

§. 4. *Vergleichung der Längen der Mefsstangen unter einander.*

Bei den Vergleichen der Stangen wurden die Glaskeile stets nach einerlei Richtung eingeschoben. Diese Vorsicht erschien nothwendig, um kleine Mängel an den keilförmigen Schneiden, die durch den häufigen Gebrauch entstanden waren, unschädlich zu machen.

Um gegen Beobachtungsfehler geschützt zu sein, wurden sämtliche Ablesungen doppelt gemacht: zuerst wurde von mir mit dem Keil *N<sup>o</sup> III* abgelesen, und dann von dem Hauptmann *v. Hesse* mit dem Keil *N<sup>o</sup> IV*. Es wurden im Ganzen 24 Doppel-Vergleichen der 4 Mefsstangen, nach der in §. 1. erläuterten Methode, vorgenommen; dies sind 192 Vergleichen der einzelnen Stangen, von denen jede doppelt abgelesen wurde.

Zwölf Mal war die Wärme aller 4 Stangen beinahe gleich, und zwölf Mal waren je zwei derselben gegen 20° R. wärmer. Bei den Beobachtungen in hoher Temperatur, am 4. und 6. Juni, waren die Stangen auf dem Hofe der Kriegsschule in der Sonne erwärmt worden; bei allen früheren geschah die Erwärmung in einem besonderen auf 28 bis 33° R. geheizten Zimmer. Sämmtliche Vergleichen, d. h. die Werthe *n'*, *n''*, *n'''*, *n<sup>iv</sup>* und *a*, *b*, *c*, *d* (§. 1.) sind in der folgenden Übersicht zu 8 arithmetischen Mitteln vereinigt, von denen jedes 3 Beobachtungen enthält, die nahe in gleicher Wärme gemacht wurden.

	<i>n'</i>	<i>a</i>	<i>n''</i>	<i>b</i>	<i>n'''</i>	<i>c</i>	<i>n<sup>iv</sup></i>	<i>d</i>
	$\frac{L}{\quad}$	$\frac{L}{\quad}$						
1846	3,5198	1,8409	2,9197	1,9139	3,3631	1,8434	3,3509	1,8814
März 12	3,5201	1,8341	2,9171	1,9069	3,3635	1,8336	3,3536	1,8699
	3,5171	1,8255	2,9151	1,8984	3,3603	1,8245	3,3511	1,8661
Mittel .....	3,5190	1,8335	2,9173	1,9064	3,3623	1,8338	3,3519	1,8725
März 12	3,5179	1,8124	2,9124	1,8885	3,3592	1,8167	3,3476	1,8563
und 13	3,5154	1,8099	2,9126	1,8830	3,3550	1,8117	3,3483	1,8515
	3,5331	1,8470	2,9307	1,9150	3,3770	1,8462	3,3677	1,8828
Mittel .....	3,5221	1,8231	2,9186	1,8955	3,3637	1,8249	3,3545	1,8635
März 16	3,1874	1,1267	2,5366	1,1244	3,4046	1,8346	3,3847	1,8689
	3,2184	1,1587	2,5767	1,1866	3,4039	1,8213	3,3849	1,8598
	3,2023	1,1456	2,6115	1,2516	3,3937	1,8074	3,3777	1,8457
Mittel .....	3,2027	1,1437	2,5749	1,1875	3,4007	1,8211	3,3824	1,8581

