleichungen 1. summirt.

Zur Bestimmung der Theilstriche der Wasserwage, welche zum Horizontiren des Ertelschen Theodoliten dient, wurde dieselbe auf dem Fernrohr des Meridiankreises der Königsberger Sternwarte befestigt und die nachfolgenden Beobachtungen gemacht:

Ablesungen am Höhenkreis	Wasserwage rechts	Wasserwage links	Werthe von n, n' ...	Werthe von a, a' ...	Endgleichungen.
21,645	− 23,8	+ 7,4	− 8,2	0,000	$+3{,}508 = 5\,x - 1{,}85\,y$
21,974	− 20,2	+ 10,9	− 4,65	0,329	$+13{,}702 = -1{,}85\,x + 163{,}4875\,y$
22,328	− 15,8	+ 15,3	− 0,25	0,683	
22,676	− 12,3	+ 18,8	+ 3,25	1,031	$x = 0{,}73470;\quad y = 0{,}090097$
23,110	− 7,6	+ 23,6	+ 8,0	1,465	
23,138	− 7,5	+ 23,7	+ 8,1	1,430	$+3{,}567 = 5\,x + 0{,}35\,y$
22,826	− 11,2	+ 19,9	+ 4,35	1,118	$+14{,}8512 = +0{,}35\,x + 161{,}0975\,y$
22,383	− 15,9	+ 15,2	− 0,35	0,675	
22,052	− 15,5	+ 11,6	− 3,95	0,344	$x = 0{,}70714;\quad y = 0{,}090652$
21,708	− 23,4	+ 7,8	− 7,8	0,000	
21,708	− 23,5	+ 7,6	− 7,95	0,000	$+3{,}531 = 5\,x + 1{,}1\,y$
21,990	− 20,0	+ 11,1	− 4,45	0,282	$+15{,}2522 = 1{,}1\,x + 164{,}59\,y$
22,506	− 14,2	+ 16,9	+ 1,35	0,798	
22,777	− 11,2	+ 19,9	+ 4,35	1,069	$x = 0{,}68650;\quad y = 0{,}088077$
23,090	− 7,8	+ 23,4	+ 7,8	1,382	

Ablesungen am Höhenkreis	Wasserwage rechts	Wasserwage links	Werthe von n, n' ...	Werthe von a, a' ...	Endgleichungen.
23,115	— 7,7	+ 23,5	+ 7,9	1,354	$+ 3{,}417 = 5\,x + 1{,}70\,y$
22,723	— 12,1	+ 19,0	+ 3,45	0,962	$+ 13{,}3407 = + 1{,}70\,x + 137{,}68\,y$
22,474	— 15,0	+ 16,1	+ 0,55	0,713	
22,149	— 18,3	+ 12,8	— 2,75	0,388	$x = 0{,}65300; \quad y = 0{,}088830$
21,761	— 23,0	+ 8,1	— 7,45	0,000	
21,714	— 23,5	+ 7,6	— 7,95	0,000	$+ 3{,}525 = 5\,x + 1{,}6\,y$
22,032	— 19,5	+ 11,6	— 3,95	0,318	$+ 15{,}3789 = 1{,}6\,x + 163{,}74\,y$
22,475	— 14,5	+ 16,7	+ 1,1	0,761	
22,766	— 11,2	+ 19,9	+ 4,35	1,052	$x = 0{,}67635; \quad y = 0{,}087307$
23,108	— 7,5	+ 23,6	+ 8,05	1,394	
23,155	— 7,0	+ 24,1	+ 8,55	1,418	$+ 3{,}483 = 5\,x + 2{,}2\,y$
22,729	— 11,8	+ 19,2	+ 3,7	0,992	$+ 14{,}9058 = 2{,}2\,x + 152{,}04\,y$
22,415	— 15,2	+ 15,9	+ 0,35	0,678	
22,132	— 18,4	+ 12,7	— 2,85	0,395	$x = 0{,}65720; \quad y = 0{,}088523$
21,737	— 23,1	+ 8,0	— 7,55	0,000	

Hätte man die Ablesungen der Wasserwage mit entgegengesetzten Zeichen notirt, so hätte man dieselben Werthe für y aber auch mit entgegengesetzten Zeichen gefunden.

Aus den obigen 6 Bestimmungen findet man den mittleren Werth von

$y = 0{,}089526$ Umgängen der Schraube.

Ein Umgang der Schraube ist aber $= 34'',239$, und daraus folgt der Werth eines Theilstriches der Wasserwage $= 3'',065$. (§. 12.)

Die Summe der Quadrate der Fehler von den 6 Bestimmungen von y ist $= 0{,}000010257104$, und da $\varepsilon\varepsilon = \frac{1}{n}(vv)$, so findet man den mittleren Fehler eines Werthes von $y = \pm\, 0{,}0013075$ in Umgängen des Mikrometers oder $= \pm\, 0'',045$.

Wenn bei den Beobachtungen die Blase der Wasserwage ganz auf die eine oder die andere Seite gebracht wird, so dafs die Ablesungen beider Enden einerlei Zeichen erhalten, dann mufs allen diesen Ablesungen der halbe, in der Mitte der Wasserwage nicht eingetheilte Zwischenraum, der gewöhnlich 5 Theile beträgt, mit dem Zeichen der Ablesungen hinzugefügt werden, um sie mit den übrigen auf einen gemeinschaftlichen Nullpunkt zu bringen.

---

§. 17. Anordnung der Beobachtungen.

Obgleich der Ertelsche Theodolit zum Multipliciren der Winkel eingerichtet ist, so wurde er doch nicht dazu gebraucht, weil man die einfache Beobachtungsweise vorzog. Der Grund hierzu wurde darin gefunden, dafs die Ablesungsfehler des Instruments sehr gering sind, und da das Multipliciren der Winkel vorzugsweise nur die Ablesungsfehler vermindert, so ist dasselbe für kleine Instrumente mehr geeignet als für grofse.

Bei Anordnung der Beobachtungen kömmt es hauptsächlich darauf an, schwer zu vermeidende, nachtheilige Einflüsse möglichst unschädlich zu machen, und kleine Fehler des Instrumentes weniger durch eine höchst mühsame Berichtigung, als vielmehr durch die Beobachtungsweise aus dem Resultat zu schaffen. Dies wird immer gelingen, wenn man einer Beobachtung, die in einem gewissen Sinne mit einem Fehler behaftet sein kann, eine zweite hinzufügt, bei der dieser Fehler im entgegengesetzten Sinne vorkommen mufs. Mit Rücksicht hierauf wurden die Beobachtungen angeordnet wie folgt:

Nachdem die Axe der Alhidade senkrecht gestellt und der äufsere Kreis festgestellt war, wurde das Fernrohr auf denjenigen Dreieckspunkt, mit dem man den Anfang machen wollte, eingestellt, und die Angabe der beiden Mikroskope abgelesen. Diese Einstellungen und Ablesungen wurden nach einerlei Richtung herum, der Reihe nach, von allen übrigen Dreieckspunkten gemacht, und wenn sie beendigt waren, so wurde bei dem letzten wieder angefangen und in der entgegengesetzten Richtung bis zum ersten zurück beobachtet. Zwei so zusammengehörige Reihen bilden einen Satz. Hierauf wurde das Instrument um 30° gedreht, das Fernrohr umgelegt, die Horizontirung nachgesehen und verbessert, und die Beobachtung des ersten Satzes wiederholt. Zwölf solcher Sätze, von denen jeder immer eine um 30° fortlaufend andere Stellung des Kreises hatte, und von denen die Hälfte mit umgelegtem Fernrohr gemacht waren, bilden die vollständigen Beobachtungen auf einem Dreieckspunkt.

Durch das Vorwärts- und Rückwärts-Beobachten der Objecte in einem Satz wurde beabsichtigt, eine während der Beobachtung vorgekommene regelmäfsige Veränderung des Ausgangspunktes der Kreistheilung unschädlich zu machen, und eine Drehung der Pfeiler und der hölzernen Beobachtungspfähle aufzuheben.

Durch die zwölfmalige Verstellung des Kreises, nach jedem Satz um 30°, durchläuft der Anfangspunkt die ganze Peripherie des Kreises, wodurch man die Theilungsfehler unschädlich zu machen suchte.

Durch das Umlegen des Fernrohrs nach jedem Satz wird der Collimationsfehler aufgehoben.

