

## Erster Abschnitt.

### Die Grundlinie.

**D**er Apparat, welcher zur Messung der Grundlinie gebraucht wurde, ist derselbe, den *Bessel* in der Gradmessung in Ostpreußen speciell beschrieben hat. Nachdem im Jahre 1834 die Grundlinie bei Königsberg damit gemessen worden war, wurden 1836 die Messstangen nebst dem dazu gehörigen Compareteur nach Berlin gebracht. Im Frühjahr 1838 bat sich der Dänische Conferenzzrath *Schumacher* dieselben aus, um eine Verifications-Basis auf der Insel Amager zu messen, und im Sommer desselben Jahres wurden sie über Stettin nach Kopenhagen geschickt, wo im Herbst die Messung der Grundlinie stattfand.

Die höchst einfache und sinnreiche Einrichtung, welche *Bessel* dem Apparat gegeben hatte, macht die Anwendung so sicher und leicht, daß auch der Schwedische General *Akrell* die Benutzung desselben nachsuchte, und ihn im Sommer 1839 per Dampfschiff nach Schweden holen ließ, wo im folgenden Sommer die Grundlinie bei Upsala damit gemessen wurde. Im Sommer 1841 gelangte der Apparat über Stettin wieder nach Berlin zurück.

Nachdem der Apparat auf diese Weise zur Messung dreier Grundlinien gedient, und so bedeutende Reisen gemacht hatte, konnte, bei einer neuen Anwendung desselben, die Unveränderlichkeit seiner einzelnen Theile nicht mehr vorausgesetzt werden, besonders da mehrere Stangen, der sorgfältigsten Behandlung ungeachtet, deutliche Spuren des Gebrauchs an sich trugen. Es konnten daher auch die alten Ermittlungen über die Länge der Stangen, über die Angaben ihrer Metallthermometer und ihrer Wasserwagen, die in Königsberg theils von *Bessel* selbst, theils unter seiner Leitung von mir gemacht worden waren, bei einer neuen Messung keine Anwendung mehr finden, und mußten deshalb sämmtlich wiederholt werden.

Die Ergebnisse dieser neuen Vergleichung der Mefsstangen unter einander, und mit der Toise, werden in den folgenden §§. zusammengestellt und näher erörtert werden. Die Rechnungsvorschriften sind im Allgemeinen so beibehalten worden, wie sie *Bessel* in der Gradmessung gegeben hat, und sie werden hier nur aus dem Grunde wiederholt, um dem Leser die Übersicht und den Zusammenhang bei dem Gange der Rechnung zu erleichtern.

Das Lokal, welches bei der Vergleichung der Stangen benutzt wurde, befindet sich zur ebenen Erde in einem Hintergebäude der Allgemeinen Kriegsschule. Es besteht aus drei Zimmern; in dem ersten wurden die verschiedenen Geräthschaften aufgestellt, die nicht unmittelbar gebraucht wurden, und außerdem diente es zum Aufenthalt der Arbeiter, welche die Stangen bei der Vergleichung in verschiedenen Temperaturen zu tragen hatten; in dem zweiten anstossenden Zimmer, welches durch die umgebenden Gebäude fast gänzlich gegen die direkte Einwirkung der Sonnenstrahlen geschützt ist, wurde der Comparateur aufgestellt; in dem dritten endlich, nach einer andern Seite an das erste anstossenden Zimmer, wurden die Stangen für die Vergleichungen bei verschiedenen Temperaturen erwärmt.

Die Aufstellung des Comparateurs wurde von Herrn *Martins*, Vorsteher der Werkstatt von *Pistor* und *Martins*, besorgt. Um das Fußgestell desselben zu isoliren, wurden Löcher in den Fußboden eingeschnitten, und die Erde gegen zwei Fuß tief herausgenommen; in diesen Löchern wurden dann die Böcke, welche den Comparateur tragen, auf einer Steinunterlage horizontal aufgestellt, und jeder mit 4 halben Centnergewichten belastet. Auf diese Böcke wurde demnächst die Röhre von Holz gelegt, die den Vergleichungs-Apparat trägt, und dann alle einzelnen Theile desselben sorgfältig untersucht und berichtigt.

Neben dem Comparateur wurde ein Fußgestell, ähnlich dem eines großen Tisches, aufgestellt, und die vier Mefsstangen auf demselben horizontal neben einander gelegt. Diese Einrichtung hatte zwar das Unbequeme, daß die Stangen bei der Vergleichung über einander hinweg gehoben werden mußten; sie gewährte aber den Vortheil, daß dieselben sehr nahe gleiche Temperatur annahmen, welches nicht der Fall gewesen wäre, wenn sie auf ein aufrecht stehendes Gestell übereinander gelegt worden wären. Diese Einrichtung war aber in dem Zimmer, in welchem die Stangen erwärmt wurden, aus Mangel an Raum nicht auszuführen; hier mußten sie daher vertikal übereinander aufgestellt werden.



Da gegen das Ende der Vergleichen die Temperatur im Freien sehr gestiegen war, während sie im Zimmer sich noch ziemlich niedrig erhielt, so wurde der Versuch gemacht, die Stangen in ihren Kasten auf dem Hofe der Kriegsschule den Sonnenstrahlen auszusetzen, ganz in der Art, wie es bei dem Messen der Grundlinie geschehen muß, um zu sehen, ob sich nicht auf diesem Wege eine gleichmäßiger hohe Temperatur erlangen ließe als in dem geheizten Zimmer. Dieser Versuch gelang vollkommen, und die letzten Vergleichen bei verschiedenen Temperaturen sind auf diese Weise gemacht worden.

### §. 1. Einrichtung der Mefsstangen und Vergleichung ihrer Längen unter einander.

Die Mefsstangen bestehen aus Eisen, das darauf angebrachte Metallthermometer aus Zink (Fig. 1.). Ihre specielle Einrichtung hat *Bessel* in der Gradmessung §. 1. so vollständig beschrieben, dafs eine Wiederholung überflüssig erscheint.

Die Ausdehnungen des Eisens und des Zinks durch die Wärme werden einander proportional angenommen, daher sind auch die Veränderungen der Längen der Mefsstangen den Angaben der Metallthermometer proportional. Bezeichnet man also das Verhältnifs der Veränderungen des Metallthermometers zu den Veränderungen der Länge der Stange durch  $1 : m$ ; so ist die Veränderung für eine Angabe  $a$  des Metallthermometers gleich  $am$ . Je mehr die Temperatur, von  $a$  an, steigt, je kleiner wird der Zwischenraum zwischen  $i'$  und  $k'$  (Fig. 1.), oder je kleiner wird  $a$ , weil die Zinkstange sich stärker ausdehnt als die darunter befindliche Eisenstange. Nennt man daher  $\lambda$  die Länge der Stange bei einer gewissen hohen Temperatur, für welche  $a = 0$  ist, und  $l$  die Länge der Stange für die Angabe  $a$  des Metallthermometers, so wird man den Werth von  $l$  erhalten, wenn man  $am$  von  $\lambda$  abzieht. Es ist folglich

$$l = \lambda - am.$$

Eine solche Gleichung ist für jede Stange vorhanden. Man erhält daher für die 4 Mefsstangen

$$\mathcal{N}_0^1 \text{ 1. .... } l' = \lambda' - am' \text{ ..... I}$$

$$\mathcal{N}_0^2 \text{ 2. .... } l'' = \lambda'' - bm''$$

$$\mathcal{N}_0^3 \text{ 3. .... } l''' = \lambda''' - cm'''$$

$$\mathcal{N}_0^4 \text{ 4. .... } l^{iv} = \lambda^{iv} - dm^{iv}$$

Oder wenn man  $\lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \lambda^{iv} = 4L$  setzt, und die Abweichung jeder einzelnen von dem mittleren Werthe  $L$  durch  $x', x'', x''', x^{iv}$  bezeichnet, so wird sein

$$\lambda' = L + x'$$

$$\lambda'' = L + x''$$

$$\lambda''' = L + x'''$$

$$\lambda^{iv} = L + x^{iv}$$

Die Summe dieser Werthe muß  $4L$  geben, und daraus folgt, daß  $x' + x'' + x''' + x^{iv} = 0$  sein muß. Setzt man die für  $\lambda, \lambda'' \dots$  gefundenen Werthe in die Gleichungen I, so findet man:

$$l' = L + x' - am' \dots \text{II.}$$

$$l'' = L + x'' - bm''$$

$$l''' = L + x''' - cm'''$$

$$l^{iv} = L + x^{iv} - dm^{iv}$$

Bezeichnet man jetzt die unbekannte Entfernung der festen Keile  $q$  auf dem Comparateur durch  $M$  (Fig. 1.); die Summe der Längen der beiden Cylinder  $c$ , durch  $s$ ; die Länge der Stange  $\mathcal{N}^{\circ} 1$  durch  $l'$ ; die Summe der beiden mit dem Glaskeil zwischen  $c$  und  $q$  zu messenden Zwischenräume durch  $n'$ , so erhält man für die 4 Meßstangen:

$$\begin{aligned} M - s &= l' + n' \\ &= l'' + n'' \\ &= l''' + n''' \\ &= l^{iv} + n^{iv} \end{aligned}$$

und setzt man  $M - s = L + C$ , wo  $C$  eine neue Unbekannte bedeutet, so folgt

$$l' = L + C - n' \dots \text{III.}$$

$$l'' = L + C - n''$$

$$l''' = L + C - n'''$$

$$l^{iv} = L + C - n^{iv}$$

Da der Werth von  $C$ , während einer Vergleichung der 4 Stangen, als unveränderlich angesehen wird, so sind die Beobachtungen so anzuordnen, daß regelmäßige Veränderungen des Comparateurs durch Wärme oder Feuchtigkeit unschädlich gemacht werden. Dies erreicht man, wenn jede Vergleichung in umgekehrter Ordnung wiederholt, und aus dieser doppelten Anzahl das arithmetische Mittel genommen wird. Zu jeder Vergleichung gehören daher 8 Beobachtungen der 4 Meßstangen, die in folgender Ordnung I, II, III, IV, IV, III, II, I angestellt sind.

Durch Vergleichung der obigen Ausdrücke II und III findet man endlich:

$$n' = C - x' + am'$$

$$n'' = C - x'' + bm''$$

$$n''' = C - x''' + cm'''$$

$$n^{iv} = C - x^{iv} + dm^{iv}$$

In diesen Gleichungen sind  $C, m', m'', m''', m^{iv}$  und  $x', x'', x''', x^{iv}$  unbekannt. Die Summe der 4 letzten Größen ist aber, wie vorhin gezeigt wurde,  $= 0$ , wodurch eine derselben bestimmt wird, so daß sie nur für 3 Unbekannte gelten. Jede Vergleichung der 4 Stangen liefert 4 solche Gleichungen, und jede andere Vergleichung führt einen anderen Werth von  $C$  ein, weil nicht angenommen werden kann, daß der Apparat in der Zwischenzeit unverändert geblieben ist. Aus  $h$  Vergleichungen aller 4 Messstangen, sind also  $h + 7$  unbekannte Größen zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
 x' + x'' + x''' + x^{iv} &= 0 \\
 x' + x'' &= C \\
 x' + x''' &= C \\
 x' + x^{iv} &= C
 \end{aligned}$$

§. 2. *Vergleichung der Mefsstangen mit der Toise.*

Im Jahre 1834 waren die Mefsstangen in Königsberg mit der sogenannten Pendeltoise verglichen worden. Diese Toise, Eigenthum der Königsberger Sternwarte, ist 1823 von Hrn. *Fortin* verfertigt, von den Herren *Arago* und *Zahrtmann* mit dem Original verglichen, und 0,0008 kürzer als dieses gefunden worden. Dieselbe Toise hat *Bessel* auch 1835, bei seiner Vergleichung des Originals des Preussischen Längenmaßes von 1816 mit der *Toise du Pérou*, zum Grunde gelegt. Es wäre daher sehr wünschenswerth gewesen, bei einer neuen Vergleichung der Mefsstangen die nämliche Toise zu benutzen; allein *Bessel* war zu dieser Zeit schon so krank, daß ich Bedenken trug, ihn mit irgend einem Anliegen zu belästigen. Ich wandte mich daher an Hrn. Conferenzzrath *Schumacher* in Altona mit der Bitte, mir eine von seinen beiden Toisen, die *Bessel* (Untersuchung über die Einheit des Preussischen Längenmaßes) mit der Pendeltoise sehr genau verglichen hatte. Hr. Conferenzzrath *Schumacher* erwiederte, daß er mir nicht bloß eine, sondern beide Toisen zur Disposition stellen wolle, von denen die eine an dem einen Ende sphärisch abgerundet sei, und sich sehr bequem an die andere anschließen lasse, wodurch eine Doppeltoise gebildet werde, die sich unmittelbar mit den Mefsstangen vergleichen liefse. Diesen Vorschlag nahm ich mit großem Danke an, da er mich allen den Schwierigkeiten überhob, welche die Verdoppelung einer Toise auf dem Comparateur mit sich bringt.