I. §. 4. *Vergleichung der Längen der Mefsstangen unter einander.* 11

	$n'$	$a$	$n''$	$b$	$n'''$	$c$	$n^{iv}$	$d$
	$\overbrace{L}$							
1846	3,5516	1,7810	2,9484	1,8530	2,9568	1,0132	2,8841	0,9463
März 17	3,5475	1,7725	2,9461	1,8414	2,9924	1,0580	2,9140	0,9700
	3,5465	1,7564	2,9402	1,8266	3,0066	1,0762	2,9491	1,0344
Mittel .....	3,5485	1,7700	2,9449	1,8403	2,9853	1,0491	2,9157	0,9836
März 19	3,0772	0,8973	2,9460	1,8470	2,9635	1,0246	3,3850	1,8036
	3,0866	0,8908	2,9457	1,8371	2,9660	1,0087	3,3822	1,7966
	3,0999	0,9134	2,9383	1,8250	2,9838	1,0306	3,3784	1,7903
Mittel .....	3,0879	0,9005	2,9433	1,8364	2,9711	1,0213	3,3819	1,7968
März 20	3,5364	1,7790	2,4455	0,9775	3,3921	1,7840	2,8085	0,8369
	3,5356	1,7692	2,4705	0,9974	3,3908	1,7697	2,8342	0,8655
	3,5330	1,7514	2,5018	1,0432	3,3840	1,7551	2,8698	0,9131
Mittel .....	3,5350	1,7665	2,4726	1,0060	3,3890	1,7696	2,8375	0,8718
Juni 4 u. 6	3,2763	1,0349	2,6894	1,1700	3,1003	1,0422	3,0744	1,0570
	3,2742	1,0336	2,6939	1,1803	3,1166	1,0687	3,0825	1,0865
	3,1788	0,9858	2,5884	1,1278	3,0264	1,0362	2,9984	1,0510
Mittel .....	3,2431	1,0181	2,6572	1,1594	3,0811	1,0490	3,0518	1,0648
Juni 5	3,4818	1,5053	2,8902	1,6060	3,3382	1,5385	3,3242	1,5834
	3,4815	1,5030	2,8825	1,5960	3,3330	1,5259	3,3165	1,5667
	3,4802	1,5005	2,8787	1,5904	3,3267	1,5164	3,3113	1,5625
Mittel .....	3,4812	1,5029	2,8838	1,5975	3,3326	1,5269	3,3173	1,5709

Diese, aus den Vergleichen der Mefsstangen gezogenen 8 arithmetischen Mittel geben folgende Gleichungen, in denen die unbekanntten Größen  $C^{(1)}, C^{(2)} \dots$  die in der horizontalen Reihe vorkommenden arithmetischen Mittel sind.

$$\begin{cases}
 3,5190 = C^{(1)} - x' + 1,8335 m' \\
 2,9173 = C^{(1)} - x'' + 1,9064 m'' \\
 3,3623 = C^{(1)} - x''' + 1,8338 m''' \\
 3,3519 = C^{(1)} - x^{iv} + 1,8725 m^{iv} \\
 3,5224 = C^{(2)} - x' + 1,8231 m' \\
 2,9186 = C^{(2)} - x'' + 1,8955 m'' \\
 3,3637 = C^{(2)} - x''' + 1,8249 m''' \\
 3,3545 = C^{(2)} - x^{iv} + 1,8635 m^{iv} \\
 3,2027 = C^{(3)} - x' + 1,1437 m' \\
 2,5749 = C^{(3)} - x'' + 1,1875 m'' \\
 3,4007 = C^{(3)} - x''' + 1,8211 m''' \\
 3,3824 = C^{(3)} - x^{iv} + 1,8581 m^{iv}
 \end{cases}$$

12 I. §. 4. *Vergleichung der Längen der Messstangen unter einander.*

$$\left\{ \begin{array}{l} 3,5485 = C^{(4)} - x' + 1,7700 m' \\ 2,9449 = C^{(4)} - x'' + 1,8403 m'' \\ 2,9853 = C^{(4)} - x''' + 1,0491 m''' \\ 2,9157 = C^{(4)} - x^{IV} + 0,9836 m^{IV} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3,0879 = C^{(5)} - x' + 0,9005 m' \\ 2,9433 = C^{(5)} - x'' + 1,8364 m'' \\ 2,9711 = C^{(5)} - x''' + 1,0213 m''' \\ 3,3819 = C^{(5)} - x^{IV} + 1,7968 m^{IV} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3,5350 = C^{(6)} - x' + 1,7665 m' \\ 2,4726 = C^{(6)} - x'' + 1,0060 m'' \\ 3,3890 = C^{(6)} - x''' + 1,7696 m''' \\ 2,8375 = C^{(6)} - x^{IV} + 0,8718 m^{IV} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3,2431 = C^{(7)} - x' + 1,0181 m' \\ 2,6572 = C^{(7)} - x'' + 1,1594 m'' \\ 3,0811 = C^{(7)} - x''' + 1,0490 m''' \\ 3,0518 = C^{(7)} - x^{IV} + 1,0648 m^{IV} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3,4812 = C^{(8)} - x' + 1,5029 m' \\ 2,8838 = C^{(8)} - x'' + 1,5975 m'' \\ 3,3326 = C^{(8)} - x''' + 1,5269 m''' \\ 3,3173 = C^{(8)} - x^{IV} + 1,5709 m^{IV} \end{array} \right.$$