Das Drehen der Pfähle, besonders der von Kiefernholz, ist oft sehr beträchtlich; es ist ein Fall vorgekommen (auf dem Signal bei Trunz), wo die Drehung, bei einer Länge des Pfahls von 24 Fuſs, und in Zeiträumen von $\frac{1}{2}$ Stunde, bis zu 60″ betrug, während dieselbe gewöhnlich, bei oft viel längeren Pfählen von demselben Holze und in denselben Zeiträumen, sich nur auf wenige Secunden belief. Es scheint, daſs Pfähle, wlche schon mehrere Jahre gestanden haben, stärker drehen als solche, zu denen das Holz erst einige Monate vorher gefällt wurde. Bei Eichenholz ist die Drehung geringer als bei Kiefernholz.

Der Gang dieser drehenden Bewegung ist bei gleichmäſsiger Witterung ziemlich regelmäſsig, bei Sonnenschein stärker als bei bedecktem Himmel, und nach feuchten, nebligen Nächten und darauf folgender Sonnenhitze am stärksten. Die Bewegung selbst beginnt am Morgen mit dem Steigen der Temperatur, wo sie gewöhnlich am stärksten ist, und dann allmählig abnimmt; ihre Richtung geht von Westen nach Osten dem scheinbaren Lauf der Sonne entgegen, und dauert etwa bis zum Maximum der Tagestemperatur, dann tritt ein Stillstand ein, der zuweilen nur von geringer Dauer ist, oft aber auch bis zu einer Stunde und darüber währt. Nach diesem Stillstand, wenn die Temperatur sinkt, nimmt die Drehung die entgegengesetzte Richtung an, und wächst gegen den Abend hin, ohne aber die summarische Gröſse der vormittägigen zu erreichen. Der gröſste Theil der rückgängigen Bewegung fällt in die Nacht, denn am nächsten Morgen ist der Pfahl, bei ähnlichen Witterungsverhältnissen, ziemlich wieder in dieselbe Stellung gekommen, die er am Morgen vorher hatte. Gleichzeitig mit der Drehung von West nach Ost findet auch ein Krümmen des Pfahles gegen die Sonne hin statt, welches mit der rückgängigen Drehung ebenfalls in die entgegengesetzte Richtung übergeht. Der Grund dieser drehenden Bewegung scheint in der hygroskopischen Eigenschaft des Holzes gefunden werden zu können, wobei der mehre oder mindere Harzgehalt der Fichtenstämme die Aufnahme der Feuchtigkeit und damit auch die Drehung vermindert oder vermehrt.

Es geht hieraus hervor, daſs man bei den Winkelbeobachtungen auf hölzernen Pfählen, welche eine starke Drehung zeigen, höchst vorsichtig zu Werke gehen mufs. Am besten ist es, wenn man die Beobachtungszeit entweder auf den Stillstand selbst, oder doch auf die demselben naheliegende Tageszeit beschränken kann. In der Nähe des Stillstandes wird die Drehung immer der Zeit proportional angesehen werden können; wenn man daher bei den Winkelbeobachtungen die Vorsicht anwendet, alle Einstellungen in gleichen Zeitintervallen zu machen, so wird durch das Vorwärts- und Rückwärts-Beobachten ihr Einflufs vollständig aufgehoben. Glücklicherweise fällt die günstigste Beobachtungszeit mit dem Stillstand der Drehung nahe zusammen, so dafs gewöhnlich kein anderer erheblicher Zeitverlust entsteht, als der, den die gröfseren Vorsichtsmaafsregeln erheischen.

Wenn auf Standpunkten, wo keine Drehung zu befürchten war, die zusammengehörigen Beobachtungen an einem Tage nicht vollständig erlangt werden konnten, so wurden sie an den folgenden Tagen ergänzt; war aber Drehung zu befürchten, so wurden alle unvollständigen Beobachtungen verworfen.

Über die günstigste Beobachtungszeit ist zu bemerken, dafs das Heliotropenlicht in unseren Gegenden des Vormittags selten, in den Mittagsstunden nie zum Beobachten brauchbar ist. Am frühen Morgen, bald nach Sonnenaufgang, kömmt es zuweilen vor, dafs die Bilder ruhig sind, dann aber tritt ein Zittern und Wallen der Gegenstände ein, welches gegen den Mittag hin wächst und zuweilen so stark wird, dafs das sonst hellste Heliotropenlicht in einen matten weifslichen Nebel verwandelt wird. Dieser Zustand dauert oft noch einige Stunden nach dem Mittage fort, dann verliert sich das Zittern allmählig, und es tritt nach und nach eine Zeit ein, wo die Bilder ruhig und zum Beobachten geeignet werden. Diese Zeit dauert ein bis zwei Stunden, selten länger, dann tritt, gewöhnlich $\frac{1}{2}$ Stunde vor Sonnenuntergang, ein abermaliges Zittern ein, welches bis zum Untergang der Sonne zunimmt. Dieselben Erscheinungen haben die Russischen Geodäten auf den entferntesten Punkten ihres Reiches in ähnlicher Weise beobachtet und beschrieben.*)

Auf dem Festlande fällt bei uns die längste Dauer der ruhigen Bilder in die Monate Juli und August. An der Küste, und namentlich auf Rügen, wo die Gesichtslinien zum Theil über Wasser gingen, war auch die Herbstzeit den Beobachtungen noch günstig.

*) *Struve*, Gradmessung in den Ostseeprovinzen Rufslands. Band I. Seite 187. — *Sabler*, Dissertation über irdische Strahlenbrechung. Dorpat 1839,

Über die Zeitpunkte, wann die Beobachtungen anfangen können und aufhören müssen, giebt es keinen anderen Maſsstab, als die Erfahrung und die individuelle Beurtheilung des Beobachters.

Bei starkem Winde sind die Beobachtungen, selbst wenn das Instrument auf einem steinernen Pfeiler stand, eingestellt worden, weil einzelne nicht völlig abzuhaltende Windstöſse das Instrument erschüttern und das Ablesen erschweren.

Die gröſsten Fehler, welche der Erfahrung nach zu fürchten waren, fanden bei dem Einstellen der Objecte statt, weshalb denn auch eine ganz besondere Sorgfalt darauf verwendet wurde.

Die Winkelmessung mit dem 15zölligen Theodoliten erfordert zwei Beobachter, theils weil *einer* das Instrument nicht handhaben kann, theils weil das stundenlange angestrengte Sehen durch das Fernrohr und die Mikroskope die Augen so anstrengen würde, daſs daraus Unsicherheiten entständen, oder daſs sie gar ihren Dienst versagen.

Der gewöhnliche Gang des Geschäfts war folgender:

Sobald der Theodolit über das Centrum gebracht war, wurde er von einem Beobachter berichtigt; der andere stellte unterdessen den Heliotropen auf und revidirte auf allen Stationen die Heliotropenlichter. Wurden Lichter vermiſst, so forderte er durch Signale zum Lichtgeben auf. Waren alle Lichter vorhanden, aber die einen zu hell, die anderen zu matt, so gab er den ersten das Signal zum Verkleinern, den zweiten zum Vergröſsern der Spiegel.

Das Heliotropenlicht ist nur dann zum Beobachten geeignet, wenn es ruhig, klein und nicht zu hell ist; zu helles, strahlendes Licht hat einen nachtheiligen Einfluſs auf die Messung, es war aber bei der häufig sehr mangelhaften Übung und Intelligenz der Leute nicht immer so herzustellen, wie es wünschenswerth gewesen wäre; denn in Ermangelung eines stehenden Personals, muſste der gröſste Theil der Heliotropisten alljährlich aus Arbeitsleuten und Bauerburschen neu angeworben und eingeübt werden.

Wenn die Lichter so viel als möglich in Ordnung gebracht waren, und das Zittern derselben nachgelassen hatte, nahmen die Beobachtungen nach folgendem umstehenden Schema ihren Anfang:

Station Marienthurm in Berlin

den 23. August 1846.