Die Operation der Vergleichung der Mefsstange mit der Toise war hierdurch sehr vereinfacht, und wurde auf folgende Weise ausgeführt: Zuerst wurde die zu vergleichende Mefsstange  $\mathcal{N}^{\circ} 1$ , wie gewöhnlich, auf den Comparateur gebracht, und die Zwischenräume an den Enden mittelst des Glaskeils abgelesen. Hierdurch erhält man nach dem vorigen §.

$$l' = L + C - n'$$

Dann wurden, mittelst einer besonderen Unterlage, beide Toisen an die Stelle der Mefsstange auf den Comparateur gelegt und in die gerade Linie gebracht, welche die Axen der beiden Cylinder an den Enden desselben verbindet, und ebenfalls die Zwischenräume abgelesen. Nennt man die Summe dieser gemessenen Zwischenräume  $n$ , und bezeichnet man die Länge der beiden Toisen bei der Temperatur der Messung durch  $2T$ , so erhält man:

$$2T = L + C - n$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem vorhergehenden, so ergibt sich daraus

$$l' + n' = 2T + n$$

und da nach dem vorigen §.  $l' = L + x' - am'$  ist, so folgt

$$L = 2T - x' + am' + n - n'$$

Hieraus findet man  $L$ , die mittlere Länge der vier Meßstangen, also auch die Länge jeder einzelnen.



## §. 3. Beschreibung der Glaskeile.

Von den 5 Glaskeilen, welche die Herren *Pistor* und *Schiek* 1832 für die Messung der Grundlinie bei Königsberg angefertigt hatten, sind noch drei erhalten, die mit  $\mathcal{N}$  III, IV und V bezeichnet sind. Zwischen den parallelen Seiten sind sie 3 Linien breit; das dünnere Ende ist nahe  $0,8^L$ , das dickere 2 Linien stark. Ihre Länge beträgt 41 Linien, und ist in 120 gleiche Theile getheilt; es können daher bei dem Messen der Zwischenräume  $0,01^L$  unmittelbar abgelesen werden; da aber die Theilstriche etwa  $\frac{1}{3}$  Linie von einander entfernt sind, so kann man die Zehntel noch durch das Augenmafs schätzen, und dadurch mit ziemlicher Sicherheit Tausendtel einer Linie messen.

Da es nicht möglich ist, die Keile absolut genau anzufertigen, so muß der Werth ihrer Eintheilung besonders ermittelt werden. Dies ist bereits in Königsberg 1832 geschehen (Gradmessung Seite 17), wo die Verbesserungen, wie folgt, gefunden wurden:

| Angabe<br>der Keile | Verbesserungen der Keile |          |          |
|---------------------|--------------------------|----------|----------|
|                     | III                      | IV       | V        |
| $0,80^L$            | — 0,0051                 | — 0,0067 | — 0,0055 |
| $0,90^L$            | — 0,0050                 | — 0,0062 | — 0,0053 |
| $1,00^L$            | — 0,0044                 | — 0,0059 | — 0,0052 |
| $1,10^L$            | — 0,0037                 | — 0,0050 | — 0,0047 |
| $1,20^L$            | — 0,0031                 | — 0,0041 | — 0,0042 |
| $1,30^L$            | — 0,0028                 | — 0,0038 | — 0,0041 |
| $1,40^L$            | — 0,0025                 | — 0,0036 | — 0,0039 |
| $1,50^L$            | — 0,0018                 | — 0,0028 | — 0,0031 |
| $1,60^L$            | — 0,0010                 | — 0,0019 | — 0,0022 |
| $1,70^L$            | — 0,0006                 | — 0,0015 | — 0,0014 |
| $1,80^L$            | — 0,0002                 | — 0,0012 | — 0,0006 |
| $1,90^L$            | + 0,0006                 | — 0,0004 | + 0,0005 |
| $2,00^L$            | + 0,0010                 | 0,0000   | + 0,0012 |

Diese Verbesserungen sind den unmittelbaren Angaben der Keile hinzuzufügen, um sie auf Linien zu reducirern.

§. 4. *Vergleichung der Längen der Meßstangen unter einander.*

Bei den Vergleichen der Stangen wurden die Glaskeile stets nach einerlei Richtung eingeschoben. Diese Vorsicht erschien nothwendig, um kleine Mängel an den keilförmigen Schneiden, die durch den häufigen Gebrauch entstanden waren, unschädlich zu machen.

Um gegen Beobachtungsfehler geschützt zu sein, wurden sämtliche Ablesungen doppelt gemacht: zuerst wurde von mir mit dem Keil *N<sup>o</sup> III* abgelesen, und dann von dem Hauptmann *v. Hesse* mit dem Keil *N<sup>o</sup> IV*. Es wurden im Ganzen 24 Doppel-Vergleichen der 4 Meßstangen, nach der in §. 1. erläuterten Methode, vorgenommen; dies sind 192 Vergleichen der einzelnen Stangen, von denen jede doppelt abgelesen wurde.

Zwölf Mal war die Wärme aller 4 Stangen beinahe gleich, und zwölf Mal waren je zwei derselben gegen 20° R. wärmer. Bei den Beobachtungen in hoher Temperatur, am 4. und 6. Juni, waren die Stangen auf dem Hofe der Kriegsschule in der Sonne erwärmt worden; bei allen früheren geschah die Erwärmung in einem besonderen auf 28 bis 33° R. geheizten Zimmer. Sämmtliche Vergleichen, d. h. die Werthe *n'*, *n''*, *n'''*, *n<sup>iv</sup>* und *a*, *b*, *c*, *d* (§. 1.) sind in der folgenden Übersicht zu 8 arithmetischen Mitteln vereinigt, von denen jedes 3 Beobachtungen enthält, die nahe in gleicher Wärme gemacht wurden.

|              | <i>n'</i>              | <i>a</i>               | <i>n''</i>             | <i>b</i>               | <i>n'''</i>            | <i>c</i>               | <i>n<sup>iv</sup></i>  | <i>d</i>               |
|--------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
|              | $\frac{L}{\text{---}}$ | $\frac{L}{\text{---}}$ | $\frac{L}{\text{---}}$ | $\frac{L}{\text{---}}$ | $\frac{L}{\text{---}}$ | $\frac{L}{\text{---}}$ | $\frac{L}{\text{---}}$ | $\frac{L}{\text{---}}$ |
| 1846         | 3,5198                 | 1,8409                 | 2,9197                 | 1,9139                 | 3,3631                 | 1,8434                 | 3,3509                 | 1,8814                 |
| März 12      | 3,5201                 | 1,8341                 | 2,9171                 | 1,9069                 | 3,3635                 | 1,8336                 | 3,3536                 | 1,8699                 |
|              | 3,5171                 | 1,8255                 | 2,9151                 | 1,8984                 | 3,3603                 | 1,8245                 | 3,3511                 | 1,8661                 |
| Mittel ..... | 3,5190                 | 1,8335                 | 2,9173                 | 1,9064                 | 3,3623                 | 1,8338                 | 3,3519                 | 1,8725                 |
| März 12      | 3,5179                 | 1,8124                 | 2,9124                 | 1,8885                 | 3,3592                 | 1,8167                 | 3,3476                 | 1,8563                 |
| und 13       | 3,5154                 | 1,8099                 | 2,9126                 | 1,8830                 | 3,3550                 | 1,8117                 | 3,3483                 | 1,8515                 |
|              | 3,5331                 | 1,8470                 | 2,9307                 | 1,9150                 | 3,3770                 | 1,8462                 | 3,3677                 | 1,8828                 |
| Mittel ..... | 3,5221                 | 1,8231                 | 2,9186                 | 1,8955                 | 3,3637                 | 1,8249                 | 3,3545                 | 1,8635                 |
| März 16      | 3,1874                 | 1,1267                 | 2,5366                 | 1,1244                 | 3,4046                 | 1,8346                 | 3,3847                 | 1,8689                 |
|              | 3,2184                 | 1,1587                 | 2,5767                 | 1,1866                 | 3,4039                 | 1,8213                 | 3,3849                 | 1,8598                 |
|              | 3,2023                 | 1,1456                 | 2,6115                 | 1,2516                 | 3,3937                 | 1,8074                 | 3,3777                 | 1,8457                 |
| Mittel ..... | 3,2027                 | 1,1437                 | 2,5749                 | 1,1875                 | 3,4007                 | 1,8211                 | 3,3824                 | 1,8581                 |

I. §. 4. *Vergleichung der Längen der Mefsstangen unter einander.* 11

|              | $n'$            | $a$             | $n''$           | $b$             | $n'''$          | $c$             | $n^{iv}$        | $d$             |
|--------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
|              | $\overbrace{L}$ | $\overbrace{L}$ | $\overbrace{L}$ | $\overbrace{L}$ | $\overbrace{L}$ | $\overbrace{L}$ | $\overbrace{L}$ | $\overbrace{L}$ |
| 1846         | 3,5516          | 1,7810          | 2,9484          | 1,8530          | 2,9568          | 1,0132          | 2,8841          | 0,9463          |
| März 17      | 3,5475          | 1,7725          | 2,9461          | 1,8414          | 2,9924          | 1,0580          | 2,9140          | 0,9700          |
|              | 3,5465          | 1,7564          | 2,9402          | 1,8266          | 3,0066          | 1,0762          | 2,9491          | 1,0344          |
| Mittel ..... | 3,5485          | 1,7700          | 2,9449          | 1,8403          | 2,9853          | 1,0491          | 2,9157          | 0,9836          |
| März 19      | 3,0772          | 0,8973          | 2,9460          | 1,8470          | 2,9635          | 1,0246          | 3,3850          | 1,8036          |
|              | 3,0866          | 0,8908          | 2,9457          | 1,8371          | 2,9660          | 1,0087          | 3,3822          | 1,7966          |
|              | 3,0999          | 0,9134          | 2,9383          | 1,8250          | 2,9838          | 1,0306          | 3,3784          | 1,7903          |
| Mittel ..... | 3,0879          | 0,9005          | 2,9433          | 1,8364          | 2,9711          | 1,0213          | 3,3819          | 1,7968          |
| März 20      | 3,5364          | 1,7790          | 2,4455          | 0,9775          | 3,3921          | 1,7840          | 2,8085          | 0,8369          |
|              | 3,5356          | 1,7692          | 2,4705          | 0,9974          | 3,3908          | 1,7697          | 2,8342          | 0,8655          |
|              | 3,5330          | 1,7514          | 2,5018          | 1,0432          | 3,3840          | 1,7551          | 2,8698          | 0,9131          |
| Mittel ..... | 3,5350          | 1,7665          | 2,4726          | 1,0060          | 3,3890          | 1,7696          | 2,8375          | 0,8718          |
| Juni 4 u. 6  | 3,2763          | 1,0349          | 2,6894          | 1,1700          | 3,1003          | 1,0422          | 3,0744          | 1,0570          |
|              | 3,2742          | 1,0336          | 2,6939          | 1,1803          | 3,1166          | 1,0687          | 3,0825          | 1,0865          |
|              | 3,1788          | 0,9858          | 2,5884          | 1,1278          | 3,0264          | 1,0362          | 2,9984          | 1,0510          |
| Mittel ..... | 3,2431          | 1,0181          | 2,6572          | 1,1594          | 3,0811          | 1,0490          | 3,0518          | 1,0648          |
| Juni 5       | 3,4818          | 1,5053          | 2,8902          | 1,6060          | 3,3382          | 1,5385          | 3,3242          | 1,5834          |
|              | 3,4815          | 1,5030          | 2,8825          | 1,5960          | 3,3330          | 1,5259          | 3,3165          | 1,5667          |
|              | 3,4802          | 1,5005          | 2,8787          | 1,5904          | 3,3267          | 1,5164          | 3,3113          | 1,5625          |
| Mittel ..... | 3,4812          | 1,5029          | 2,8838          | 1,5975          | 3,3326          | 1,5269          | 3,3173          | 1,5709          |

Diese, aus den Vergleichen der Mefsstangen gezogenen 8 arithmetischen Mittel geben folgende Gleichungen, in denen die unbekanntten Größen  $C^{(1)}, C^{(2)} \dots$  die in der horizontalen Reihe vorkommenden arithmetischen Mittel sind.

$$\begin{cases}
 3,5190 = C^{(1)} - x' + 1,8335 m' \\
 2,9173 = C^{(1)} - x'' + 1,9064 m'' \\
 3,3623 = C^{(1)} - x''' + 1,8338 m''' \\
 3,3519 = C^{(1)} - x^{iv} + 1,8725 m^{iv} \\
 3,5224 = C^{(2)} - x' + 1,8231 m' \\
 2,9186 = C^{(2)} - x'' + 1,8955 m'' \\
 3,3637 = C^{(2)} - x''' + 1,8249 m''' \\
 3,3545 = C^{(2)} - x^{iv} + 1,8635 m^{iv} \\
 3,2027 = C^{(3)} - x' + 1,1437 m' \\
 2,5749 = C^{(3)} - x'' + 1,1875 m'' \\
 3,4007 = C^{(3)} - x''' + 1,8211 m''' \\
 3,3824 = C^{(3)} - x^{iv} + 1,8581 m^{iv}
 \end{cases}$$

