

§. 11. Beurtheilung der Messungen beider Theile der Grundlinie.

Es können drei von einander getrennte Fehlerursachen auf die Bestimmung der Länge der Grundlinie einwirken, nämlich: Fehler in der Vergleichung der Mefsstangen unter einander; Fehler in der Bestimmung ihrer Länge, und endlich Fehler, welche bei der Messung der Grundlinie selbst begangen worden sind. Es muß daher untersucht werden, wie groß der Einfluß einer jeden Fehlerursache auf die Länge der Grundlinie anzuschlagen ist.

Nach dem vorigen §. erhält man, im Mittel aus den wiederholten Messungen, den Ausdruck des südlichen Theils der Grundlinie wie folgt:

$$= 74 \lambda' + 74 \lambda'' + 73 \lambda''' + 73 \lambda^{iv} + 329,^{L}473 - 92,^{L}330 m' - 99,^{L}171 m'' - 92,^{L}470 m''' - 95,^{L}107 m^{iv}$$

den Ausdruck des nördlichen Theils:

$$= 77 \lambda' + 76 \lambda'' + 76 \lambda''' + 76 \lambda^{iv} + 67,^{L}573 - 95,^{L}172 m' - 100,^{L}499 m'' - 94,^{L}593 m''' - 97,^{L}478 m^{iv}$$

Setzt man zuerst in beiden Ausdrücken für  $\lambda'$ ,  $\lambda''$ ,  $\lambda'''$ ,  $\lambda^{iv}$  nach §. 1. die Werthe  $L + x'$ ,  $L + x''$  .... und führt dann für  $L$  seinen, aus der Vergleichung der Mefsstange  $\mathcal{N}_0^I$  mit der Toise gefundenen Werth, nämlich

$$L = 1727,^{L}9962 - x' + 1,5405 m'$$

in die obigen Gleichungen ein, so erhält man die Ausdrücke, welche den Einfluß der Größen  $x'$ ,  $x''$ ,  $x'''$ ,  $x^{iv}$ ,  $m'$ ,  $m''$ ,  $m'''$ ,  $m^{iv}$  auf die Länge der beiden Theile der Grundlinie ausdrücken, und zwar

für den südlichen Theil:

$$- 220 x' + 74 x'' + 73 x''' + 73 x^{iv} + 360,^{L}577 m' - 99,^{L}171 m'' - 92,^{L}470 m''' - 95,^{L}107 m^{iv};$$

für den nördlichen Theil:

$$- 228 x' + 76 x'' + 76 x''' + 76 x^{iv} + 374,^{L}681 m' - 100,^{L}499 m'' - 94,^{L}593 m''' - 97,^{L}478 m^{iv}.$$

Der mittlere Fehler eines jeden Ausdruckes ist zugleich der mittlere Fehler des zugehörigen Theils der Grundlinie, welcher aus der Vergleichung der Mefsstangen unter einander hervorgegangen ist.

Der mittlere Fehler  $F$  eines solchen Ausdruckes wird aber aus dem Gewicht  $P$  dieses Ausdruckes, und dem mittleren Fehler  $\varepsilon$  der Vergleichung der Mefsstangen unter einander gefunden wie folgt:

$$F = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{P}}$$

44 I. §. 11. *Beurtheilung der Messungen beider Theile der Grundlinie.*

Da  $\varepsilon$  bereits bekannt und nach §. 4.  $= 0,00432$  ist, so kömmt es bloß darauf an, das Gewicht  $P$  eines jeden der obigen Ausdrücke zu suchen, um den mittleren Fehler desselben bestimmen zu können.

Wenn unbekannte Größen  $x, y, z \dots$  durch Gleichungen, wie

$$(an) = (aa) x + (ab) y + (ac) z + \dots$$

$$(bn) = (ab) x + (bb) y + (bc) z + \dots$$

$$(cn) = (ac) x + (bc) y + (cc) z + \dots$$

gegeben sind, und man das Gewicht  $P$  eines aus denselben zusammengesetzten Ausdrucks

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \dots$$

sucht, so findet man es durch die Formel

$$\frac{1}{P} = \alpha A + \beta B + \gamma C + \dots$$

in welcher  $A, B, C \dots$  Größen sind, die den folgenden Gleichungen Genüge leisten, und aus denselben gefunden werden können:

$$\alpha = (aa) A + (ab) B + (ac) C + \dots$$

$$\beta = (ab) A + (bb) B + (bc) C + \dots$$

$$\gamma = (ac) A + (bc) B + (cc) C + \dots$$

u. s. w. u. s. w.

Im vorliegenden Fall lassen sich zur Bestimmung von  $A, B, C \dots$  aus den Gleichungen des §. 4. nach dem obigen Schema leicht die erforderlichen Gleichungen bilden; denn  $\alpha$  ist der Coefficient von  $x'$ ,  $\beta$  der Coefficient von  $x''$  etc., in den vorhin aus den Messungen der Grundlinie abgeleiteten Ausdrücken.