Zeit	Kreis-ende	Richtungen	Gr.	Min.	I. Mikroskop Ablesungen links	I. Mikroskop Ablesungen rechts	I. Mikroskop Reduction auf Sec.	II. Mikroskop Ablesungen links	II. Mikroskop Ablesungen rechts	II. Mikroskop Reduction auf Sec.	Mittel
$4^U 20'$	links	Müggelsb.Hel.	153	40	+ 1 26,4	—	— 0,14	2 4,2	—	+ 1,45	153° 41′ 45″,96
Nach-		Glienicke —	97	0	0 32,7	—	— 0,05	1 3,7	—	+ 0,74	97 0 48,55
mitt.		Eichberg —	59	52	3 4,7	—	— 0,31	3 28,6	—	+ 2,43	59 55 17,71
		Eichberg —	59	52	3 5,4	—	— 0,31	3 30,1	—	+ 2,45	59 55 18,82
		Glienicke —	97	0	0 31,4	—	— 0,05	1 2,1	—	+ 0,72	97 0 47,09
		Müggelsb.—	153	40	1 28,1	—	— 0,15	2 1,7	—	+ 1,42	153 41 45,54
$4^U 41'$	rechts	Müggelsb.Hel.	303	56	+ 3 38,9	—	— 0,36	4 0,0	—	+ 2,80	303 59 50,67
		Glienicke —	247	16	2 41,9	—	— 0,27	2 58,9	—	+ 2,09	247 18 51,31
		Eichberg —	210	12	1 8,9	—	— 0,11	1 33,2	—	+ 1,09	210 13 21,54
		Eichberg —	210	12	1 8,5	—	— 0,11	1 33,1	—	+ 1,09	210 13 21,29
		Glienicke —	247	16	2 42,9	—	— 0,27	2 58,8	—	+ 2,09	247 18 51,76
		Müggelsb.—	303	56	3 38,9	—	— 0,36	3 56,5	—	+ 2,76	303 59 48,90

§. 18. Ermittelung der wahrscheinlichsten Richtungen auf einer Station aus den daselbst angestellten Beobachtungen.

Die mancherlei nachtheiligen Einwirkungen auf die Beobachtungen, welche im vorigen §. angedeutet wurden, kommen, wie leicht zu erachten, in allen Abstufungen vor, es ist daher unmöglich, ein bestimmtes Maſs für den Werth der einzelnen Beobachtungen anzugeben. Aus diesem Grunde wurden in den Beobachtungs-Journalen in den Fällen, wo die Umstände nicht günstig, aber doch nicht so ungünstig erschienen, daſs man die Beobachtungen glaubte einstellen zu müssen, die erforderlichen Notizen gemacht, und wenn unter diesen weniger guten Beobachtungen einzelne unvollständige Sätze vorkamen, die gegen eine bedeutende Zahl guter Beobachtungen zu beträchtliche Abweichungen zeigten, oder wenn später eine hinreichende Anzahl Beobachtungen unter günstigeren Umständen erlangt wurde, so wurden die unvollständigen Sätze der weniger guten gestrichen, alle übrigen aber mit gleichem Gewicht zum Resultat vereinigt.

Wenn man auf jeder Station die zu beobachtenden Richtungen immer sämmtlich hätte einstellen können, so würde einfach das Mittel aus allen Ablesungen die wahrscheinlichsten Richtungen gegeben haben; da dies aber, aus den früher angeführten Gründen, nur höchst selten möglich ist, so muſs das Verfahren näher auseinander gesetzt werden, nach welchem die beliebig beobachteten Objecte zum Resultat vereinigt wurden.

Es sei die Anzahl der Objecte	1	2	3	...... m
Die beobachteten Richtungen	0	a	b	......
ihre wahrscheinlichsten Richtungen	0	A	B	......
Zieht man die letzten von den ersten ab:	0;	$a - A$;	$b - B$;	......

Setzt man diese Unterschiede $= x$, so findet man eben so viel Gleichungen, als Objecte beobachtet wurden, nämlich:

$$o = x;\ a - A = x;\ b - B = x\ ......$$

Bei jeder anderen Anzahl der Objecte erhält man andere Gleichungen und andere Werthe für x; z. B. für 4 Objecte:

$$o = x';\ \alpha - A = x';\ \beta - B = x';\ \gamma - C = x'$$

Hat man die Beobachtungen der ersten 3 Objecte öfter wiederholt, und auch die Beobachtungen der 4 Objecte wiederholt, so entstehen aus diesen Beobachtungen zwei Gruppen von Gleichungen, wie:

m Punkte n mal eingestellt.

$$\begin{array}{lllll}
 & 1 & 2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & m \\
1 & x = 0; & x + A = a; & & x + B = b. \\
2 & x = 0; & x + A = d'; & & x + B = b' \;\ldots\ldots\; \text{I.} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
n & & & & \\
\hline
 & nx = 0; & nx + nA = (a + d' + \ldots); & & nx + nB = (b + b' + \ldots)
\end{array}$$

Summirt man die letzten Gleichungen, so erhält man:

$$mnx = (a + a' + \ldots + b + b' + \ldots) - n\,(A + B)$$

und hieraus folgt:

$$nx = \left(\frac{a + a' + \ldots + b + b' + \ldots}{m}\right) - \frac{n}{m}(A + B) \;\ldots\ldots\; 1.$$

m ist hier die Anzahl der beobachteten Objecte, und n die Zahl der Beobachtungen in der Gruppe.

Die zweite Gruppe ist:

$$\begin{array}{llllll}
 & 1 & 2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & m' \\
1 & x' = 0; & x' + A = \alpha; & & x' + B = \beta; & x' + C = \gamma \\
2 & x' = 0; & x' + A = \alpha'; & & x' + B = \beta'; & x' + C = \gamma' \;\ldots\ldots\; \text{II.} \\
3 & x' = 0; & x' + A = \alpha''; & & x' + B = \beta''; & x' + C = \gamma'' \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
n' & & & & & \\
\hline
 & n'x' = 0; & n'x' + n'A = (\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots); & & n'x' + n'B = (\beta + \beta' + \beta'' + \ldots); & n'x' + n'C = (\gamma + \gamma' + \gamma'' + \ldots)
\end{array}$$

Setzt man in diesen letzten Gleichungen die Parenthesen der Reihe nach $= s', s'', s'''$, summirt dieselben, und eliminirt $n'x'$, so findet man

$$n'x' = \frac{s' + s'' + s'''}{m'} - \frac{n'}{m'}(A + B + C) \;\ldots\ldots\; 2.$$

Die Anzahl der Unbekannten x, x' .... ist so groſs, wie die Anzahl der Gruppen, welche aus den Beobachtungen gebildet werden. Die gröſste Zahl der Gruppen bei m Objecten, ist aber gleich der Summe der Combinationen ohne Wiederholung zu 2, 3 bis m Objecten. Es geht hieraus hervor, daſs es für die Ausgleichung vortheilhaft ist, möglichst viele Objecte in einem Satz zu beobachten.

Die ganze Anzahl der unbekannten Gröſsen in beiden Gruppen ist x, x', A, B, C. Die Zahl der Gleichungen beträgt aber in Gruppe I. Sechs; in Gruppe II. Zwölf, und kann durch die Anzahl der Beobachtungen noch beliebig vermehrt werden. Diese Gleichungen sind daher nach der Methode der kleinsten Quadrate zu behandeln.

Bezeichnet man durch 2Σ die Summe der Quadrate der einzelnen Gleichungen in den Gruppen, so ist:

$$\begin{aligned}2\Sigma = x^2 &+ (A + x - a)^2 + (B + x - b)^2 + \ldots + x^2 + (A + x - a')^2 \\ &+ (B + x - b')^2 + \ldots + x'^2 + (A + x' - \alpha)^2 + (B + x' - \beta)^2 \\ &+ (C + x' - \gamma)^2 + \ldots + x'^2 + (A + x' - \alpha')^2 + (B + x' - \beta')^2 \\ &+ (C + x' - \gamma')^2 + \ldots + x'^2 + (A + x' - \alpha'')^2 + (B + x' - \beta'')^2 \\ &+ (C + x' - \gamma'')^2 + \ldots\end{aligned}$$

Hieraus erhält man zunächst durch die Differentiation nach x und x'

$$\frac{d\Sigma}{dx} = 0 = + mnx + n(A + B) - (a + a' + \ldots + b + b' + \ldots) \ldots\ldots 3.$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Sigma}{dx'} = 0 = &+ m'n'x' + n'(A + B + C + \ldots) - (\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots \\ &+ \beta + \beta' + \beta'' + \ldots + \gamma + \gamma' + \gamma'' + \ldots) \ldots\ldots\ldots 4.\end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man dieselben Werthe von nx und $n'x'$, wie sie oben unter 1. und 2. aus den Summen der Gleichungen I. und II. gefunden wurden; man kann daher das dortige einfache Verfahren, als gleichbedeutend mit diesem, allgemein zur Bestimmung von nx, $n'x'$ .... anwenden. Ferner giebt die Differentiation nach A, B und C:

$$\begin{aligned}\frac{d\Sigma}{dA} = 0 = nA - (a + a' + \ldots) + nx + n'A - (\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots) \\ + n'x' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Sigma}{dB} = 0 = nB - (b + b' + \ldots) + nx + n'B - (\beta + \beta' + \beta'' + \ldots) \\ + n'x' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6.\end{aligned}$$

$$\frac{d\Sigma}{dC} = 0 = n'C - (\gamma + \gamma' + \gamma'' + \ldots) + n'x' \ldots\ldots\ldots 7.$$

Setzt man die bereits gefundenen Werthe von nx und $n'x'$ in die Gleichungen 5, 6 und 7, so findet man die Endgleichungen, z. B. aus 5:

$$\left.\begin{aligned}0 &= nA - (a + a' + \ldots) + \frac{1}{m}\{a + a' + \ldots + b + b' + \ldots\} \\ &\quad - \frac{n}{m}A - \frac{n}{m}B \\ 0 &= n'A - (\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots) + \frac{1}{m'}\{s + s' + s'' + \ldots\} \\ &\quad - \frac{n'}{m'}A - \frac{n'}{m'}B - \frac{n'}{m'}C\end{aligned}\right\} \ldots\ldots 8.$$

Summirt man diese beiden Gleichungen, bringt die constanten Gröſsen auf die linke Seite und nennt ihre Summe an; die Summe der Coeffizienten von A aber aa; die Summe der Coeffizienten von B, ab; und die Summe der Coeffizienten von C, ac; so erhält man $an = aaA - abB - acC$.