12 I. §. 4. *Vergleichung der Längen der Messstangen unter einander.*

$$\left\{ \begin{aligned} 3,5485 &= C^{(4)} - x' + 1,7700 m' \\ 2,9449 &= C^{(4)} - x'' + 1,8403 m'' \\ 2,9853 &= C^{(4)} - x''' + 1,0491 m''' \\ 2,9157 &= C^{(4)} - x^{IV} + 0,9836 m^{IV} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} 3,0879 &= C^{(5)} - x' + 0,9005 m' \\ 2,9433 &= C^{(5)} - x'' + 1,8364 m'' \\ 2,9711 &= C^{(5)} - x''' + 1,0213 m''' \\ 3,3819 &= C^{(5)} - x^{IV} + 1,7968 m^{IV} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} 3,5350 &= C^{(6)} - x' + 1,7665 m' \\ 2,4726 &= C^{(6)} - x'' + 1,0060 m'' \\ 3,3890 &= C^{(6)} - x''' + 1,7696 m''' \\ 2,8375 &= C^{(6)} - x^{IV} + 0,8718 m^{IV} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} 3,2431 &= C^{(7)} - x' + 1,0181 m' \\ 2,6572 &= C^{(7)} - x'' + 1,1594 m'' \\ 3,0811 &= C^{(7)} - x''' + 1,0490 m''' \\ 3,0518 &= C^{(7)} - x^{IV} + 1,0648 m^{IV} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} 3,4812 &= C^{(8)} - x' + 1,5029 m' \\ 2,8838 &= C^{(8)} - x'' + 1,5975 m'' \\ 3,3326 &= C^{(8)} - x''' + 1,5269 m''' \\ 3,3173 &= C^{(8)} - x^{IV} + 1,5709 m^{IV} \end{aligned} \right.$$

Da die obigen 32 Gleichungen nur  $8 + 7 = 15$  unbekannte Größen enthalten, so müssen sie nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst werden. Nachdem man die Differentialquotienten nach sämtlichen Unbekannten formirt und gleich Null gesetzt hat, führe man, z. B. den Werth von  $C^{(1)}$ , den die Summe der Differentiationen nach  $C^{(1)}$  unabhängig von  $x', x'', x'''$ , und  $x^{IV}$  ergibt (weil die Summe der letzten 4 Größen gleich Null ist), in die folgenden, durch die Differentiation entstandenen Gleichungen ein, wodurch  $C^{(1)}$  eliminirt ist. Auf dieselbe Weise eliminirt man auch  $C^{(2)}, C^{(3)} \dots$  und erhält dadurch:

I. §. 4. *Vergleichung der Längen der Mefsstangen unter einander.* 13

$$\begin{aligned}
 - 1,90679 &= 8 x' - 8,81876 m' + 3,10727 m'' + 2,97395 m''' + 2,97052 m^{IV} \\
 + 2,92015 &= 8 x'' + 2,93961 m' - 9,32177 m'' + 2,97395 m''' + 2,97052 m^{IV} \\
 - 0,65309 &= 8 x''' + 2,93961 m' + 3,10727 m'' - 8,92180 m''' + 2,97052 m^{IV} \\
 - 0,36029 &= 8 x^{IV} + 2,93961 m' + 3,10727 m'' + 2,97395 m''' - 8,91152 m^{IV} \\
 + 3,13100 &= - 11,7583 x' + 13,76481 m' - 4,64469 m'' - 4,50939 m''' - 4,32496 m^{IV} \\
 - 4,23159 &= - 12,4290 x'' - 4,64469 m' + 15,22860 m'' - 4,58989 m''' - 4,75987 m^{IV} \\
 + 1,28157 &= - 11,8957 x''' - 4,50939 m' - 4,58989 m'' + 14,03738 m''' - 4,53592 m^{IV} \\
 + 0,97840 &= - 11,8820 x^{IV} - 4,32496 m' - 4,75987 m'' - 4,53592 m''' + 14,24174 m^{IV}
 \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt die Werthe der 8 Unbekannten wie folgt:

$$\begin{array}{ll}
 x' = - 0,2869 & m' = + 0,53027 \\
 x'' = + 0,3931 & m'' = + 0,55092 \\
 x''' = - 0,0723 & m''' = + 0,56308 \\
 x^{IV} = - 0,0340 & m^{IV} = + 0,56485
 \end{array}$$

Durch Substitution findet man nun die Werthe von  $C^{(1)}, C^{(2)} \dots$  und die übrigbleibenden Fehler der 32 früheren Gleichungen, nämlich:

$$\begin{array}{ll}
 C^{(1)} = 2^L_{,2594} \left\{ \begin{array}{l} + 0,0005 \\ + 0,0007 \\ - 0,0019 \\ + 0,0008 \end{array} \right. & C^{(5)} = 2^L_{,3263} \left\{ \begin{array}{l} - 0,0027 \\ - 0,0016 \\ - 0,0025 \\ + 0,0068 \end{array} \right. \\
 C^{(2)} = 2^L_{,2669} \left\{ \begin{array}{l} + 0,0016 \\ + 0,0005 \\ - 0,0030 \\ + 0,0010 \end{array} \right. & C^{(6)} = 2^L_{,3136} \left\{ \begin{array}{l} - 0,0021 \\ - 0,0021 \\ + 0,0068 \\ - 0,0025 \end{array} \right. \\
 C^{(3)} = 2^L_{,3063} \left\{ \begin{array}{l} + 0,0031 \\ + 0,0075 \\ - 0,0032 \\ - 0,0074 \end{array} \right. & C^{(7)} = 2^L_{,4156} \left\{ \begin{array}{l} + 0,0008 \\ - 0,0041 \\ + 0,0026 \\ + 0,0008 \end{array} \right. \\
 C^{(4)} = 2^L_{,3239} \left\{ \begin{array}{l} - 0,0008 \\ + 0,0002 \\ - 0,0016 \\ + 0,0022 \end{array} \right. & C^{(8)} = 2^L_{,3977} \left\{ \begin{array}{l} - 0,0003 \\ - 0,0009 \\ + 0,0029 \\ - 0,0017 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Die Summe der Quadrate dieser 32 Fehler ist:

$$= 0,00031744$$

und da 15 unbekannte Größen bestimmt worden sind, so ergibt sich der mittlere Fehler jeder der 32 Gleichungen

$$\sqrt{\frac{0,00031744}{32 - 15}} = 0,^L00432$$



## §. 5. Bestimmung der Länge der Mefsstangen.

Die beiden Toisen, mit denen die Mefsstangen verglichen wurden, gehören, wie oben erwähnt, dem Herrn Conferenzzrath *Schumacher* in Altona. Die eine ist 1821 von Herrn *Fortin*, die andere 1831 von Herrn *Gambey* verfertigt. Es sind dieselben, welche *Bessel* unter der Bezeichnung *F* und *G* mit seiner Toise, die er mit *P* bezeichnete, verglichen hat. (Darstellung der Untersuchungen und Mafsregeln, die durch die Einheit des Preussischen Längenmafes veranlaßt worden sind. Seite 32).

Nach *Bessel's* Angabe an dem bezeichneten Orte ist:

$$F - P = + 0,00333$$

$$G - P = - 0,00390$$

Nach Seite 22. der Gradmessung in Ostpreussen ist für das Centesimal-Thermometer

$$P = 863,835384 + C. 0,0100811$$

Man erhält daher:

$$F = 863,838714 + C. 0,0100811$$

$$G = 863,831484 + C. 0,0100811$$

$$F + G = 1727,670198 + C. 0,0201622 = 2 T$$

Die Vergleichung selbst wurde an einem Tage, wo die Temperatur im Zimmer nur wenig von der Normal-Temperatur der Toisen abwich, in folgender Art ausgeführt:

Zuerst wurde eine Unterlage mit zwei parallelen Rinnen in der Oberfläche, in denen 8 messingene Rollen zur Aufnahme der Toisen liefen, so auf den Comparateur gebracht, daß die Axen der Toisen, wenn sie auf die Rollen gelegt wurden, in der Axe der Cylinder *c* waren, welche sich (Fig. 1.) an den Enden des Comparateurs befinden. Die Axen der Rollen wurden, vermittelst eines ausgespannten Fadens, und durch Vertiefen oder Ausfüllen der Rinnen mit Papierstreifen, in eine Ebene gebracht. Der Spielraum der Rollen in den Rinnen war nur gering, aber doch nicht ausreichend, um bei dem Aneinanderschieben der Toisen versichert zu sein, daß die Axen derselben eine gerade Linie bildeten. Diese Abweichung von der geraden Linie, welche sich bei 6 Fufs langen Stäben mit hinreichender Sicherheit nach dem Augenmafs beurtheilen läßt, wurde in der Art verbessert, daß zwei Beobachter sich



an den Enden des Comparateurs aufstellten, und ein dritter in der Mitte, nach ihrer Anweisung, die Richtung so lange verbesserte, bis beide Beobachter an den Enden über die geradlinige Lage der Toisen einig waren, welches immer sehr bald erfolgte. Hierauf hielt der Beobachter in der Mitte beide Toisen in Contact, während die beiden anderen an den Enden des Comparateurs die Zwischenräume durch das Einschieben der Glaskeile ablasen, dann ihre Plätze wechselten und abermals ablasen. Bei diesen Einrichtungen, so wie bei der Vergleichung der Toisen selbst, hat Herr Mechanikus *Baumann* uns sehr bereitwillige und wesentliche Hülfe geleistet. Nachdem diese Vorbereitungen getroffen, und versuchsweise einige Vergleichungen durchgeführt waren, wurden die Toisen, die vorher schon mit feinem Tuch überzogen waren, wie *Bessel* in der Gradmessung es angiebt, in einen mit luftfreiem destillirtem Wasser gefüllten Trog gelegt, und einige Tropfen kaustisches Kali in das Wasser geträpelt um das Rosten zu verhindern. Zwei Normal-Thermometer, welche die Herren *Pistor* und *Martins* zu diesem Zweck geliehen hatten, dienten zur Bestimmung der Temperatur der Toisen in ihrem Bade; diese Temperatur war mit der des Zimmers sehr nahe gleich, denn das Wasser hatte schon mehrere Tage in verschlossenen Flaschen im Zimmer gestanden und die Temperatur desselben angenommen.

Nach Verlauf von etwa einer Stunde, wo man glaubte annehmen zu können, daß die Temperaturen der Toisen und des Wassers sich hinreichend ausgeglichen hätten, wurden die Toisen zur wirklichen Vergleichung aus dem Bade auf den Comparateur gebracht, und in der oben angegebenen Weise die Zwischenräume, zwischen den festen Keilen des Comparateurs und den Schneiden der Cylinder, abgelesen. Diese Operation dauerte selten über zwei Minuten. Nachdem sie beendigt war, wurden die Toisen wieder in ihr Bad gelegt, die Unterlage von dem Comparateur heruntergenommen, und die Stange *N<sup>o</sup> I.* aufgelegt und verglichen. Nachdem die Stange wieder fortgenommen war, wurde die Toise noch einmal auf den Comparateur gebracht, aber so, daß die Flächen, welche früher auf den Rollen lagen, nun nach oben zu liegen kamen.

Diese drei Operationen zusammen bilden eine Vergleichung, deren 10 ausgeführt wurden, die in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind. Die Temperatur *C* ist nach der 100theiligen Scala angegeben.

## I. §. 5. Bestimmung der Länge der Meßstangen.

|     | $C$                        | $2T$                 | $n \text{ und } n'$  | $a$                  |        |
|-----|----------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|--------|
|     | $\overset{\circ}{L}$       | $\overset{\circ}{L}$ | $\overset{\circ}{L}$ | $\overset{\circ}{L}$ |        |
| 1.  | Toisen                     | 15,700               | 1727,9867            | 3,5507               | 1,5467 |
|     | $\mathcal{N}^{\circ}$ I... | .....                | .....                | 3,5485               |        |
|     | Toisen                     | 15,800               | 1727,9888            | 3,5491               |        |
| 2.  | Toisen                     | 15,900               | 1727,9908            | 3,5498               | 1,5421 |
|     | $\mathcal{N}^{\circ}$ I... | .....                | .....                | 3,5527               |        |
|     | Toisen                     | 16,000               | 1727,9928            | 3,5517               |        |
| 3.  | Toisen                     | 15,975               | 1727,9923            | 3,5533               | 1,5487 |
|     | $\mathcal{N}^{\circ}$ I... | .....                | .....                | 3,5579               |        |
|     | Toisen                     | 16,025               | 1727,9933            | 3,5505               |        |
| 4.  | Toisen                     | 16,075               | 1727,9943            | 3,5500               | 1,5512 |
|     | $\mathcal{N}^{\circ}$ I... | .....                | .....                | 3,5551               |        |
|     | Toisen                     | 16,100               | 1727,9948            | 3,5505               |        |
| 5.  | Toisen                     | 16,150               | 1727,9958            | 3,5517               | 1,5466 |
|     | $\mathcal{N}^{\circ}$ I... | .....                | .....                | 3,5524               |        |
|     | Toisen                     | 16,250               | 1727,9978            | 3,5525               |        |
| 6.  | Toisen                     | 16,300               | 1727,9988            | 3,5500               | 1,5426 |
|     | $\mathcal{N}^{\circ}$ I... | .....                | .....                | 3,5514               |        |
|     | Toisen                     | 16,325               | 1727,9993            | 3,5507               |        |
| 7.  | Toisen                     | 16,350               | 1727,9998            | 3,5520               | 1,5360 |
|     | $\mathcal{N}^{\circ}$ I... | .....                | .....                | 3,5564               |        |
|     | Toisen                     | 16,425               | 1728,0014            | 3,5555               |        |
| 8.  | Toisen                     | 16,475               | 1728,0024            | 3,5514               | 1,5320 |
|     | $\mathcal{N}^{\circ}$ I... | .....                | .....                | 3,5539               |        |
|     | Toisen                     | 16,500               | 1728,0029            | 3,5539               |        |
| 9.  | Toisen                     | 16,525               | 1728,0034            | 3,5518               | 1,5300 |
|     | $\mathcal{N}^{\circ}$ I... | .....                | .....                | 3,5521               |        |
|     | Toisen                     | 16,575               | 1728,0043            | 3,5546               |        |
| 10. | Toisen                     | 16,625               | 1728,0054            | 3,5534               | 1,5295 |
|     | $\mathcal{N}^{\circ}$ I... | .....                | .....                | 3,5521               |        |
|     | Toisen                     | 16,675               | 1728,0064            | 3,5529               |        |