Da die obigen 32 Gleichungen nur  $8 + 7 = 15$  unbekante Größen enthalten, so müssen sie nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst werden. Nachdem man die Differentialquotienten nach sämtlichen Unbekannten formirt und gleich Null gesetzt hat, führe man, z. B. den Werth von  $C^{(1)}$ , den die Summe der Differentiationen nach  $C^{(1)}$  unabhängig von  $x', x'', x'''$ , und  $x^{IV}$  ergibt (weil die Summe der letzten 4 Größen gleich Null ist), in die folgenden, durch die Differentiation entstandenen Gleichungen ein, wodurch  $C^{(1)}$  eliminirt ist. Auf dieselbe Weise eliminirt man auch  $C^{(2)}, C^{(3)} \dots$  und erhält dadurch:

I. §. 4. *Vergleichung der Längen der Mefsstangen unter einander.* 13

$$\begin{aligned}
 - 1,90679 &= 8 x' - 8,81876 m' + 3,10727 m'' + 2,97395 m''' + 2,97052 m^{IV} \\
 + 2,92015 &= 8 x'' + 2,93961 m' - 9,32177 m'' + 2,97395 m''' + 2,97052 m^{IV} \\
 - 0,65309 &= 8 x''' + 2,93961 m' + 3,10727 m'' - 8,92180 m''' + 2,97052 m^{IV} \\
 - 0,36029 &= 8 x^{IV} + 2,93961 m' + 3,10727 m'' + 2,97395 m''' - 8,91152 m^{IV} \\
 + 3,13100 &= - 11,7583 x' + 13,76481 m' - 4,64469 m'' - 4,50939 m''' - 4,32496 m^{IV} \\
 - 4,23159 &= - 12,4290 x'' - 4,64469 m' + 15,22860 m'' - 4,58989 m''' - 4,75987 m^{IV} \\
 + 1,28157 &= - 11,8957 x''' - 4,50939 m' - 4,58989 m'' + 14,03738 m''' - 4,53592 m^{IV} \\
 + 0,97840 &= - 11,8820 x^{IV} - 4,32496 m' - 4,75987 m'' - 4,53592 m''' + 14,24174 m^{IV}
 \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt die Werthe der 8 Unbekannten wie folgt:

$$\begin{aligned}
 x' &= - 0,2869 & m' &= + 0,53027 \\
 x'' &= + 0,3931 & m'' &= + 0,55092 \\
 x''' &= - 0,0723 & m''' &= + 0,56308 \\
 x^{IV} &= - 0,0340 & m^{IV} &= + 0,56485
 \end{aligned}$$

Durch Substitution findet man nun die Werthe von  $C^{(1)}, C^{(2)} \dots$  und die übrigbleibenden Fehler der 32 früheren Gleichungen, nämlich:

$$\begin{aligned}
 C^{(1)} = 2^L_{,2594} & \left\{ \begin{array}{l} + 0,0005 \\ + 0,0007 \\ - 0,0019 \\ + 0,0008 \end{array} \right. & C^{(5)} = 2^L_{,3263} & \left\{ \begin{array}{l} - 0,0027 \\ - 0,0016 \\ - 0,0025 \\ + 0,0068 \end{array} \right. \\
 C^{(2)} = 2^L_{,2669} & \left\{ \begin{array}{l} + 0,0016 \\ + 0,0005 \\ - 0,0030 \\ + 0,0010 \end{array} \right. & C^{(6)} = 2^L_{,3136} & \left\{ \begin{array}{l} - 0,0021 \\ - 0,0021 \\ + 0,0068 \\ - 0,0025 \end{array} \right. \\
 C^{(3)} = 2^L_{,3063} & \left\{ \begin{array}{l} + 0,0031 \\ + 0,0075 \\ - 0,0032 \\ - 0,0074 \end{array} \right. & C^{(7)} = 2^L_{,4156} & \left\{ \begin{array}{l} + 0,0008 \\ - 0,0041 \\ + 0,0026 \\ + 0,0008 \end{array} \right. \\
 C^{(4)} = 2^L_{,3239} & \left\{ \begin{array}{l} - 0,0008 \\ + 0,0002 \\ - 0,0016 \\ + 0,0022 \end{array} \right. & C^{(8)} = 2^L_{,3977} & \left\{ \begin{array}{l} - 0,0003 \\ - 0,0009 \\ + 0,0029 \\ - 0,0017 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Die Summe der Quadrate dieser 32 Fehler ist:

$$= 0,00031744$$

und da 15 unbekannte Größen bestimmt worden sind, so ergibt sich der mittlere Fehler jeder der 32 Gleichungen

$$\sqrt{\frac{0,00031744}{32 - 15}} = 0,^L00432$$