Verfährt man mit den Gleichungen 6 und 7 ganz eben so, so findet man drei Gleichungen von der Form:

$$\left.\begin{aligned} an &= +\ aaA - abB - acC \\ bn &= -\ abA + bbB - bcC \\ cn &= -\ acA - bcB + ccC \end{aligned}\right\} \text{......} \; 9.$$

deren gewöhnliche Auflösung die wahrscheinlichsten Richtungen A, B, C giebt. Sind stets alle Objecte beobachtet, so ist $aa = bb = cc = n - \frac{n}{m}$; und die übrigen Coeffizienten sämmtlich $= \frac{n}{m}$. Zur Vereinfachung der Rechnung, und damit man mit kleineren Zahlen zu thun hat, kann man bei den beobachteten Richtungen passende constante Werthe annehmen, die man bei der Rechnung fortläſst, etwa in der Art, daſs A, B und C nur die veränderlichen Theile innerhalb der Einer der Secunden darstellen; dann erhält man die wahrscheinlichsten Richtungen, indem man den Annahmen die Werthe von A, B und C hinzufügt. z. B. Die Richtung nach dem ersten Object sei 0; die nach dem zweiten $56^0\ 30'\ 24'',5$, so setzt man letztere $= 56^0\ 30'\ 20'' + A$, und erhält dann in der Gruppe I. die entsprechende Gleichung: $x + A = 4'',5$, und so für alle übrigen Objecte.

Giebt man den Gleichungen 9. die Form:

$$\left.\begin{aligned} A &= an \,.\, \alpha\alpha + bn \,.\, \alpha\beta + cn \,.\, \alpha\gamma \;\ldots. \\ B &= an \,.\, \alpha\beta + bn \,.\, \beta\beta + cn \,.\, \beta\gamma \;\ldots. \\ C &= an \,.\, \alpha\gamma + bn \,.\, \beta\gamma + cn \,.\, \gamma\gamma \;\ldots. \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right\} \text{......} \; 10.$$

so kann man *) die Coeffizienten $\alpha\alpha$, $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ .... aus den Coeffizienten in Gleichung 9. auf folgende Weise finden:

Zuerst, substituirt man für an, bn, cn .... die Werthe aus Gleichung 9, so erhält man:

$$\begin{aligned} A &= \alpha\alpha\,(aaA - abB - acC) + \alpha\beta\,(-\,abA + bbB - bcC) + \alpha\gamma\,(-\,acA - bcB + ccC) \;\ldots. \\ B &= \alpha\beta\,(aaA - abB - acC) + \beta\beta\,(-\,abA + bbB - bcC) + \beta\gamma\,(-\,acA - bcB + ccC) \;\ldots. \\ C &= \alpha\gamma\,(aaA - abB - acC) + \beta\gamma\,(-\,abA + bbB - bcC) + \gamma\gamma\,(-\,acA - bcB + ccC) \;\ldots. \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Ordnet man auf der rechten Seite der Gleichungen nach A, B und C ...., so gehen dieselben über in:

---

*) *Gauſs*, Supplementum theoriae etc. S. 12. — *Bessel*, Gradmessung etc. S. 153. — *Enke*, Jahrbuch für 1835 S. 287 et seq.

$$A = A(aa.\alpha\alpha - ab.\alpha\beta - ac.\alpha\gamma) + B(-ab.\alpha\alpha + bb.\alpha\beta - bc.\alpha\gamma) + C(-ac.\alpha\alpha - bc.\alpha\beta + cc.\alpha\gamma)\ldots.$$
$$B = A(aa.\alpha\beta - ab.\beta\beta - ac.\beta\gamma) + B(-ab.\alpha\beta + bb.\beta\beta - bc.\beta\gamma) + C(-ac.\alpha\beta - bc.\beta\beta + cc.\beta\gamma)\ldots.$$
$$C = A(aa.\alpha\gamma - ab.\beta\gamma - ac.\gamma\gamma) + B(-ab.\alpha\gamma + bb.\beta\gamma - bc.\gamma\gamma) + C(-ac.\alpha\gamma - bc.\beta\gamma + cc.\gamma\gamma)\ldots.$$

u. s. w.

Sollen diese Gleichungen mit den Gleichungen 10. übereinstimmen, so mufs der Werth von A unabhängig von B und C, der Werth von B unabhängig von A und C, und der Werth von C unabhängig von A und B sein. Dies ist aber nur dann möglich, wenn in der ersten Gleichung $B = 0$ und $C = 0$; in der zweiten $A = 0$ und $C = 0$; in der dritten $A = 0$ und $B = 0$ gesetzt wird. Man erhält daher zur Bestimmung der unbekannten Coeffizienten aus jeder Gleichung drei andere, nämlich:

$$1 = +aa.\alpha\alpha - ab.\alpha\beta - ac.\alpha\gamma;\quad 0 = +aa.\alpha\beta - ab.\beta\beta - ac.\beta\gamma;\quad 0 = +aa.\alpha\gamma - ab.\beta\gamma - ac.\gamma\gamma$$
$$0 = -ab.\alpha\alpha + bb.\alpha\beta - bc.\alpha\gamma;\quad 1 = -ab.\alpha\beta + bb.\beta\beta - bc.\beta\gamma;\quad 0 = -ab.\alpha\gamma + bb.\beta\gamma - bc.\gamma\gamma$$
$$0 = -ac.\alpha\alpha - bc.\alpha\beta + cc.\alpha\gamma;\quad 0 = -ac.\alpha\beta - bc.\beta\beta + cc.\beta\gamma;\quad 1 = -ac.\alpha\gamma - bc.\beta\gamma + cc.\gamma\gamma$$

oder allgemein nach der *Gaufs*'schen Bezeichnungsart, und ohne Rücksicht auf die Zeichen:

$$\left.\begin{array}{l}
1 = aa\,.\,\alpha\alpha + ab\,.\,\alpha\beta + ac\,.\,\alpha\gamma\\
0 = ab\,.\,\alpha\alpha + bb\,.\,\alpha\beta + bc\,.\,\alpha\gamma\\
0 = ac\,.\,\alpha\alpha + bc\,.\,\alpha\beta + cc\,.\,\alpha\gamma\\
\qquad\text{u. s. w.}\\
1 = bb.1\,\beta\beta + bc.1\,\beta\gamma\;\ldots.\\
0 = bc.1\,\beta\beta + cc.1\,\beta\gamma\\
\qquad\text{u. s. w.}\\
1 = cc.2\,\gamma\gamma\\
\qquad\text{u. s. w.}
\end{array}\right\}\;\ldots\ldots\;11.$$

Sobald A, B, C .... aus den Gleichungen 9. oder 10. bekannt sind, so hat man alles, was aus den Beobachtungen auf einer Station in Bezug auf diese Richtungen ermittelt werden kann. Wenn aber durch Beobachtungen auf mehreren Stationen ein zusammenhängendes Dreiecksnetz gebildet worden ist, welches neue Bedingungen enthält, die erfüllt werden müssen, so gehen daraus auch neue Verbesserungen für A, B, C .... hervor. Bezeichnet man dieselben als neue Unbekannten mit (1), (2), (3), so erhält man $A + (1)$; $B + (2)$; $C + (3)$ .... Wenn aber A, B und C in Gleichung 9. in diese Werthe übergehen, dann werden auch an, bn, cn Veränderungen erleiden, die durch $an + [1]$; $bn + [2]$; $cn + [3]$ dargestellt werden können. Setzt man diese Werthe (für A also $A + (1)$ .... und für an, $an + [1]$ ....) in die Gleichungen 9, und setzt dann für A, B und C die bereits gefundenen wahrscheinlichsten Werthe, wodurch die Gleichungen 9. selbst Null werden, so findet man:

$$\left.\begin{aligned}[1] &= + aa\ (1) - ab\ (2) - ac\ (3)\\ [2] &= - ab\ (1) + bb\ (2) - bc\ (3)\\ [3] &= - ac\ (1) - bc\ (2) + cc\ (3)\end{aligned}\right\} \text{......}\ 12.$$