Hieraus gehen die folgenden 10 Bestimmungen von  $L$ , nach der Formel

$$L = 2T - x' + n - n' + am'$$

hervor, die durch Substitution der Werthe von  $x'$  und  $m'$ , die im vorigen §. gefunden wurden, von allen Unbekannten frei werden.

|             |  | Unterschied<br>vom Mittel |
|-------------|--|---------------------------|
| 1           | $L = 1727,^L9892 - x' + 1,5467 m' = 1729,^L0962$ | $- 0,^L0037$              |
| 2           | $9899 - x' + 1,5421 m' = \dots\dots 0945$        | $- 0, 0054$               |
| 3           | $9868 - x' + 1,5487 m' = \dots\dots 0949$        | $- 0, 0050$               |
| 4           | $9898 - x' + 1,5512 m' = \dots\dots 0992$        | $- 0, 0007$               |
| 5           | $9965 - x' + 1,5466 m' = \dots\dots 1035$        | $+ 0, 0036$               |
| 6           | $9981 - x' + 1,5426 m' = \dots\dots 1029$        | $+ 0, 0030$               |
| 7           | $9980 - x' + 1,5360 m' = \dots\dots 0993$        | $- 0, 0006$               |
| 8           | $1728,0014 - x' + 1,5320 m' = \dots\dots 1006$   | $+ 0, 0007$               |
| 9           | $0049 - x' + 1,5300 m' = \dots\dots 1031$        | $+ 0, 0032$               |
| 10          | $0070 - x' + 1,5295 m' = \dots\dots 1049$        | $+ 0, 0050$               |
| Mittel .... | $L = 1727,^L9962 - x' + 1,5405 m' = 1729,^L0999$ |                           |

Die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Unterschiede ist  
0,00012639

und daher der mittlere Fehler einer Vergleichung der Mefsstangen mit der Toise

$$= \sqrt{\frac{0,00012639}{10-1}} = 0,^L003748$$

Mit Hilfe des hier gefundenen Werthes von  $L$  und der im vorigen §. bestimmten Gröfsen, findet man die Längen der 4 Mefsstangen, welche zu den Angaben  $a, b, c$  und  $d$  ihrer Metallthermometer gehören, wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{Stange } \mathcal{N}_2^I & \text{ I .... } l' = 1728,8130 - 0,53027 \cdot a \\ & \text{ II .... } l'' = 1729,4930 - 0,55092 \cdot b \\ & \text{ III .... } l''' = 1729,0276 - 0,56308 \cdot c \\ & \text{ IV .... } l^{IV} = 1729,0659 - 0,56485 \cdot d \end{aligned}$$

Im Jahre 1834 (Gradmessung Seite 26) waren dafür folgende Werthe gefunden worden:

$$\begin{aligned} \text{Stange } \mathcal{N}_2^I & \text{ I .... } l' = 1728,8152 - 0,54033 \cdot a \\ & \text{ II .... } l'' = 1729,5153 - 0,55976 \cdot b \\ & \text{ III .... } l''' = 1729,0454 - 0,57575 \cdot c \\ & \text{ IV .... } l^{IV} = 1729,0909 - 0,58103 \cdot d \end{aligned}$$

Die Stange  $\mathcal{N}_2^I$ , welche in beiden Fällen direkt mit den Toisen verglichen wurde, stimmt bis auf  $0,^L0022$  mit der Königsberger Vergleichung überein, dagegen sind aber die Längen der drei übrigen Stangen beträchtlich kürzer gefunden worden. Der Grund davon ist theils in einer Abnutzung

zu suchen, theils auch darin, daß die etwas verrosteten Schneiden mit Terpentinöl abgerieben werden mußten.\*) Beide Gründe erscheinen indessen unerheblich gegen das Verwerfen der hölzernen Kasten durch die Einwirkung der Hitze, wodurch eine geringe Biegung der eisernen Unterlagen, auf denen die Stangen ruhen, im vertikalen Sinne entstanden sein kann. Dies zu ermitteln ist zwar versucht worden, ohne jedoch ein genügendes Resultat zu erlangen, und da die Längen der Stangen, in ihrer gegenwärtigen Lage in den Kasten, neu ermittelt wurden, so daß daraus kein nachtheiliger Einfluß für die Messung der Grundlinie zu befürchten war, so glaubte man davon abstehen zu dürfen.

Auch die Coefficienten der Angaben der Metallthermometer sind kleiner gefunden worden als in Königsberg, woraus eine Verminderung der Ausdehnungsfähigkeit des Metalls zu folgen scheint.

---

\*) Als die Stangen vor der Vergleichung aus den hölzernen Kasten herausgenommen wurden, um gereinigt und in allen ihren Theilen untersucht zu werden, fand man die Zinkstangen an einigen Stellen stark mit Oxyd überzogen, welches der an diesen Stellen eingedrungenen Feuchtigkeit zugeschrieben wurde. Die Eisenstangen waren, so weit die darauf liegenden Zinkstangen reichen, vom Rost gänzlich frei, dagegen aber fand sich an den Enden der vertikalen Schneiden, die um etwa 2 Zoll unter der Zinkstange hervorragen, etwas Rost, der indessen nicht schwierig zu entfernen war. Es scheint, daß eine galvanische Wirkung beider Metalle auf einander eine stärkere Rostbildung verhindert habe.

### §. 6. Vergleichung der Quecksilber- und Metallthermometer und Bestimmung der Ausdehnungen des Eisens und Zinks an den vier Meßstangen.

Die Quecksilberthermometer in den Kasten der Meßstangen waren in ihrer Fassung locker geworden, und mußten von Neuem befestigt werden. Bei dieser Gelegenheit wurden sie mit einem Normalthermometer verglichen und so gestellt, daß sie sämtlich bei  $+16^{\circ}$  die Temperatur richtig angaben. Bei  $0^{\circ}$  Grad betragen die von Herrn *Martins* gefundenen Correkturen für die Stange *N<sup>o</sup> I* —  $0,3$ ; für *N<sup>o</sup> II* —  $0,3$ ; für *N<sup>o</sup> III*  $+0,1$  und für *N<sup>o</sup> IV*  $0^{\circ}$ . Hiernach hätten die beobachteten Quecksilber-Temperaturen verbessert werden können; es wurde indessen vorgezogen, die von *Bessel* (Gradmessung Seite 28) sehr sorgfältig ermittelten Verbesserungen, mit Berücksichtigung der neuen Stellung der Thermometerröhren zu benutzen. Es wurden nämlich in der Correktions-Tafel, die *Bessel* am angeführten Orte mitgeteilt hat, die Verbesserungen bei  $+16^{\circ}$ , mit entgegengesetztem Zeichen zu allen übrigen hinzugefügt, und danach die Angaben der Quecksilber-Thermometer berichtet.

Obgleich die auf diese Weise berichtigten Quecksilber-Temperaturen wenig Zweifel gegen ihre Sicherheit zulassen, so bietet doch, abgesehen hiervon, ihre Vergleichung mit den Metallthermometern noch große Schwierigkeiten dar, denn die ersten zeigen alle Temperatur-Veränderungen weit früher an als die letzten. Aus diesem Grunde konnten hier nur diejenigen, bei der Vergleichung der Stangen gemachten, Beobachtungen benutzt werden, wo die Temperaturen des Zimmers und der Stangen sich sehr nahe ausgeglichen hatten. Es sind dies die Beobachtungen, welche in der nachfolgenden Zusammenstellung in den ersten 5 Reihen aufgeführt sind. Alle anderen Vergleichen des §. 4., wo die Stangen künstlich erwärmt in dem kälteren Zimmer auf den Comparateur gebracht wurden, mußten ausgeschlossen werden. Die übrigen, unten in den letzten 5 Reihen aufgeführten Vergleichen beider Thermometer sind aus der Basismessung selbst entnommen. Es wurden hierzu nur solche Beobachtungen ausgewählt, bei denen sich mindestens innerhalb  $\frac{3}{4}$  Stunden die Quecksilber- und Metallthermometer nur unmerklich verändert hatten, bei denen man also glaubte annehmen zu dürfen, daß die Temperaturen sich ziemlich nahe ausgeglichen hätten.



| $R$    | $a$           | $R$    | $b$           | $R$    | $c$           | $R$    | $d$           |
|--------|---------------|--------|---------------|--------|---------------|--------|---------------|
| 7,013  | $L$<br>1,8335 | 6,931  | $L$<br>1,9064 | 7,023  | $L$<br>1,8338 | 7,035  | $L$<br>1,8725 |
| 7,190  | 1,8231        | 7,109  | 1,8955        | 7,121  | 1,8249        | 7,208  | 1,8635        |
| 8,275  | 1,7700        | 8,046  | 1,8403        | 7,236  | 1,8211        | 7,513  | 1,8581        |
| 8,317  | 1,7665        | 8,260  | 1,8364        | 8,201  | 1,7696        | 8,578  | 1,7968        |
| 13,916 | 1,5029        | 13,567 | 1,5975        | 13,584 | 1,5269        | 13,385 | 1,5709        |
| 14,600 | 1,4693        | 15,183 | 1,5488        | 14,621 | 1,4783        | 14,356 | 1,5155        |
| 20,017 | 1,2420        | 20,033 | 1,3405        | 19,722 | 1,2629        | 19,690 | 1,3035        |
| 22,383 | 1,1285        | 22,700 | 1,2212        | 22,252 | 1,1580        | 22,803 | 1,1944        |
| 22,680 | 1,1188        | 22,606 | 1,2212        | 22,291 | 1,1460        | 22,310 | 1,1945        |
| 23,229 | 1,0949        | 22,967 | 1,2003        | 22,602 | 1,1201        | 23,085 | 1,1552        |

Jede Zahl in dieser Tabelle ist das arithmetische Mittel aus 6 Beobachtungen.

Bedeutet  $o$  die Angabe des Metallthermometers bei  $0^{\circ} R.$ , und  $p$  die Veränderung desselben für  $1^{\circ} R.$ , so kann man die beliebigen Angaben der Metallthermometer  $a, b, c, d$  durch die folgenden Ausdrücke darstellen, in denen  $R$  die den Angaben  $a, b \dots$  entsprechenden Temperaturen in Réaumur'schen Graden bezeichnet.

$$a = o' - Rp'$$

$$b = o'' - Rp''$$

$$c = o''' - Rp'''$$

$$d = o^{iv} - Rp^{iv}$$

Jede dieser Gleichungen enthält zwei Unbekannte; es sind aber in der obigen Zusammenstellung 10 solcher Gleichungen vorhanden, sie müssen daher nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst werden, und geben alsdann folgende Werthe:

$$a = 2,14451 - R \cdot 0,045357$$

$$b = 2,19595 - R \cdot 0,043089$$

$$c = 2,14156 - R \cdot 0,044755$$

$$d = 2,17568 - R \cdot 0,044065$$

Setzt man in diesen Formeln für  $R$  die beobachteten Temperaturen, so müssen sich die diesen Temperaturen entsprechenden Angaben der Metallthermometer daraus ergeben. Die Abweichungen von den Beobachtungen sind entweder Beobachtungsfehler, oder sie haben ihren Grund in einer Ungleichheit der Temperatur der Stangen und der Quecksilber-Thermometer.



Unterschiede der Formeln von den Beobachtungen:

| $a$        | $b$        | $c$        | $d$        |
|------------|------------|------------|------------|
| $+ 0,0071$ | $+ 0,0091$ | $+ 0,0066$ | $+ 0,0068$ |
| $+ 0,0047$ | $+ 0,0059$ | $+ 0,0020$ | $+ 0,0054$ |
| $+ 0,0008$ | $- 0,0090$ | $+ 0,0034$ | $+ 0,0135$ |
| $+ 0,0008$ | $- 0,0036$ | $- 0,0049$ | $- 0,0009$ |
| $- 0,0104$ | $- 0,0139$ | $- 0,0067$ | $- 0,0150$ |
| $- 0,0130$ | $+ 0,0071$ | $- 0,0089$ | $- 0,0276$ |
| $+ 0,0054$ | $+ 0,0078$ | $+ 0,0040$ | $- 0,0045$ |
| $- 0,0008$ | $+ 0,0034$ | $+ 0,0123$ | $+ 0,0235$ |
| $+ 0,0030$ | $- 0,0007$ | $+ 0,0021$ | $+ 0,0019$ |
| $+ 0,0040$ | $- 0,0060$ | $- 0,0099$ | $- 0,0032$ |

Diese Unterschiede sind beträchtlich grösser als die möglichen Beobachtungsfehler sie erwarten lassen; besonders ist dies bei der vierten Stange der Fall. Der Grund davon liegt offenbar darin, daß die Temperaturen der Quecksilber- und Metallthermometer sich, selbst unter den oben angegebenen Umständen, noch nicht vollständig ausgeglichen hatten.