Auf diese Weise erhält man für beide Theile der Grundlinie die folgenden beiden Systeme von Gleichungen:

$$\begin{aligned} - 220 &= 8 A - 8,81876 E + 3,10727 F + 2,97395 G + 2,97052 H = - 228 \\ + 74 &= 8 B + 2,93961 E - 9,32177 F + 2,97395 G + 2,97052 H = + 76 \\ + 73 &= 8 C + 2,93961 E + 3,10727 F - 8,92180 G + 2,97052 H = + 76 \\ + 73 &= 8 D + 2,93961 E + 3,10727 F + 2,97395 G - 8,91152 H = + 76 \\ + 360,577 &= - 11,7583 A + 13,76481 E - 4,64469 F - 4,50939 G - 4,32496 H = + 374,618 \\ - 99,171 &= - 12,4290 B - 4,64469 E + 15,22860 F - 4,58989 G - 4,75987 H = - 100,499 \\ - 92,470 &= - 11,8957 C - 4,50939 E - 4,58989 F + 14,03738 G - 4,53592 H = - 94,593 \\ - 95,107 &= - 11,8820 D - 4,32496 E - 4,75987 F - 4,53592 G + 14,24174 H = - 97,478 \end{aligned}$$

Die erste Vertikalreihe bildet mit den Größen rechts des Gleichheitszeichens, das System der Gleichungen für den südlichen Theil der Grundlinie. Die letzte Vertikalreihe, mit denselben Größen links des Gleichheitszeichens, das System der Gleichungen für den nördlichen Theil.

Die Auflösungen beider Systeme von Gleichungen geben die Werthe  $A, B, C \dots$  für beide Theile der Grundlinie wie folgt:

	Für den südlichen Theil.	Für den nördlichen Theil.
Log. $A =$	0,13280	$= 9,86564 - 10$
- $B =$	0,64220	$= 0,64217$
- $C =$	0,84376	$= 0,91196$
- $D =$	1,10464 <sub>n</sub>	$= 1,12342$ <sub>n</sub>
- $E =$	1,73039	$= 1,75986$
- $F =$	1,46459	$= 1,50939$
- $G =$	1,50894	$= 1,55995$
- $H =$	1,27994	$= 1,34048$
Hiermit findet man:	$\frac{1}{P} = 11300,7$	$\frac{1}{P} = 12513,7$
und den mittleren Fehler:	$= \pm 0,^L459$	$= \pm 0,^L483$

Dies sind die mittleren Fehler, welche lediglich aus der Vergleichung der Meßstangen unter einander für beide Theile der Grundlinie hervorgehen. Es bleibt daher noch die Untersuchung über die beiden anderen Fehlerursachen übrig.

Der mittlere Fehler einer Vergleichung von  $L$  mit der Toise ist in §. 5.  $= 0,^L003748$  gefunden worden. Da nun die Bestimmung von  $L$  auf 10 Messungen beruht, und der südliche Theil der Grundlinie durch eine 294malige, der nördliche durch eine 305malige Vervielfältigung von  $L$  gemessen wurde, so ist der mittlere Fehler, der aus der Vergleichung der Meßstange  $\mathcal{N}^{\circ}$  I. mit der Toise hervorgeht, für den südlichen Theil der Grundlinie

$$= \frac{294}{\sqrt{10}} \cdot 0,003748 = \pm 0,^L349$$

für den nördlichen Theil der Grundlinie

$$= \frac{305}{\sqrt{10}} \cdot 0,003748 = \pm 0,^L362$$

Der dritte Einfluss, der zufälligen Fehler, die bei dem Messen der Grundlinie selbst begangen wurden, kann nur nach den Unterschieden, welche die wiederholten Messungen im vorigen §. ergeben haben, geschätzt werden.

Für den südlichen Theil der Grundlinie ist

$$\text{für die ersten 160 Stangen der Unterschied} = 1,^L207$$

$$\text{- - zweiten 134 - - - - -} = 0,^L138$$

46 I. §. 11. *Beurtheilung der Messungen beider Theile der Grundlinie.*

Man erhält daher das Quadrat des mittleren Fehlers, welcher bei einer Messung zu fürchten ist

$$= \frac{294}{2} \left\{ \frac{(1,207)^2}{160} + \frac{(0,138)^2}{134} \right\}$$

Da aber die Messung zweimal gemacht wurde, so ist dasselbe noch durch 2 zu dividiren. Man erhält daher diesen mittleren Fehler des südlichen Theils der Grundlinie

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ \frac{294}{160} (1,207)^2 + \frac{294}{134} (0,138)^2 \right\}} = \pm 0,824$$

Für den nördlichen Theil der Grundlinie ist

für die ersten 160 Stangen der Unterschied = 0,930

- - zweiten 145 - - - - - = 0,144

Hieraus ergibt sich der mittlere Fehler

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ \frac{305}{160} (0,930)^2 + \frac{305}{145} (0,144)^2 \right\}} = \pm 0,650$$

Vereinigt man jetzt die aus den drei getrennten Ursachen hervorgegangenen partiellen Fehler, so erhält man die summarischen mittleren Fehler

1) für den südlichen Theil der Grundlinie

$$= \sqrt{\left\{ (0,459)^2 + (0,349)^2 + (0,824)^2 \right\}} = \pm 1,006$$

oder =  $\frac{1}{505400}$  der Länge.

2) Für den nördlichen Theil der Grundlinie

$$= \sqrt{\left\{ (0,483)^2 + (0,362)^2 + (0,650)^2 \right\}} = \pm 0,887$$

oder =  $\frac{1}{594400}$  der Länge.

Der erste Fehler beträgt auf 100 Preussische Meilen etwa  $4\frac{3}{4}$  Fufs; der zweite Fehler nur 4 Fufs.

Der mittlere Fehler beider Theile, oder der ganzen gemessenen Linie ist

$$= \sqrt{(1,006)^2 + (0,887)^2} = \pm 1,341$$

oder =  $\frac{1}{772300}$  der Länge.