Setzt man dieselben Werthe (für A, $A + (1)$, und für an, $an + [1]$ u. s. w.) auch in die Gleichungen 10, so gehen diese, wenn man für A, B, C die wahrscheinlichsten Werthe selbst setzt, über in:

$$\left.\begin{aligned}(1) &= \alpha\alpha\ [1] + \alpha\beta\ [2] + \alpha\gamma\ [3]\\ (2) &= \alpha\beta\ [1] + \beta\beta\ [2] + \beta\gamma\ [3]\\ (3) &= \alpha\gamma\ [1] + \beta\gamma\ [2] + \gamma\gamma\ [3]\end{aligned}\right\} \text{......}\ 13.$$

Die Gleichungen 12. und 13. beziehen sich also bloſs auf die Ausgleichung des Dreiecksnetzes, und bestimmen die Abhängigkeit dieser Verbesserungen nach den auf der Station vorhandenen Bedingungen. Später werden wir auf diese Gleichungen zurückkommen.

Die Rechnungen, welche hiernach auf jeder Station auszuführen sind, bestehen zuerst in der Auflösung der Gleichungen 9. zur Bestimmung der Werthe von A, B, C .... und dann in der Auflösung der Gleichungen 11. zur Bestimmung der Coeffizienten in den Gleichungen 13.

Die Auflösung der Gleichungen 9. und 11., so wie überhaupt aller Gleichungen, welche nach der Methode der kleinsten Quadrate formirt sind, wurden nach der *Gauſs*'schen Methode in folgender Art ausgeführt:

Es seien die aufzulösenden Gleichungen ohne Rücksicht auf die Zeichen der Coeffizienten

$$\left.\begin{aligned}an &= aa \cdot w + ab \cdot x + ac \cdot y + ad \cdot z\\ bn &= ab \cdot w + bb \cdot x + bc \cdot y + bd \cdot z\\ cn &= ac \cdot w + bc \cdot x + cc \cdot y + dc \cdot z\\ dn &= ad \cdot w + bd \cdot x + dc \cdot y + dd \cdot z\end{aligned}\right\} \text{......}\ \alpha.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung successive mit den Quotienten $\frac{ab}{aa}$, $\frac{ac}{aa}$, $\frac{ad}{aa}$, und zieht diese 3 Gleichungen der Reihe nach von der zweiten, dritten und vierten Gleichung ab, so verschwindet w und man erhält:

$$bn - an\frac{ab}{aa} = \left(bb - ab\frac{ab}{aa}\right) x + \left(bc - ac\frac{ab}{aa}\right) y + \left(bd - ad\frac{ab}{aa}\right) z$$

$$cn - an\frac{ac}{aa} = \left(bc - ab\frac{ac}{aa}\right) x + \left(cc - ac\frac{ac}{aa}\right) y + \left(dc - ad\frac{ac}{aa}\right) z$$

$$dn - an\frac{ad}{aa} = \left(bd - ab\frac{ad}{aa}\right) x + \left(dc - ac\frac{ad}{aa}\right) y + \left(dd - ad\frac{ad}{aa}\right) z$$

Setzt man um abzukürzen $bn - an\frac{ab}{aa} = bn.1$; $bb - ab\frac{ab}{aa} = bb.1$; $bc - ac\frac{ab}{aa} = bc.1$ u. s. w., so erhalten diese Gleichungen die Form:

$$\left.\begin{aligned} bn.1 &= bb.1\,x + bc.1\,y + bd.1\,z \\ nc.1 &= bc.1\,x + cc.1\,y + dc.1\,z \\ dn.1 &= bd.1\,x + dc.1\,y + dd.1\,z \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \beta.$$

Behandelt man diese Gleichungen wieder wie die ersten, d. h. multiplicirt man die erste Gleichung mit den Quotienten $\frac{bc.1}{bb.1}$; $\frac{bd.1}{bb.1}$ und zieht die dadurch erhaltenen Gleichungen der Reihe nach von den übrigen ab, so findet man:

$$cn.1 - bn.1\frac{bc.1}{bb.1} = (cc.1 - bc.1\frac{bc.1}{bb.1})\,y + (cd.1 - bd.1\frac{bc.1}{bb.1})\,z$$

$$dn.1 - bn.1\frac{bd.1}{bb.1} = (dc.1 - bc.1\frac{bd.1}{bb.1})\,y + (dd.1 - bd.1\frac{bd.1}{bb.1})\,z$$

und setzt man um abzukürzen $cn.1 - bn.1\frac{bc.1}{bb.1} = cn.2$; $cc.1 - bc.1\frac{bc.1}{bb.1} = cc.2$ u. s. w., so erhält man

$$\left.\begin{aligned} cn.2 &= cc.2\,y + dc.2\,z \\ dn.2 &= dc.2\,y + dd.2\,z \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \gamma.$$

Wendet man auf diese Gleichungen abermals das frühere Verfahren an, d. h. multiplicirt man die erste mit $\frac{dc.2}{cc.2}$ und zieht sie von der zweiten ab, so ergiebt sich

$$dn.2 - cn.2\frac{dc.2}{cc.2} = (dd.2 - dc.2\frac{dc.2}{cc.2})\,z; \text{ oder abgekürzt:}$$

$$dn.3 = dd.3\,z$$

Hieraus erhält man endlich $z = \frac{dn.3}{dd.3}$ (wo $dd.3$ zugleich das Gewicht von z ist) und nun aus den Gleichungen γ, β und α der Reihe nach:

$$y = \frac{cn.2}{cc.2} - \frac{dc.2}{cc.2}z;\quad x = \frac{bn.1}{bb.1} - \frac{bc.1}{bb.1}y - \frac{bd.1}{bb.1}z \text{ und}$$

$$w = \frac{an}{aa} - \frac{ab}{aa}x - \frac{ac}{aa}y - \frac{ad}{aa}z.$$

Diese Auflösungsweise läſst sich zur Bequemlichkeit der Rechnung in folgendes Schema bringen.

$an =$	$aa\,w$	$ab\,x$	$ac\,y$	$ad\,z$	bn	bb	bc	bd	cn	cc	cd	dn	dd
$\log an$	$\lg aa$	$\lg ab$	$\log ac$	$\log ad$	$-an\frac{ab}{aa}$	$-ab\frac{ab}{aa}$	$-ac\frac{ab}{aa}$	$-ad\frac{ab}{aa}$	$-an\frac{ac}{aa}$	$-ac\frac{ac}{aa}$	$-ad\frac{ac}{aa}$	$-an\frac{ad}{aa}$	$-ad\frac{ad}{aa}$
$\log\frac{an}{aa}$		$\lg\frac{ab}{aa}$	$\lg\frac{ac}{aa}$	$\lg\frac{ad}{aa}$	$bn.1 =$	$bb.1.x$	$bc.1.y$	$bd.1.z$	$cn.1$	$cc.1$	$cd.1$	$dn.1$	$dd.1$
$\frac{an}{aa}$		$\lg x$	$\lg y$	$\lg z$	$\lg bn.1$	$\lg bb.1$	$\lg bc.1$	$\lg bd.1$	$-bn.1\frac{bc.1}{bb.1}$	$-bc.1\frac{bc.1}{bb.1}$	$-bd.1\frac{bc.1}{bb.1}$	$-bn.1\frac{bd.1}{bb.1}$	$-bd.1\frac{bd.1}{bb.1}$
$-x\frac{ab}{aa}$		$\lg x\frac{ab}{aa}$	$\lg y\frac{ac}{aa}$	$\lg z\frac{ad}{aa}$	$\lg\frac{bn.1}{bb.1}$		$\lg\frac{bc.1}{bb.1}$	$\lg\frac{bd.1}{bb.1}$	$cn.2 =$	$cc.2.y$	$cd.2.z$	$dn.2$	$dd.2$
$-y\frac{ac}{aa}$					$\frac{bn.1}{bb.1}$		$\lg y$	$\lg z$	$\log cn.2$	$\lg cc.2$	$\lg cd.2$	$-cn.2\frac{cd.2}{cc.2}$	$-cd.2\frac{cd.2}{cc.2}$
$-z\frac{ad}{aa}$					$-y\frac{bc.1}{bb.1}$		$\lg y\frac{bc.1}{bb.1}$	$\lg z\frac{bd.1}{bb.1}$	$\lg\frac{cn.2}{cc.2}$		$\lg\frac{cd.2}{cc.2}$	$dn.3 =$	$dd.3.z$
w					$-z\frac{bd.1}{bb.1}$				$\frac{cn.2}{cc.2}$		$\lg z$	$\lg dn.3$	$\log dd.3$
					x				$-z\frac{cd.2}{cc.2}$		$\lg z\frac{cd.2}{cc.2}$	$\lg\frac{dn.3}{dd.3}$	
									y			z	

Hieraus ergeben sich unmittelbar die Gleichungen 11. wie folgt:

1	aa	ab	ac	ad	0	bb	bc	bd	0	cc	cd	0	dd
					1	$bb.1$	$bc.1$	$bd.1$	0	$cc.1$	$cd.1$	0	$dd.1$
									1	$cc.2$	$cd.2$	0	$dd.2$
												1	$dd.3$
												$\frac{1}{dd.3} =$	$\delta\delta$

Die Auflösungen der letzten Gleichungen, die gröſstentheils schon in den ersten enthalten sind, geben die Coeffizienten $\alpha\alpha$, $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ u. s. w.