Bezeichnet man jetzt die Ausdehnung des Eisens der 4 Meßstangen für einen Grad Réaumur durch  $e', e'', e''', e^{iv}$ ; die des Zinks durch  $z', z'', z''', z^{iv}$ ; die Längen der Eisenstangen in der Temperatur des schmelzenden Eisens durch  $E', E'', E''', E^{iv}$ ; die der Zinkstangen durch  $Z', Z'', Z''', Z^{iv}$ , so hat man die Länge beider für die Temperatur  $R$ , z. B. für die erste Stange

$$= E' (1 + e'R) \quad \text{und} \quad = Z' (1 + z'R)$$

Die der Temperatur  $R$  entsprechende Veränderung der Länge der Stange ist daher  $= E'e'R$ , und für  $1^\circ$  Réaumur  $= E'e'$ .

In §. 1. hatten wir die der Angabe  $a$  des Metallthermometers entsprechende Veränderung der Länge der Stange  $= am'$  gefunden. Daraus folgt, daß für eine andere Angabe  $a + x$  die Veränderung der Länge der Stange  $= (a + x)m'$  sein wird. Zieht man von diesem Werth den vorhergehenden ab, so ergibt sich, daß für eine Veränderung des Metallthermometers um  $x$ , die entsprechende Veränderung der Länge der Stange  $= xm'$  sein muß. Wird nun  $x = p'$ , gleich der Veränderung des Metallthermometers für  $1^\circ$  Réaumur, so erhält man die Veränderung der Länge der Stange für  $1^\circ$  R.  $= p'm'$ ; oben hatten wir dieselbe aber auch  $= E'e'$  gefunden, daher ist

$$E'e' = p'm'$$

$$\text{folglich } e' = \frac{p'm'}{E'} \dots\dots 1.$$

22 I. §. 6. *Vergleichung der Quecksilber- und Metallthermometer*

Ferner ist  $Z'z'$  die Veränderung der Zinkstange für  $1^{\circ}$  R., und  $Z'e'$  die Veränderung einer gleich langen Eisenstange. An dem Metallthermometer zeigt sich aber der Unterschied der Ausdehnungen gleicher Längen von Eisen und Zink, folglich ist auch für  $1^{\circ}$  R.

$$p' = Z'(z' - e')$$

$$\text{und daher } z' - e' = \frac{p'}{Z'} \dots\dots 2.$$

Für die übrigen Stangen erhält man analoge Ausdrücke.

Nach den Ermittlungen in §. 5. und den vorhin gefundenen Angaben des Metallthermometers bei  $0^{\circ}$  R. findet man die Längen der 4 Mefsstangen im schmelzenden Eise wie folgt:

$$E' = 1728,8130 - 2,14451 m' = 1727,6758$$

$$E'' = 1729,4930 - 2,19595 m'' = 1728,2832$$

$$E''' = 1729,0276 - 2,14156 m''' = 1727,8217$$

$$E^{\text{iv}} = 1729,0659 - 2,17568 m^{\text{iv}} = 1727,8370$$

Da nun die Zinkstangen um die Länge der Stahlkeile ( $= 26,^L 0$ ) und um die Angabe der Metallthermometer kürzer als die Mefsstangen sind, so erhält man:

$$Z' = 1727,6758 - 26,0 - 2,1445 = 1699,5313$$

$$Z'' = 1728,2832 - 26,0 - 2,1960 = 1700,0872$$

$$Z''' = 1727,8217 - 26,0 - 2,1416 = 1699,6801$$

$$Z^{\text{iv}} = 1727,8370 - 26,0 - 2,1757 = 1699,6613$$

Mit Hülfe dieser Werthe findet man nun aus den Formeln 1. und 2. die Ausdehnungen für  $1^{\circ}$  R. wie folgt:

$$e' = 0,000013921 \quad z' - e' = 0,000026688 \quad z' = 0,000040609$$

$$e'' = 0,000013735 \quad z'' - e'' = 0,000025345 \quad z'' = 0,000039080$$

$$e''' = 0,000014585 \quad z''' - e''' = 0,000026332 \quad z''' = 0,000040917$$

$$e^{\text{iv}} = 0,000014405 \quad z^{\text{iv}} - e^{\text{iv}} = 0,000025926 \quad z^{\text{iv}} = 0,000040331$$

In Bezug auf die Mefsstange  $\mathcal{N}_2^{\circ}$  II muß bemerkt werden, daß die Zinkstange des Metallthermometers ihre Lage auf der Eisenstange etwas verändert hat, und daß die Mitte ihrer Schneide nicht mehr genau dem senkrechten Stahlkeil gegenüber liegt.

1834 wurden in Königsberg (Gradmessung Seite 32.) die obigen Werthe sämmtlich größer gefunden, und zwar:

|          |                 |                   |                 |          |                 |
|----------|-----------------|-------------------|-----------------|----------|-----------------|
| $e'$     | $= 0,000014367$ | $z' - e'$         | $= 0,000027029$ | $z'$     | $= 0,000041497$ |
| $e''$    | $= 0,000014818$ | $z'' - e''$       | $= 0,000026911$ | $z''$    | $= 0,000041729$ |
| $e'''$   | $= 0,000015015$ | $z''' - e'''$     | $= 0,000026509$ | $z'''$   | $= 0,000041524$ |
| $e^{iv}$ | $= 0,000015202$ | $z^{iv} - e^{iv}$ | $= 0,000026597$ | $z^{iv}$ | $= 0,000041799$ |

Ogleich hierin eine Bestätigung der am Ende des vorigen §. ausgesprochenen Vermuthung, daß die Ausdehnungen des Eisens und des Zinks abgenommen haben, zu liegen scheint, so darf doch nicht unberücksichtigt bleiben, daß ein großer Theil dieser Unterschiede durch eine Ungleichheit der Temperaturen des Quecksilbers und der Stangen erklärt werden kann.

---

### §. 7. Bestimmung der Neigungen der Mefsstangen durch die Angaben der Wasserwagen.

Die horizontale Lage einer Mefsstange wird durch zwei zusammengehörige Beobachtungen gefunden. Zuerst bringt man die Axe einer Stange mit den Schneiden der Cylinder auf dem Comparateur in eine gerade Linie, läßt alsdann die Wasserwagen einspielen und liest die Angabe der Schraube ab. Hierauf kehrt man die Stange um  $180^{\circ}$  um, bringt ihre Axe mit den Schneiden der Cylinder wieder in eine gerade Linie, läßt die Wasserwagen einspielen, und liest abermals die Angabe der Schraube ab. Das Mittel aus beiden Ablesungen giebt die der horizontalen Lage der Stange entsprechende Stellung der Schraube.

Die Blasen in den Röhren der Wasserwagen waren sämmtlich so groß geworden, daß sie keine Beobachtung mehr zuließen; die Röhren mußten daher herausgenommen und von Neuem gefüllt werden. Dadurch sind die neuen Angaben gegen die früheren in der Gradmessung gänzlich verändert und wie folgt gefunden worden:

|           | $\mathcal{N}_{\text{I}}$ |                | $\mathcal{N}_{\text{II}}$ |                | $\mathcal{N}_{\text{III}}$ |                | $\mathcal{N}_{\text{IV}}$ |                |
|-----------|--------------------------|----------------|---------------------------|----------------|----------------------------|----------------|---------------------------|----------------|
|           | Rev.                     | $\frac{1}{30}$ | Rev.                      | $\frac{1}{30}$ | Rev.                       | $\frac{1}{30}$ | Rev.                      | $\frac{1}{30}$ |
| 1846      | 12                       | 3,25           | 10                        | 45,85          | 10                         | 47,35          | 10                        | 6,25           |
| März 20   | 12                       | 3,15           | 10                        | 44,70          | 10                         | 49,25          | 10                        | 5,80           |
|           | 12                       | 3,20           | 10                        | 45,27          | 10                         | 49,25          | ....                      | .....          |
| Mittel... | 12                       | 3,20           | 10                        | 45,27          | 10                         | 48,62          | 10                        | 6,03           |

Wenn bei diesen Stellungen der Schrauben die Blasen der Wasserwagen in der Mitte stehen, so sind die Axen der Stangen horizontal.

Die Höhenänderung des einen Endes der Stangen, die gerade einer vollen Umdrehung der Schrauben entspricht, wurde ebenfalls untersucht, und so nahe mit den Angaben in der Gradmessung übereinstimmend gefunden, daß die dort angegebenen Werthe unverändert beibehalten werden konnten. Dieselben sind:

|                          |                           |                            |                           |
|--------------------------|---------------------------|----------------------------|---------------------------|
| $\mathcal{N}_{\text{I}}$ | $\mathcal{N}_{\text{II}}$ | $\mathcal{N}_{\text{III}}$ | $\mathcal{N}_{\text{IV}}$ |
| $7,^{L}7505$             | $7,^{L}598$               | $7,^{L}768$                | $7,^{L}957$               |

Wenn z. B. das eine Ende der Stange  $\mathcal{N}_{\text{I}}$  gegen das andere um  $7,^{L}7505$

erhöht oder erniedrigt wird, so muß die Schraube der Wasserwage, vorwärts oder rückwärts, einen vollen Umgang machen, um die Blase in die Mitte zu bringen.

Bezeichnet man eine dieser letzteren Zahlen durch  $q$ , die der horizontalen Lage der Meßstange, zu welcher sie gehört, entsprechende Angabe ihrer Schraube durch  $S$ , so erhält man die zu einer anderen Angabe  $s$  derselben gehörige Neigung  $i$  durch die Formel:

$$\text{tang. } i = \frac{s - S}{l} \cdot q$$

Durch Multiplikation der Länge der Meßstange mit dem Cosinus der Neigung  $i$  erhält man die auf die horizontale Ebene reducirte Länge der Stange. Da aber zwischen je zwei Stangen sich ein, durch den dazwischen geschobenen Glaskeil, in der Axe der Stange gemessener Zwischenraum befindet, so muß derselbe vor der Multiplikation mit  $\text{Cos } i$  noch der Länge der Stange hinzugefügt werden. Nennt man diesen Zwischenraum  $n$ , so findet man die Reduction  $= -(l + n) (1 - \text{Cos } i)$ . Da die vorgekommenen Neigungen aber nur gering waren, so kann man sich näherungsweise begnügen mit der Formel:

$$\text{Reduction} = - \frac{(l + n)}{l} \cdot \frac{(s - S)^2}{2l} \cdot q^2$$

Die mittleren Werthe der Meßstangen  $l', l'', l''', l^{iv}$  und der Zwischenräume  $n', n'', n''', n^{iv}$  waren:

|          |              |          |           |
|----------|--------------|----------|-----------|
| $l'$     | $= 1728,157$ | $n'$     | $= 1,600$ |
| $l''$    | $= 1728,778$ | $n''$    | $= 1,572$ |
| $l'''$   | $= 1728,338$ | $n'''$   | $= 1,604$ |
| $l^{iv}$ | $= 1728,361$ | $n^{iv}$ | $= 1,602$ |

Hieraus folgen die zur Reduction auf den Horizont angewendeten Formeln:

$$\begin{aligned} \text{Log. Reduction} &= 8,24045 + 2 \log. (s' - S') \\ &= 8,22302 + 2 \log. (s'' - S'') \\ &= 8,24236 + 2 \log. (s''' - S''') \\ &= 8,26324 + 2 \log. (s^{iv} - S^{iv}) \end{aligned}$$

Durch Multiplikation von  $(l + n)$  mit dem Sinus des Neigungswinkels  $i$ , erhält man ähnliche Ausdrücke für die Erhöhung oder Erniedrigung des einen Endes der Stange gegen das andere, und kann daraus die Höhen sämtlicher







§. 8. *Wahl der gemessenen Grundlinie.*

Die Hauptbedingungen, welche bei der Auswahl der Grundlinie zur Richtschnur genommen wurden, waren folgende:

1. Die Erfahrungen, welche bei der Messung der Königsberger Grundlinie gemacht worden waren, ließen es wahrscheinlich erscheinen, daß man noch günstigere Resultate erlangen würde, wenn die zu messende Linie nicht über Felder und Wiesen, bald auf bald absteigend, hinwegginge, sondern wenn sie so gewählt werden könnte, daß sie auf einem festen, stetig geneigten Boden fortliefe. Da diese Vortheile am leichtesten auf einer Chaussee zu erreichen sind, so wurde die Auswahl der Grundlinie an die Bedingung geknüpft, daß sie auf einer Chaussee liegen müsse.
2. Die Dreieckspunkte, welche zur Verbindung der Grundlinie mit den Seiten der Hauptdreiecke dienen, müssen so erhaben sein, daß die Gesichtslinien nirgends dem Erdboden sehr nahe kommen, weil durch die starke Erwärmung der Luftschichten nahe am Boden, wenn nicht eine Ablenkung der Sehlinie, doch ein starkes Zittern der Objecte und Undeutlichkeit im Sehen hervorgebracht wird.
3. Die Dreiecke selbst müssen in sich eine gute Form, d. h. nicht zu kleine Winkel haben, und die von der Grundlinie aus bestimmten Dreieckspunkte mehrfach controlirt sein.