Als Beispiel mögen hier die vollständig durchgeführten Rechnungen von einer Station folgen.

Station Brosowken.

Gruppirung der Beobachtungen und Bestimmung der Werthe von nx, $n'x'$ u. s. w.

Buschkau	A Stegen	B Trunz	C Talpitten
0° 0′ 0″	51° 22′ 38″,50	93° 55′ 51″,25	137° 33′ 33″,00
0	37,25	50,50	27,25
0	38,50	50,00	26,50
0	39,00	50,50	29,25
0	33,50	49,50	25,75
0	36,75	50,50	26,75
0	38,25	51,00	31,50
0	36,00	47,00	27,50
0	37,50	49,00	28,50
0	36,75	50,00	29,25
0	37,25	50,50	26,50
0	36,50	48,25	28,00
0	37,75	48,75	30,00
0	35,37	46,12	22,12
0	34,50	47,50	24,25
0	36,75	50,25	32.00
(16)	+ 110,12	− 9,38	− 31,88
0 0 0	38,50	52,00	
0	37,25	49,00	
0	36,50	48,50	
0	38,88	52,00	
0	40,75	51,25	
(5)	+ 41,88	+ 2,75	
0 0 0	34.25		25,25
(1)	+ 4,25		− 4,75
0 0 0	39,25		
0	39,25		
0	34,25		
0	35,00		
(4)	+ 27,75		
0 0 0			25,75
0			28,50
0			31,25
0			29,00
(4)			− 5,50

Annahme.

Buschkau	0°	0′	0″	
Stegen.....	51	22	30	$+ A$
Trunz......	93	55	50	$+ B$
Talpitten	137	33	30	$+ C$

$$16\,x = 0$$
$$16\,x + 16\,A = +\,110{,}12$$
$$16\,x + 16\,B = -\,9{,}38$$
$$16\,x + 16\,C = -\,31{,}88$$
$$16\,x = +\,17{,}2150 - 4\,\{A + B + C\}$$

$$5\,x' = 0$$
$$5\,x' + 5\,A = +\,41{,}88$$
$$5\,x' + 5\,B = +\,2{,}75$$
$$5\,x' = +\,14{,}8767 - 1{,}6667\,\{A + B\}$$

$$x'' = 0$$
$$x'' + A = +\,4{,}25$$
$$x'' + C = -\,4{,}75$$
$$x'' = -\,0{,}1667 - 0{,}3333\,\{A + C\}$$

$$4\,x''' = 0$$
$$4\,x''' + 4\,A = +\,27{,}75$$
$$4\,x''' = +\,13{,}8750 - 2\,A$$

$$4\,x^{\mathrm{IV}} = 0$$
$$4\,x^{\mathrm{IV}} + 4\,C = -\,5{,}50$$
$$4\,x^{\mathrm{IV}} = -\,2{,}7500 - 2\,C$$

Buschkau	A Stegen	B Trunz	C Talpitten	
	0° 0′ 0″	42° 33′ 12,75″	86° 10′ 52,50″	$6\,x^{v} + 6\,A = 0$
	0	14,75	53,25	$6\,x^{v} + 6\,B = -\,36{,}50$
	0	14,50	51,50	$6\,x^{v} + 6\,C = -\,52{,}25$
	0	15,50	49,50	
	0	16,25	47,75	$6\,x^{v} = -\,29{,}5833 - 2\,\{A + B + C\}$
	0	9,75	53,25	
	(6)	− 36,50	− 52,25	
		0 0 0	43 37 37,75	
		0	40,75	
		0	37,00	$8\,x^{vi} + 8\,B = 0$
		0	37,25	$8\,x^{vi} + 8\,C = -\,16{,}50$
		0	37,25	
		0	36,75	
		0	42,00	$8\,x^{vi} = -\,8{,}25 - 4\,\{B + C\}$
		0	34,75	
		(8)	− 16,50	

Bildung der Endgleichungen nach den Gl. 5, 6 und 7, und Substitution der Werthe von nx, $n'x'$ ....

1) für A nach Gl. 8.

$$\begin{array}{rcllllll}
+\,110{,}12 & = & (16)\,A & +\,17{,}2150 & -\,4{,}0000\,A & -\,4{,}0000\,B & -\,4{,}0000\,C \\
+\,41{,}88 & = & (5)\;\text{-} & +\,14{,}8767 & -\,1{,}6667\;\text{-} & -\,1{,}6667\;\text{-} & \underline{\quad\quad} \\
+\,4{,}25 & = & (1)\;\text{-} & -\,0{,}1667 & -\,0{,}3333\;\text{-} & \underline{\quad\quad}\;\text{-} & -\,0{,}3333\;\text{-} \\
+\,27{,}75 & = & (4)\;\text{-} & +\,13{,}8750 & -\,2{,}0000\;\text{-} & \underline{\quad\quad} & \underline{\quad\quad} \\
0 & = & (6)\;\text{-} & -\,29{,}5833 & -\,2{,}0000\;\text{-} & -\,2{,}0000\;\text{-} & -\,2{,}0000\;\text{-} \\
\hline
+\,184{,}00 & = & (32)\,A & +\,16{,}2167 & -\,10{,}0000\,A & -\,7{,}6667\,B & -\,6{,}3333\,C \\
+\,167{,}7833 & = & & & +\,22\,A & -\,7{,}6667\,B & -\,6{,}3333\,C
\end{array}$$

2) für B.

$$\begin{array}{rcllllll}
-\,9{,}38 & = & (16)\,B & +\,17{,}2150 & -\,4{,}0000\,A & -\,4{,}0000\,B & -\,4{,}0000\,C \\
+\,2{,}75 & = & (5)\;\text{-} & +\,14{,}8767 & -\,1{,}6667\;\text{-} & -\,1{,}6667\;\text{-} & \underline{\quad\quad} \\
-\,36{,}50 & = & (6)\;\text{-} & -\,29{,}5833 & -\,2{,}0000\;\text{-} & -\,2{,}0000\;\text{-} & -\,2{,}0000\;\text{-} \\
0 & = & (8)\;\text{-} & -\,8{,}2500 & \text{———}\;\text{-} & -\,4{,}0000\;\text{-} & -\,4{,}0000\;\text{-} \\
\hline
-\,43{,}13 & = & (35)\,B & -\,5{,}7416 & -\,7{,}6667\,A & -\,11{,}6667\,B & -\,10{,}0000\,C \\
-\,37{,}3884 & = & & & -\,7{,}6667\,A & +\,23{,}3333\,B & -\,10{,}0000\,C
\end{array}$$

3) für C.

− 31,88 =	(16) C	+ 17,2150	− 4,0000 A	− 4,0000 B	− 4,0000 C
− 4,75 =	(1) -	− 0,1667	0,3333 -	——— -	− 0,3333 -
− 5,50 =	(4) -	− 2,7500	——— -	——— -	− 2,0000 -
− 52,25 =	(6) -	− 29,5833	− 2,0000 -	− 2,0000 -	− 2,0000 -
− 16,50 =	(8) -	− 8,2500	——— -	− 4,0000 -	− 4,0000 -
− 110,88 =	(35) C	− 23,5350	− 6,3333 A	− 10,0000 B	− 12,3333 C
− 87,3450	=		− 6,3333 A	− 10,0000 B	+ 22,6667 C

Aufzulösende Gleichungen:

$$+ 167,7833 = + 22,0000\,A - 7,6667\,B - 6,3333\,C$$
$$- 37,3884 = - 7,6667\,A + 23,3333\,B - 10,0000\,C$$
$$- 87,3450 = - 6,3333\,A - 10,0000\,B + 22,6667\,C$$

Auflösung der Gleichungen:

	an =	aa	ab	ac	bn	bb	bc	cn	cc
	+167,7833	+ 22	− 7,6667	− 6,3333	−37,3884	+23,3333	−10,0000	−87,3450	+22,6667
	2,2247488	1,3424227	$0,8846085_n$	$0,8016301_n$	−58,4702	+ 2,6717	+ 2,2071	−48,3010	+ 1,8232
	0,8823261		$9,5421858_n$	$9,4592079_n$	+21,0818	+20,6616	−12,2071	−39,0440	+20,8435
	+ 7,6265		$9,1209028_n$	$0,2901550_n$	1,3239077	1,3151640	$1,0866125_n$	−12,4554	+ 7,2121
	− 0,0460		8,663089	9,749363	0,0087437		$9,7714485_n$	−26,5886	+13,6314
	− 0,5615				+ 1,0203		$0,2901550_n$	$1,4246955_n$	1,1345405
A =	+ 7,0190				− 1,1524		0,0616035	$0,2901550_n$	
				B =	− 0,1321		C =	− 1,9505	
	1				0			0	
	0,…………							+ 0,2879	
	8,65758		$9,54219_n$	$9,45921_n$	9,54219			− 0,2059	
	+ 0,0455		8,58320	8,55901	8,22703		$9,77145_n$	+ 0,4938	
	+ 0,0133		$8,12539_n$	$8,01822_n$	+ 0,0169		8,55901	9,69355	
	+ 0,0104				+ 0,0214		$8,33046_n$	8,55901	
$\alpha\alpha$ =	+ 0,0692			$\alpha\beta$ =	+ 0,0383		$\alpha\gamma$ =	+ 0,0362	
					1			0	
					0,…………				
					8,6848		$9,77145_n$		
					+ 0,0484		8,63691	9,77145	
					+ 0,0256		$8,40836_n$	8,63691	
				$\beta\beta$ =	+ 0,0740		$\beta\gamma$ =	+ 0,0433	
								1	
								0,………	
								8,86546	
							$\gamma\gamma$ =	+ 0,0734	

Hieraus erhält man nun:

1) Die wahrscheinlichsten Richtungen, indem man den Annahmen die gefundenen Werthe von A, B, C hinzufügt:

Buschkau	0°	0′	0″	— 0,″147 Reduction aufs Centrum.
Stegen	51	22	37,019 + (12)	
Trunz	93	55	49,868 + (13) — 31,″631	Reduct. auf d. astron. Pfeiler.
Talpitten	137	33	28,050 + (14)	

Die Ausdrücke (12), (13) und (14) beziehen sich auf die Verbesserungen, die aus den Bedingungen im Dreiecksnetz hervorgehen.

2) Die Gleichungen 12., die in der Gradmessung mit P, Q, R bezeichnet sind.

$$[12] = +\ 22{,}0000\ (12) - 7{,}6667\ (13) - 6{,}3333\ (14)$$
$$[13] = -\ 7{,}6667\ (12) + 23{,}3333\ (13) - 10{,}0000\ (14)$$
$$[14] = -\ 6{,}3333\ (12) - 10{,}0000\ (13) + 22{,}6667\ (14)$$

3) Die Gleichungen 13.

$$(12) = +\ 0{,}0692\ [12] + 0{,}0383\ [13] + 0{,}0362\ [14]$$
$$(13) = +\ 0{,}0383\ [12] + 0{,}0740\ [13] + 0{,}0433\ [14]$$
$$(14) = +\ 0{,}0362\ [12] + 0{,}0433\ [13] + 0{,}0734\ [14]$$

Bei der Ausgleichung des Dreiecksnetzes kommen nur diese letzteren Gleichungen in Betracht; es sind daher bei den Beobachtungen auch nur diese Gleichungen aufgenommen und die ersteren ganz weggelassen worden. In der Gradmessung in Ostpreufsen dagegen sind die letzteren Gleichungen weggelassen, und die ersteren bei den Beobachtungen aufgeführt worden.

§. 19. Ausgleichung der Winkel unter der Bedingung, daſs gewisse Richtungen unverändert bleiben.

Wenn eine Function φ von mehreren unabhängigen Veränderlichen $x, y, z \dots$ ein Maximum oder Minimum werden soll, so darf sie sich nur um Gröſsen der zweiten Ordnung verändern, wenn sich $x, y, z \dots$ um Gröſsen der ersten Ordnung ändern. Läſst man daher $x, y, z \dots$ in $x+h$, $y+i$, $z+k \dots$ übergehen, so wird die Veränderung der Function φ dadurch:

$$\frac{d\varphi}{dx}h + \frac{d\varphi}{dy}i + \frac{d\varphi}{dz}k + \dots \text{ plus Glieder höherer Ordnungen.}$$

Die Bedingung des Maximums oder Minimums erfordert also, daſs die Glieder der ersten Ordnung verschwinden, welche Werthe der ersten Ordnung man auch $h, i, k \dots$ beilegen möge. Es muſs also sein

$$0 = \frac{d\varphi}{dx}h + \frac{d\varphi}{dy}i + \frac{d\varphi}{dz}k + \dots$$

und zwar so, daſs jedes Glied in diesem Ausdruck für sich gleich Null ist. Hieraus ergeben sich also eben so viele Gleichungen, als Differentialquotienten oder Unbekannte vorhanden sind.

Anders verhält es sich aber, wenn die Gröſsen $x, y, z \dots$, oder einige davon, durch Bedingungen von einander abhängig sind. Eine solche Bedingung sei z. B. die Gleichung $u = 0$, wo u eine Function von einer oder mehreren der Unbekannten $x, y, z \dots$ sein kann. Es mag hier u eine Function von x und y bedeuten, so erhält man aus derselben für die oben angeführten Veränderungen dieser Unbekannten:

$$0 = \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}i + \dots$$

Es sollen nun aber diese und die obige Bedingung gleichzeitig erfüllt werden, man kann daher beide vereinigen, wenn man letztere, als eine Gleichung die gleich Null ist, vorher mit einem willkührlichen Factor multiplicirt. Auf diese Weise erhält man den Ausdruck:

$$\frac{d\varphi}{dx}h + \frac{d\varphi}{dy}i + \frac{d\varphi}{dz}k + \dots + p\left\{\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}i + \dots\right\}$$

derselbe muſs aber ebenfalls, und zwar für jeden Werth von p, verschwinden. Dies wird der Fall sein, wenn man in dem obigen Ausdruck die Summe der Coeffizienten von h, i, k .... gleich Null setzt. Man erhält alsdann:

$$0 = \frac{d\varphi}{dx} + p\,\frac{du}{dx}$$

$$0 = \frac{d\varphi}{dy} + p\,\frac{du}{dy} \quad \ldots\ldots\; 1.$$

$$0 = \frac{d\varphi}{dz}$$

Vermittelst dieser Gleichungen kann man x, y und z durch p ausdrücken; setzt man daher diese Ausdrücke für x und y in die Gleichung $u = 0$, so wird p bestimmt, und dadurch auch x, y, z ....

Ist die Zahl der unabhängigen Unbekannten gröfser als die der abhängigen, so kann man die Letzteren eliminiren und sie durch die Unabhängigen und p ausdrücken; man erhält dadurch so viel Gleichungen als unabhängige Unbekannte vorhanden sind, in denen aber aufserdem noch so viel willkührliche Factoren p .... vorkommen, als Bedingungsgleichungen u .... gegeben waren. Setzt man nun die gefundenen Ausdrücke der abhängigen Unbekannten in die Bedingungsgleichungen u ...., so kann man sämmtliche Factoren p .... eliminiren, und es bleiben dann so viel Gleichungen als unabhängige Unbekannte aufzulösen übrig, deren Werthe die Factoren p .... und die abhängigen Unbekannten x, y .... bestimmen.

Anwendung dieser Theorie.