Eine diesen Anforderungen entsprechende Lokalität fand sich  $1\frac{1}{2}$  Meilen von Berlin, auf der Chaussee nach Zossen, zwischen den Dörfern Mariendorf und Lichtenrade, wo die Grundlinie so gewählt wurde, daß die gegen 70 Fuß hohen stumpfen steinernen Thürme von Buckow und Marienfelde die nächsten Dreieckspunkte bilden. Von dieser ersten Vergrößerung der Grundlinie *Buckow Marienfelde* aus liefs sich für die weitere Vergrößerung derselben nach allen Seiten hin ein vortheilhaftes Dreiecksnetz bilden, welches auf alle drei Seiten des ersten Hauptdreiecks *Berlin Colberg Eichberg* führt. Die Tafel II. giebt eine Übersicht von dieser Verbindung und von allen beobachteten Control-Richtungen.

Das einzige Ungünstige bei dieser Wahl der Grundlinie war, daß die Endpunkte derselben nicht von einander gesehen werden konnten, weil sich

ungefähr in der Mitte eine Terrainwelle hinzieht, die um mehrere Fulse höher ist als die Endpunkte. Um diesen Übelstand, wenn es anders einer genannt werden kann, zu beseitigen, gab es zwei Mittel: entweder die Endpunkte mußten um so viel erhöht werden, bis die Sichtbarkeit erreicht wurde, oder man mußte die Grundlinie in zwei Theile zerlegen. Das Letztere wurde gewählt.

Nachdem das Project auf diese Weise zur Reife gediehen war, wurde bei der Königlichen Regierung in Potsdam die Erlaubniß nachgesucht, die Grundlinie auf der Chaussee messen zu dürfen, die sogleich sehr bereitwillig ertheilt wurde.

Einige unerhebliche Schwierigkeiten, welche sich auf der frequenten StraÙe im Verlauf der Arbeit zeigten, wurden durch die Unterstützung des Wegebaumeisters Herrn *Blankenhorn* leicht beseitigt, so daß die ganze Operation, die von Ende Mai bis Anfangs August gedauert hat, ohne alle Störung oder Unterbrechung beendet werden konnte.

Die Pfeiler zur Bezeichnung der Endpunkte der Grundlinie sind von dem Maschinen-Baumeister Herrn *Freund* höchst zweckmäÙig angefertigt worden. Ein solcher Pfeiler besteht aus einer Eisenplatte *ab*, die auf vier gußeisernen Röhren ruht, und mittelst vier langen Bolzen *cd* an eine zweite Eisenplatte *gh* im Boden angeschraubt wird. Fig. 2. zeigt einen, auf der Richtung der Grundlinie senkrechten, und zugleich durch die Mitte der Platten gehenden Durchschnitt eines solchen Pfeilers.

Die obere Platte *ab* von Gußeisen, geschliffen  $1\frac{1}{8}$  Zoll stark, ist quadratisch, hat 18 Zoll Seitenlänge, und in der Mitte ein feines, etwa  $0,^L04$  im Durchmesser haltendes Loch, welches das Centrum darstellt. Die vier gußeisernen Röhren haben 3 Zoll äußeren Durchmesser, sind 5 Fuls  $2\frac{1}{4}$  Zoll lang, und an beiden Enden winkelrecht abgedreht. Die Bolzen *cd*, welche durch beide Platten und die Röhren hindurch gehen, sind von Schmiedeeisen,  $1\frac{1}{2}$  Zoll stark und 5 Fuls 9 Zoll lang. Unmittelbar unter der unteren Platte haben sie Schlitzte, wo eiserne Keile *ef* durchgeschoben sind, und unmittelbar über der oberen Platte endigen sie in eine Schraube mit einer Schraubemutter *c*. Um die Keile *ef* einschieben zu können, sind in dem Mauerwerk die Löcher *iklm* durch Einmauern von Holzprismen gebildet, die nachher entfernt wurden.

Die untere Platte *gh* ist ebenfalls quadratisch, hat aber  $2\frac{1}{2}$  Fuls Seite und ist  $1\frac{1}{2}$  Zoll dick, mit Verstärkungen *nn* an den Stellen, wo die Röhren

aufstehen. Sie ist durch vier schmiedeeiserne Anker *oo*, die  $3\frac{3}{4}$  Fufs lang sind, mittelst Schraubenmuttern über der Platte mit dem Fundament verbunden. Die Anker *oo* wurden auf einer Kalksteinunterlage möglichst vertikal gestellt, und das Fundament bis 1 Fufs unter der Platte mit Kalksteinen aufgemauert. Die weitere Aufmauerung geschah mit Mauersteinen und englischem Cement. Die Platte *gh* selbst wurde dann mit Cement eingegossen, und vor dem Festwerden durch die Schraubenmuttern *o* in die horizontale Lage gebracht und fest angezogen. In der Mitte der Platte *gh* befindet sich ein bewegliches Centrum *p*, dessen Einrichtung in Fig. 3. und 4. zu ersehen ist. Die Centrums-Platte (Fig. 3.) besteht aus Schmiedeeisen, und hat einen messingenen Ansatz *q* (Fig. 3. und 4.), auf dem das Centrum durch ein feines Kreuz bezeichnet ist; sie ist auf der Platte *gh* (Fig. 2.), so lange die Schrauben *rr* nicht angezogen sind, durch den Spielraum verschiebbar, den die Öffnungen *tt* in derselben den Schraubenspindeln *s* geben.

Nachdem im Boden das Fundament gelegt, und die Platte *gh* fest damit verbunden war, wurden vier Röhren aufgestellt, die obere Platte *ab* darauf gelegt, die Bolzen *cd* durchgesteckt, die Keile *ef* unten vorgeschoben, und nun die Schraubenmuttern *c* über der oberen Platte angezogen. Hierauf wurde im Centrum der oberen Platte ein Loth aufgehängt, der Querschnitt des unteren beweglichen Centrums *p* genau eingelothet, und dann die Schrauben *rr* angezogen. Eine nach der Basismessung, vor Wegnahme der Pfeiler wiederholte Lothung zeigte nicht die geringste Verschiebung.

Um die Pfeiler gegen Muthwillen zu schützen, wurden sie mit einem hölzernen Mantel, oben mit verschließbarem Deckel, umgeben. Dieser Mantel war am Boden auf hölzernen Unterlagen mit Holzschrauben befestigt, und wurde bei der Messung der Grundlinie ganz abgehoben, bei den Winkelmessungen aber brauchte blofs der Deckel geöffnet zu werden. Eine starke Holzbarriere in 2 Fufs Entfernung schützte außerdem die Pfeiler gegen das Anfahren der Wagen.

Diese Einrichtung der Pfeiler gewährte, aufser ihrer großen Festigkeit, noch folgende Vortheile:

1. Die Meßstangen konnten zwischen den Röhren, welche die obere Platte tragen, und die im Lichten 11 Zoll auseinander stehen, in der Richtung der Grundlinie bequem unter dem Centrum hindurch geschoben werden, wodurch erlangt wurde, dafs bei dem Beginn der Messung die horizontale Schneide der ersten Meßstange unmittelbar



an das im Centrum aufgehängte Loth angelegt, und am Ende der Messung das übrigbleibende Stück, zwischen der vertikalen Schneide der letzten Stange und dem im Centrum des Endpfeilers aufgehängten Loth, bequem und sicher gemessen werden konnte.

2. Nach Beendigung der Messung der Grundlinie war nur nöthig, die oberen Schrauben *c* zu lösen, und dann die Keile *ef* unten herauszuziehen, um die oberen Theile der Pfeiler leicht und ohne Erschütterung von den unteren Platten *gh* zu trennen, die zur dauernden Bezeichnung der Endpunkte im Boden verblieben sind.

Auf dem, auf der Ostseite der Chaussee befindlichen Sommerwege, in etwa 2 Fufs Abstand von den Prellsteinen, wurden in der oben beschriebenen Art drei Pfeiler errichtet.

Der 1<sup>te</sup> oder der südliche Endpunkt der Grundlinie dem Nummerstein *N* 179 gerade gegenüber.

Der 2<sup>te</sup> oder der Mittelpunkt der Grundlinie, 4 Ruthen 8 Fufs nördlich von dem Stein *N* 164, und

der 3<sup>te</sup> oder der nördliche Endpunkt, 9 Fufs 6 Zoll nördlich von dem Stein *N* 148.

Die durch die Nummersteine auf der Chaussee, welche je 20 Ruthen von einander entfernt sind, näherungsweise bekannten Distancen wurden benutzt, um die Pfeiler so zu setzen, dafs ihre Entfernungen untereinander nahe aliquote Theile der Mefsstangenlängen wurden.

§. 9. *Verfahren bei der Messung der Grundlinie.*

Nachdem die Pfeiler gesetzt waren, wurde die Linie näherungsweise abgesteckt, damit bei dem Messen selbst die Böcke, auf welche die Mefsstangen zu liegen kamen, nahe richtig aufgestellt werden konnten. Da aber die Pfähle, zur Bezeichnung der Linie, auf der Chaussee selbst nicht eingeschlagen werden konnten, theils weil die Kiesdecke des Sommerweges zu hart war, theils weil die Pfähle dem Fuhrwerk hinderlich, und auch durch dasselbe zerstört worden wären, so wurden sie in etwa 3 Fufs Abstand von der Grundlinie, in einer mit dieser parallelen, zwischen die Chausseebäume fallenden Richtung eingeschlagen. Das hierbei beobachtete Verfahren war einfach folgendes: Zuerst wurde ein 8zölliger Theodolit auf einem Endpfeiler aufgestellt, und nach einer Marke über dem Centrum des nächsten Pfeilers in die Linie gebracht; hierauf wurde an der Stelle, wo ein Pfählchen eingeschlagen werden sollte, ein senkrechter Stab mittelst des Theodolitenfernrohrs alignirt, und ein zweiter 3 Fufs langer Stab rechtwinklig gegen die Grundlinie daran gelegt, und am anderen Ende desselben der Pfahl bis auf 1 Zoll über dem Boden eingeschlagen. Dies Verfahren wurde von 20 zu 20 Schritt wiederholt. Bei dem Messen der Grundlinie wurde derselbe 3 Fufs lange Stab an den nächsten Pfahl, in derselben Art wie vorhin, angelegt, danach eine Schnur in der Richtung der Grundlinie ausgespannt, und die Linie nach Art der Zimmerleute durch einen Schnurschlag auf dem gebneten Boden markirt. Nach diesem Schnurschlage wurden die Bretter gelegt und die Böcke darüber aufgestellt. Da die Erfahrung gelehrt hat, dafs ein Brett auf ebenem und festem Sandboden mindestens eben so fest und sicher liegt, als auf eisernen Nägeln, so wurden diese Nägel, welche bei der Messung der Königsberger Grundlinie angewendet wurden, ganz fortgelassen, und die Bretter unmittelbar auf den Boden so aufgelegt, dafs ihre Mittellinie sich senkrecht über dem Schnurschlage befand. Die Entfernung der Bretter unter einander wurde durch eine Latte von der Länge der Mefsstangen abgemessen. Jede Mefsstange erhält 2 Böcke; das wagerechte Ende der Stange einen Bock mit einer Schraube zum Heben und Senken, das andere Ende der Stange einen Bock mit einem aufgelegten Brett, welches durch zwei untergeschobene Keile gehoben oder gesenkt werden kann.

Wenn die Bretter gelegt waren, wurden die Böcke darauf gestellt, jeder am Fuß mit einem halben Centner belastet, und dann die Meßstangen aufgelegt. Wenn die Stangen auf den Böcken nicht ganz fest lagen, so wurden von der Seite Keile untergeschoben.

Die einzelnen bei dem Messen vorkommenden und sich immer wiederholenden Geschäfte sollen nun, zur vollständigen Übersicht, der Reihenfolge nach aufgezählt werden.