Es seien die Gleichungen gegeben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= 0 = an + aax + aby + acz + \ldots \\ \frac{d\varphi}{dy} &= 0 = bn + abx + bby + bcz + \ldots \\ \frac{d\varphi}{dz} &= 0 = cn + acx + bcy + ccz + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\; 2.$$

und es finde zwischen x und y die Bedingung

$$u = 0 = q + \alpha x + \beta y + \ldots \text{ statt.}$$

Aus der Gleichung u folgt: $\frac{du}{dx} = \alpha$; $\frac{du}{dy} = \beta$. Setzt man diese Werthe nach Gleichung 1. in die Gleichungen 2., so gehen dieselben über in:

$$0 = an + aax + aby + acz + \ldots + \alpha p$$
$$0 = bn + abx + bby + bcz + \ldots + \beta p$$
$$0 = cn + acx + bcy + ccz + \ldots$$

Wird hieraus zunächst x eliminirt, so folgt:

$$0 = bn\cdot 1 + bb\cdot 1y + bc\cdot 1z + \ldots\ldots + \left(\beta - \alpha\frac{ab}{aa}\right)p$$

$$0 = cn\cdot 1 + bc\cdot 1y + cc\cdot 1z + \ldots\ldots - \alpha\frac{ac}{aa}p$$

$$\vdots$$

Wird auch y eliminirt, so erhält man:

$$0 = cn\cdot 2 + cc\cdot 2z + \ldots . - \left\{\alpha\frac{ac}{aa} + \left(\beta - \alpha\frac{ab}{aa}\right)\frac{bc.1}{bb.1}\right\}p \;\ldots\ldots\; 3.$$

und hieraus folgen nun die Werthe der Unbekannten, wenn man den Werth in der Klammer $= (s)$ setzt:

$$\left.\begin{aligned} z &= -\frac{cn.2}{cc.2} - \ldots . + \frac{(s)}{cc.2}p \\ &\vdots \\ y &= -\frac{bn.1}{bb.1} - \frac{bc.1}{bb.1}z - \frac{1}{bb.1}\left(\beta - \alpha\frac{ab}{aa}\right)p \\ x &= -\frac{an}{aa} - \frac{ab}{aa}y - \frac{ac}{aa}z - \frac{\alpha}{aa}p \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\; 4.$$

Setzt man diese Werthe von x und y, durch z und p ausgedrückt, in die Gleichung $u = 0$, so kommen darin nur p und die unabhängigen Unbekannten $z \ldots .$ vor. Eliminirt man p, und setzt seinen Werth in die Gleichungen 3., so erhält man eben so viel Gleichungen als unabhängige Unbekannten. Löst man dieselben auf, so findet man endlich durch die Substitution ihrer Werthe in 4. die abhängigen Unbekannten x, y und den willkührlichen Factor p. Die Zahl der Gleichungen 3. hängt von der Zahl der unabhängigen Unbekannten $z \ldots .$ ab; die Zahl der willkührlichen Factoren $p, p' \ldots .$ in denselben ist so grofs, als die Zahl der Bedingungsgleichungen $u, u' \ldots .$; sie können daher sämmtlich eliminirt, und dann die unabhängigen Unbekannten bestimmt werden u. s. w.

Beispiel.

Bei der Fortsetzung der Gradmessung 1837 wurden auf der Station Trunz die Richtungen Galtgarben und Wildenhof, des sicheren Anschlusses wegen, von neuem beobachtet. Nach der Ausgleichung der Beobachtungen zeigte sich eine kleine Verschiedenheit mit den in der Gradmessung angegebenen Richtungen, und da man letztere nicht ändern wollte, so kam es darauf an, die Trunzer Beobachtungen unter der Bedingung auszugleichen, dafs der Winkel *Galtgarben-Trunz-Wildenhof* so bliebe, wie er in der Gradmessung gefunden worden war.

Die Gleichungen in Trunz waren:

$$
\begin{array}{lrrrrrrr}
\frac{d\varphi}{dA} = 0 = & +30{,}5000\,A & -15{,}6667\,B & -\ 4{,}1667\,C & -\ 3{,}3333\,D & \text{———} & \text{———} & \text{———} \\
\frac{d\varphi}{dB} = 0 = & -15{,}6667\,A & +60{,}3667\,B & -13{,}1667\,C & -\ 8{,}0000\,D & -\ 4{,}8000\,E & -\ 0{,}8000\,F & -\ 3{,}1333\,G \\
\frac{d\varphi}{dC} = 0 = & -\ 4{,}1667\,A & -13{,}1667\,B & +36{,}1667\,C & -\ 6{,}3333\,D & \text{———} & \text{———} & \text{———} \\
\frac{d\varphi}{dD} = 0 = & -\ 3{,}3333\,A & -\ 8{,}0000\,B & -\ 6{,}3333\,C & +36{,}5000\,D & \text{———} & \text{———} & \text{———} \\
\frac{d\varphi}{dE} = 0 = & \text{———} & -\ 4{,}8000\,B & \text{———} & \text{———} & +22{,}0333\,E & -\ 6{,}9667\,F & -\ 6{,}9667\,G \\
\frac{d\varphi}{dF} = 0 = & \text{———} & -\ 0{,}8000\,B & \text{———} & \text{———} & -\ 6{,}9667\,E & +19{,}3667\,F & -\ 6{,}6333\,G \\
\frac{d\varphi}{dG} = 0 = & \text{———} & -\ 3{,}1333\,B & \text{———} & \text{———} & -\ 6{,}9667\,E & -\ 6{,}6333\,F & +24{,}0333\,G
\end{array}
$$

Die Buchstaben bezeichnen der Reihe nach die Richtungen: Buschkau, Dohnasberg, Stegen, Galtgarben, Wildenhof, Sommerfeld und Talpitten. Die Richtung Brosowken ist Null.

Die Bedingungsgleichung, damit der Winkel Galtgarben-Trunz-Wildenhof ungeändert bleibt, ist:

$$u = 0 = -0{,}613 + E - D$$

Hieraus folgt: $\frac{du}{dE} = 1$; $\frac{du}{dD} = -1$.

Man erhält daher nach den Gleichungen 1.:

$$0 = \frac{d\varphi}{dD} - p$$

$$0 = \frac{d\varphi}{dE} + p$$

d. h. man fügt oben der 4. Gl. $-\,p$ und der 5. $+\,p$ hinzu; alle übrigen bleiben unverändert. Eliminirt man nun, was hier gleich direct durch bloſse Division mit ihrem Coeffizienten geschehen kann, D und E, und drückt dieselben durch die übrigen Unbekannten und p aus, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
D &= +\,0{,}09132\,A + 0{,}2192\,B + 0{,}1735\,C + 0{,}0274\,p \\
E &= +\,0{,}21785\,B + 0{,}3162\,F + 0{,}3162\,G + 0{,}0454\,p
\end{aligned}
$$

Setzt man diese Werthe in die obigen Gleichungen, wo der 4. und 5. bereits $-\,p$ und $+\,p$ hinzugefügt gedacht werden muſs, so verschwinden D und E aus diesen Gleichungen, und man erhält 5 neue Gleichungen mit den 6 Unbekannten A, B, C, D, F, G und p.

Substituirt man nun die Werthe von D und E in die Bedingungsgleichung u, so findet man daraus:

$$p = -8{,}4223 - 1{,}2545\,A - 0{,}01827\,B - 2{,}3841\,C + 4{,}3445\,F + 4{,}3445\,G$$

und setzt man diesen Werth in die zuletzt erhaltenen 5 Gleichungen, so verschwindet darin p, und man findet folgende 5 Endgleichungen zwischen den 5 unabhängigen Unbekannten:

$$\begin{aligned}
+6{,}9439 &= +30{,}3102\,A - 16{,}3956\,B - 4{,}5274\,C - 0{,}3968\,F - 0{,}3968\,G\\
+0{,}1011 &= -16{,}3956\,A + 57{,}5676\,B - 14{,}5516\,C - 2{,}3232\,F - 4{,}6565\,G\\
+13{,}1935 &= -4{,}5274\,A - 14{,}5516\,B + 35{,}4815\,C - 0{,}7538\,F - 0{,}7538\,G\\
-24{,}0413 &= -0{,}3968\,A - 2{,}3232\,B - 0{,}7538\,C + 18{,}5376\,F - 7{,}4624\,G\\
-24{,}0413 &= -0{,}3968\,A - 4{,}6565\,B - 0{,}7538\,C - 7{,}4623\,F + 23{,}2042\,G
\end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt:

$A = -0{,}01904$; $B = +0{,}01042$; $C = -0{,}03077$; $F = +0{,}21803$; $G = +0{,}18565$;

Durch Substitution dieser Werthe in die vorigen Ausdrücke findet man aber auch: $p = -6{,}5717$; $D = -0{,}185$; $E = +0{,}428$.

Werden diese Verbesserungen den betreffenden Richtungen hinzugefügt, so erfüllen sie die obige Bedingung.

Bezeichnet man in den letzten 5 Gleichungen die Verbesserungen, welche auf die Ausgleichung des Dreiecksnetzes Bezug haben, mit (7), (8), (9), (10), (11), so erhält man die Gleichungen, wie sie §. 23. angegeben sind. Aus diesen Gleichungen sind demnächst nach §. 18. Gl. 11. die Coeffizienten der letzten Gleichungen in §. 23. bestimmt worden.