1. Nachdem auf dem Pfeiler, wo die Messung beginnen sollte, und auf dem nächsten Pfeiler Marken aufgestellt sind, stellt ein Beobachter in einer Entfernung von 50 bis 60 Ruthen vom Anfangspunkt einen Theodoliten nach den Alignements-Pfählen zuerst näherungsweise auf, und bringt ihn dann mittelst der Marken auf den Pfeilern genau ins Alignement. Das Geschäft dieses Beobachters besteht darin, die ihm zugekehrten vertikalen Schneiden der Meßstangen durch Winken mit einer Fahne in die Vertikalebene der Grundlinie einzurichten.
2. Sobald der Theodolit aufgestellt ist, wird der Boden am Anfangspunkt geebnet, die Schnur, vom Mittelpunkt des Pfeilers aus, in der Richtung der Grundlinie durch zwei Mann ausgespannt, und von einem dritten der Schnurschlag am Boden markirt, und dann dies Geschäft von Pfahl zu Pfahl fortgesetzt.
3. Nach dem Schnurschlage werden zunächst die beiden Bretter für die erste Stange gelegt, und die Böcke mit ihrer Belastung aufgestellt. Hierzu sind ebenfalls drei Mann erforderlich, die ihr Geschäft, das Abmessen der Entfernungen der Bretter, das Legen derselben und Aufstellen der Böcke, ungestört fortsetzen.
4. Von zwei Stangenträgern wird nun die Stange  $\mathcal{N}_2$  I. auf die beiden ersten Böcke gelegt, und das horizontale Ende derselben zwischen die Säulen des Pfeilers bis nahe an das Centrum geschoben, während das andere Ende vorläufig nach dem Augenmaße in die Richtung der Grundlinie gebracht wird. Hierauf wird die Mitte des horizontalen Endes, vermöge der an der Meßstange befindlichen Schraube, vorsichtig mit dem im Centrum des Pfeilers aufgehängten Loth in Berührung gebracht, und dann das andere Ende der Stange von dem Beobachter am Theodoliten, der durch eine aufgehobene Fahne aufmerksam gemacht wird, genau in die Linie eingerichtet. Sobald dies geschehen ist, wird die Stange  $\mathcal{N}_2$  II. so aufgelegt, daß die Mitte der



horizontalen Schneide der vertikalen von  $\mathcal{N}_0$  I. gegenübersteht, und von einem besonders dazu bestimmten Beobachter das Intervall zwischen beiden Stangen so regulirt, daß es vermittelst der Glaskleine abgelesen werden kann. Wenn dies geschehen ist, wird das vordere Ende dieser Stange von dem Beobachter am Theodoliten ebenfalls in die Linie eingerichtet, und dann mit dem Legen der folgenden Stangen in derselben Weise fortgefahren, bis alle vier Stangen gelegt sind.

5. Nachdem alle vier Stangen richtig lagen, wurden die Wasserwagen eingestellt, und an der Stange  $\mathcal{N}_0$  I. abgelesen:
- a. Die Angabe der Schraube der Wasserwage.
  - b. Das Quecksilberthermometer im Kasten.
  - c. Das Metallthermometer.
  - d. Der Zwischenraum zwischen  $\mathcal{N}_0$  I. und  $\mathcal{N}_0$  II.

Dieselben Ablesungen wurden hierauf an der Stange  $\mathcal{N}_0$  II. und dem Zwischenraum zwischen  $\mathcal{N}_0$  II. und  $\mathcal{N}_0$  III. gemacht. Nun wurde  $\mathcal{N}_0$  I. fortgenommen und vor  $\mathcal{N}_0$  IV. aufgestellt, und dann folgten die Ablesungen an der Stange  $\mathcal{N}_0$  III. In dieser Weise wurde fortgefahren. Abgelesen wurde immer an der vorletzten Stange, und nur dann, wenn alle vier Stangen gelegt waren. Um möglichen Irrthümern vorzubeugen, wurden die Ablesungen von zwei verschiedenen Beobachtern doppelt gemacht; der eine las mit dem Keil  $\mathcal{N}_0$  III., der andere mit dem Keil  $\mathcal{N}_0$  IV. ab; ein dritter schrieb die Beobachtungen in das Tagebuch und achtete auf vorkommende Differenzen.

Das bisher erwähnte Personal besteht also aus 5 Beobachtern und 8 Arbeitern, zu denen noch 2 oder 3 Hülfсарbeiter für das Tragen der Gewichte, Böcke, Bretter etc. hinzukommen.

Die Bezeichnung des Punktes, wo am Abend aufgehört werden sollte, geschah in der Art, daß nach den vorläufigen Abmessungen beim Legen der Bretter, einige Stangenlängen voraus, ein 2 Fufs langes, 2 Fufs tiefes und 1 Fufs breites Loch an einer Stelle gemacht wurde, wo man wufste, daß das hintere Ende (die horizontale Schneide) einer Stange hinfallen würde. In diesem Loche wurde ein  $1\frac{1}{2}$  Fufs langer, etwa 9 Zoll im Gevierte haltender Klotz wagerecht eingestampft, so daß die Oberfläche frei blieb. Wenn die vorderste Stange über dem Klotz angekommen war, wurde von der Schneide

heruntergelothet, und auf dieser Stelle eine 3 Zoll im Durchmesser haltende Bleiplatte aufgenagelt. Die Messung ging dann so lange fort, bis sich zwei Stangen disseit und zwei jenseit des Festlegungspunktes befanden, und sobald die Ablesungen über dem Festlegungspunkt gemacht waren, wurde an der wagerechten Schneide ein Loth mit einer feinen Spitze herabgelassen, und die Spitze im Blei fein abgedrückt. Dann wurde ein Brett über das Loch gelegt, die Stangen fortgenommen, in den zu ihrem Transport bequemen, in Federn hängenden Möbelwagen gebracht, der Wagen über die Stelle geschoben, wo der Festlegungspunkt sich befand, und eine Wache dabei gestellt.

Am nächsten Morgen wurde die Stange, von der das Loth heruntergelassen war, zuerst, und wieder so aufgestellt, wie sie am Abend vorher gestanden hatte; nachdem dann die drei anderen Stangen ebenfalls aufgestellt waren, wurde das Loth mit der die Stange bewegenden Schraube genau über den im Blei abgedrückten Punkt gebracht, und dann die Messung, wie vom Anfangspunkte aus, fortgesetzt.

Der Klotz mit der Bleiplatte im Boden blieb unberührt, das Loch wurde wieder mit dem Brett zugedeckt und große Steine darauf gelegt, um es zu schützen. Bei der zweiten Messung der Grundlinie wurde dieselbe Bleiplatte wieder zur Festlegung am Abend benutzt, und der Unterschied mit der ersten Messung mit dem Zirkel abgegriffen, und auf einem besonderen Maßstabe gemessen.

Wenn ein Wagen vorüberfuhr, mußte mit dem Ablesen so lange inne gehalten werden, bis er vorüber war, weil die Erschütterungen das Einschieben der Glaskeile unsicher machten. Eine ähnliche Wirkung hat auch der Wind, der in der Regel in den Mittagsstunden so stark wurde, daß die Arbeit eingestellt werden mußte.

An Tagen wo es staubig war, wurde der Theil der Chaussee, wo die Messung stattfand, gesprengt, wozu ein besonders gemiethetes Fuhrwerk das Wasser herbeischaffte. Bei der ungewöhnlichen Hitze war es aber nicht möglich, den Staub vollständig zu beseitigen.

Wenn die Messung bis zum Endpfeiler gelangt war, so wurde die letzte Stange unter dem Pfeiler zwischen den Ecksäulen hindurchgeschoben, jenseits noch zwei Stangen aufgestellt und die Ablesungen gemacht. Hierauf wurde die Stange unter dem Pfeiler rückwärts herausgezogen, im Centrum

des Pfeilers ein Loth aufgehängt, und die Entfernung von dem Ende der jenseitigen Stange bis zum Loth gemessen. Diese Entfernung von der letzten Stange abgezogen, gab den Theil der Stange bis zum Centrum des Pfeilers. Dafs zwei Stangen jenseit des Endpunktes aufgestellt wurden, geschah nur der Vorsicht wegen, damit man bei einem etwaigen Stofs gegen die letzte Stange an der Veränderung des Zwischenraums die Verschiebung erkennen konnte.



§. 10. *Messungen der Grundlinie in zwei Abtheilungen.*

Am 8. Juni 1846 wurden die Meßstangen nebst Zubehör auf einem in Federn hängenden Möbelwagen, nebst einem Commando von acht Artilleristen und einem Oberfeuerwerker, nach Lichtenrade geschickt, welcher Ort dem südlichen Endpunkt der Basis am nächsten liegt.

Am 9. Juni Morgens  $7\frac{1}{2}$  Uhr fing die Probemessung am südlichen Endpunkte an, bei welcher jedem Theilnehmer sein Geschäft erklärt, und auf Abhülfe aller zu entdeckenden Mängel Bedacht genommen wurde. Der Tag war reginig, und es konnten nach mehreren Unterbrechungen im Ganzen nur 14 Lagen (56 Stangen) gemessen werden.

Diese Arbeit wurde gänzlich verworfen, und die eigentliche Messung fing erst am 10. früh um  $6\frac{1}{2}$  Uhr am südlichen Endpunkt an. Es wurden bis zum Abend 40 Lagen oder 160 Stangen gemessen und der Endpunkt im Boden festgelegt. Am Nachmittage dieses Tages war bemerkt worden, daß einige von den Schrauben, welche die Stangen bewegen, Stellen hatten wo sie sehr leicht gingen und einen todten Gang befürchten ließen. Es wurden daher am 11. früh, vor dem Beginn der Arbeit, sämmtliche Klemmen dieser Schrauben stärker angezogen. Am 11. Juni wurde der mittlere Pfeiler mit  $33\frac{1}{2}$  Lagen erreicht. Am 12. und 13. wurde diese ganze Messung wiederholt, und am 14. das Nachtquartier von Lichtenrade nach Mariendorf verlegt.

Am 15. Juni früh um  $7\frac{3}{4}$  Uhr fing die Messung des nördlichen Theils der Grundlinie am mittelsten Pfeiler an. An diesem Tage wurden ebenfalls 40 Lagen gemessen, und das Ende eben so wie früher im Boden festgelegt. Am 16. konnte aber der ungünstigen Witterung wegen gar nicht gearbeitet werden, so daß der nördliche Endpunkt erst am 17. erreicht wurde. Am 18. und 19. wurde die Messung wiederholt.

Die Schnelligkeit des Messens nahm mit der Übung der Arbeiter zu. Am 10. wurden in einer Stunde 5 Lagen, am 11. 6 Lagen, und in den letzten Tagen 7 bis 8 Lagen gemessen.

Die Temperaturwechsel waren während der Messung der Grundlinie sehr beträchtlich. Am 10. Juni früh zeigten die Thermometer in den Kasten  $14^{\circ}$  R, am Nachmittage  $25^{\circ}$ . Am 11. Mittags  $27^{\circ}$ . Am 12. betrug die Temperatur in den Kasten am Morgen  $13^{\circ}$ , am Mittag  $20^{\circ}$ . Am grössten war

die Hitze am 18., wo das Thermometer im Freien und im Schatten  $27\frac{1}{2}^{\circ}$  R. zeigte, und die Wärme in den Kasten so stieg, daß die Arbeit von 10 Uhr an bis Nachmittags um 5 Uhr eingestellt werden mußte, weil die Zinkstangen sich so ausgedehnt hatten, daß sich die Glaskeile nicht mehr einschieben ließen. Die höchste Temperatur in den Kasten betrug an diesem Tage  $36^{\circ}$  Réaumur.

Die Umstände im Allgemeinen waren der Messung nicht besonders günstig: Wind, Staub und extreme Temperaturen übten nachtheilige, nicht ganz zu beseitigende Einflüsse aus, denen es zugeschrieben werden muß, daß die Unterschiede zwischen den doppelten Messungen nicht noch geringer ausgefallen sind.

Die verschiedenen Messungen ergaben:

### A. Südlicher Theil der Grundlinie.

Entfernung vom südlichen Endpunkt bis zur Festlegung am 10. Juni.

Messung 1.

|                     | Reduction. | Metallthermometer. |            | Zwischenräume. |
|---------------------|------------|--------------------|------------|----------------|
|                     | $L$        | $L$                | $L$        | $L$            |
| + 40 $\lambda'$     | - 0,666    | - 48,483 $m'$      | = - 25,709 | + 65,582       |
| + 40 $\lambda''$    | - 0,683    | - 52,063 $m''$     | = - 28,682 | + 67,640       |
| + 40 $\lambda'''$   | - 0,831    | - 49,516 $m'''$    | = - 27,881 | + 65,996       |
| + 40 $\lambda^{IV}$ | - 1,056    | - 50,796 $m^{IV}$  | = - 28,692 | + 65,045       |
|                     | - 3,236    |                    | - 110,964  | + 264,263      |

Messung 2.

|                     |         |                   |            |           |
|---------------------|---------|-------------------|------------|-----------|
| + 40 $\lambda'$     | - 0,638 | - 54,055 $m'$     | = - 28,664 | + 64,291  |
| + 40 $\lambda''$    | - 0,737 | - 57,802 $m''$    | = - 31,844 | + 62,155  |
| + 40 $\lambda'''$   | - 0,999 | - 54,568 $m'''$   | = - 30,727 | + 65,811  |
| + 40 $\lambda^{IV}$ | - 0,808 | - 56,183 $m^{IV}$ | = - 31,735 | + 64,915  |
|                     | - 3,182 |                   | - 122,970  | + 257,172 |

+ 20,  $L_{250}$  Entfernung der letzten Stange vom Festlegungspunkt am 10. Juni.



*Entfernung vom Festlegungspunkt am 10. Juni bis zum mittleren Pfeiler.*

Messung 1.

|                     | Reduction. | Metallthermometer.           | Zwischenräume. |
|---------------------|------------|------------------------------|----------------|
| + 34 $\lambda'$     | - 2,175    | - 38,753 $m'$ = - 20,550     | + 55,626       |
| + 34 $\lambda''$    | - 1,031    | - 42,018 $m''$ = - 23,149    | + 53,246       |
| + 33 $\lambda'''$   | - 1,674    | - 38,014 $m'''$ = - 21,405   | + 54,731       |
| + 33 $\lambda^{IV}$ | - 0,913    | - 39,749 $m^{IV}$ = - 22,452 | + 53,494       |
|                     | - 5,793    | - 87,556                     | + 217,097      |

- 154,  $L_{394}$  Entfernung der letzten Stange vom mittelsten Pfeiler.

Messung 2.

|                     |         |                              |           |
|---------------------|---------|------------------------------|-----------|
| + 34 $\lambda'$     | - 1,870 | - 43,369 $m'$ = - 22,997     | + 54,152  |
| + 34 $\lambda''$    | - 1,407 | - 46,457 $m''$ = - 25,594    | + 51,459  |
| + 33 $\lambda'''$   | - 1,700 | - 42,841 $m'''$ = - 24,123   | + 52,020  |
| + 33 $\lambda^{IV}$ | - 0,839 | - 43,485 $m^{IV}$ = - 24,562 | + 51,909  |
|                     | - 5,816 | - 97,276                     | + 209,540 |

- 136,  $L_{956}$  Entfernung der letzten Stange vom mittelsten Pfeiler.

Zusammenstellung dieser Messungen.

*Entfernung vom südlichen Endpunkt bis zur Festlegung am 10. Juni.*

|   | 1. Messung | 2. Messung |
|---|------------|------------|
| 160 Mefsstangen = 160 $L$ . . . . .     | + 0        | + 0        |
| Reduction . . . . .                     | - 3,236    | - 3,182    |
| Metallthermometer . . . . .             | - 110,964  | - 122,970  |
| Zwischenräume . . . . .                 | + 264,263  | + 257,172  |
| Entfernung von der Festleg. am 10. Juni | 0          | + 20,250   |
| Summe 160 $L$                           | + 150,063  | + 151,270  |

Unterschied + 1,  $L_{207}$

*Entfernung von der Festlegung am 10. Juni bis zum mittelsten Pfeiler.*

|  | 1. Messung | 2. Messung |
|--|------------|------------|
| 134 Mefsstangen = 134 $L$ + $\lambda'$ + $\lambda''$ - 2 $L$ | + 0,106    | + 0,106    |
| Reduction . . . . .  | - 5,793    | - 5,816    |
| Metallthermometer . . . . .                                  | - 87,556   | - 97,276   |
| Zwischenräume . . . . .                                      | + 217,097  | + 209,540  |
| Entfernung vom mittelsten Pfeiler . . .                      | - 154,394  | - 136,956  |
| Summe 134 $L$  | - 30,540   | - 30,402   |

Unterschied + 0,  $L_{138}$

Hieraus geht die Länge des südlichen Theils der Grundlinie hervor:

|  | 1. Messung        | 2. Messung        |
|--|-------------------|-------------------|
| Vom südl. Endpunkt bis zur Festleg. am 10. Juni        | $160 L + 150,063$ | $160 L + 151,270$ |
| Von der Festleg. am 10. Juni bis zum mittelst. Pfeiler | $134 L - 30,540$  | $134 L - 30,402$  |
| Vom südl. Endpunkt bis zur Mitte                       | $294 L + 119,523$ | $294 L + 120,868$ |

Da  $L = 1729, L_{0999} = 2 T + 1, L_{0999}$  ist, so erhält man

$$\text{die Länge des südlichen Theils der Grundlinie} = \left| 588 T + 442,894 \right| 588 T + 444,239$$

Das Mittel aus beiden um  $1, L_{345}$  von einander abweichenden Messungen ist

$$588 T + 443,567 = 588, T_{513388}$$

Diese Länge ist so anzusehen, als ob sie auf einer Fläche gemessen worden wäre, die in der mittleren Höhe der Grundlinie mit der Oberfläche des Meeres parallel ist: sie muß daher auf die Meeresfläche reducirt werden.

Wenn  $R$  den Krümmungshalbmesser,  $h$  die mittlere Höhe der Grundlinie über dem Meere,  $L$  die gemessene,  $l$  die auf die Meeresfläche reducirt Grundlinie bedeuten, so hat man  $L : l = R + h : R$ , und hieraus folgt:

$$L - l = \frac{Lh}{R+h} = Lh \left\{ \frac{1}{R} - \frac{h}{R^2} + \frac{h^2}{R^3} - \dots \right\}$$

Die Höhen der Endpunkte dieses Theils der Grundlinie (Siehe Höhenmessung) sind gefunden worden wie folgt:

$$\text{Südl. Endpunkt } A = 23, T_{629} \quad \text{Mittelpunkt } B = 24, T_{751}$$

Die mittlere Höhe der Grundlinie, in Beziehung auf die mittlere Höhe der Endpunkte, ergab sich  $= - 0, T_{755}$ ; in Beziehung auf die Meeresfläche ist sie daher  $= 23, T_{435}$ .

Nimmt man den Krümmungshalbmesser der Erde in der Richtung der Grundlinie  $= 3271428 T$ , so beträgt die Reduction auf die Meeresfläche  $3, L_{6425} = 0, T_{004216}$ . Die auf die Meeresfläche reducirt Länge des südlichen Theils der Grundlinie ist daher:

$$= 588, T_{509172}$$

## B. Nördlicher Theil der Grundlinie.

*Entfernung vom mittelsten Pfeiler bis zur Festlegung am 15. Juni.*

Messung 1.

|                     | Reduction. | Metallthermometer. |            | Zwischenräume. |
|---------------------|------------|--------------------|------------|----------------|
|                     | $L$        | $L$                | $L$        | $L$            |
| + 40 $\lambda'$     | - 0,734    | - 50,222 $m'$      | = - 26,631 | + 62,831       |
| + 40 $\lambda''$    | - 1,179    | - 53,682 $m''$     | = - 29,574 | + 61,619       |
| + 40 $\lambda'''$   | - 0,980    | - 50,566 $m'''$    | = - 28,473 | + 64,392       |
| + 40 $\lambda^{IV}$ | - 1,036    | - 52,284 $m^{IV}$  | = - 29,533 | + 65,128       |
|                     | - 3,929    |                    | - 114,211  | + 253,970      |

Messung 2.

|                     |         |                   |            |           |
|---------------------|---------|-------------------|------------|-----------|
| + 40 $\lambda'$     | - 0,665 | - 45,090 $m'$     | = - 23,910 | + 63,458  |
| + 40 $\lambda''$    | - 1,363 | - 48,239 $m''$    | = - 26,576 | + 63,117  |
| + 40 $\lambda'''$   | - 0,833 | - 44,451 $m'''$   | = - 25,029 | + 62,168  |
| + 40 $\lambda^{IV}$ | - 1,026 | - 46,604 $m^{IV}$ | = - 26,324 | + 62,743  |
|                     | - 3,887 |                   | - 101,839  | + 251,486 |

- 9,<sup>L</sup>000 Entfernung von der Festlegung am 15. Juni.

*Entfernung von der Festlegung am 15. Juni bis zum nördlichen Endpfeiler.*

Messung 1.

|                     |         |                   |            |           |
|---------------------|---------|-------------------|------------|-----------|
| + 37 $\lambda'$     | - 1,493 | - 53,646 $m'$     | = - 28,447 | + 58,735  |
| + 36 $\lambda''$    | - 1,389 | - 55,344 $m''$    | = - 30,490 | + 56,676  |
| + 36 $\lambda'''$   | - 0,665 | - 52,684 $m'''$   | = - 29,665 | + 57,105  |
| + 36 $\lambda^{IV}$ | - 1,123 | - 53,760 $m^{IV}$ | = - 30,366 | + 57,723  |
|                     | - 4,670 |                   | - 118,968  | + 230,239 |

- 389,<sup>L</sup>550 Entfernung vom nördlichen Endpunkt.

Messung 2. *Der Anfang war + 9,<sup>L</sup>000 von der Festlegung am 15. Juni entfernt.*

|                     |         |                   |            |           |
|---------------------|---------|-------------------|------------|-----------|
| + 37 $\lambda'$     | - 1,807 | - 41,385 $m'$     | = - 21,945 | + 58,424  |
| + 36 $\lambda''$    | - 1,135 | - 43,731 $m''$    | = - 24,092 | + 56,949  |
| + 36 $\lambda'''$   | - 0,747 | - 41,483 $m'''$   | = - 23,358 | + 55,898  |
| + 36 $\lambda^{IV}$ | - 1,254 | - 42,307 $m^{IV}$ | = - 23,897 | + 56,588  |
|                     | - 4,943 |                   | - 93,292   | + 227,860 |

- 421,<sup>L</sup>430 Entfernung vom nördlichen Endpunkt.



Zusammenstellung dieser Messungen.

Entfernung vom mittelsten Pfeiler bis zur Festlegung am 15. Juni.

|   | 1. Messung          | 2. Messung       |
|---|---------------------|------------------|
| 160 Mefsstangen = 160 L . . . . .       | + 0 <sup>L</sup>    | + 0 <sup>L</sup> |
| Reduction . . . . .                     | - 3,929             | - 3,887          |
| Metallthermometer . . . . .             | - 114,211           | - 101,839        |
| Zwischenräume . . . . .                 | + 253,970           | + 251,486        |
| Entfernung von der Festleg. am 15. Juni | 0                   | - 9,000          |
| <b>Summe 160 L</b>                      | <b>+ 135,830</b>    | <b>+ 136,760</b> |
|   | Unterschied + 0,930 |                  |

Entfernung von der Festlegung am 15. Juni bis zum nördlichen Pfeiler.

|  | 1. Messung           | 2. Messung           |
|--|----------------------|----------------------|
| 145 Mefsstangen = 145 L + λ' - L           | - 0,287 <sup>L</sup> | - 0,287 <sup>L</sup> |
| Reduction . . . . .                        | - 4,670              | - 4,943              |
| Metallthermometer . . . . .                | - 118,968            | - 93,292             |
| Zwischenräume . . . . .                    | + 230,239            | + 227,860            |
| Entfernung des Endes vom nördl. Pfeiler    | - 389,550            | - 421,430            |
| Entfernung der Festl. am 15. J. vom Anfang | 0                    | + 9,000              |
| <b>Summe 145 L</b>                         | <b>- 283,236</b>     | <b>- 283,092</b>     |
|  | Unterschied + 0,144  |                      |

Hieraus geht die Länge des nördlichen Theils der Grundlinie hervor:

|   | 1. Messung                   | 2. Messung                   |
|---|------------------------------|------------------------------|
| Vom mittelsten Pfeiler bis zur Festlegung am 15. Juni | 160 L + 135,830 <sup>L</sup> | 160 L + 136,760 <sup>L</sup> |
| Von der Festlegung am 15. Juni bis zum nördl. Pfeiler | 145 L - 283,236              | 145 L - 283,092              |
| Vom mittelsten Pfeiler bis zum nördl. Endpunkt        | 305 L - 147,406              | 305 L - 146,332              |

Daher ist

$$\text{die Länge des nördlichen Theils der Grundlinie} = \left| 610 T + 188,064^L \right| 610 T + 189,138^L$$

Das Mittel aus beiden um 1,074<sup>L</sup> von einander abweichenden Messungen ist

$$610 T + 188,601^L = 610,218287^T.$$

Die Höhen der Endpunkte wurden gefunden wie folgt:

$$\text{Mittelpunkt } B = 24,751^T; \quad \text{nördlicher Endpunkt } C = 23,658^T.$$





§. 11. Beurtheilung der Messungen beider Theile der Grundlinie.

Es können drei von einander getrennte Fehlerursachen auf die Bestimmung der Länge der Grundlinie einwirken, nämlich: Fehler in der Vergleichung der Mefsstangen unter einander; Fehler in der Bestimmung ihrer Länge, und endlich Fehler, welche bei der Messung der Grundlinie selbst begangen worden sind. Es muß daher untersucht werden, wie groß der Einfluß einer jeden Fehlerursache auf die Länge der Grundlinie anzuschlagen ist.

Nach dem vorigen §. erhält man, im Mittel aus den wiederholten Messungen, den Ausdruck des südlichen Theils der Grundlinie wie folgt:

$$= 74 \lambda' + 74 \lambda'' + 73 \lambda''' + 73 \lambda^{iv} + 329,^{L}473 - 92,^{L}330 m' - 99,^{L}171 m'' - 92,^{L}470 m''' - 95,^{L}107 m^{iv}$$

den Ausdruck des nördlichen Theils:

$$= 77 \lambda' + 76 \lambda'' + 76 \lambda''' + 76 \lambda^{iv} + 67,^{L}573 - 95,^{L}172 m' - 100,^{L}499 m'' - 94,^{L}593 m''' - 97,^{L}478 m^{iv}$$

Setzt man zuerst in beiden Ausdrücken für  $\lambda'$ ,  $\lambda''$ ,  $\lambda'''$ ,  $\lambda^{iv}$  nach §. 1. die Werthe  $L + x'$ ,  $L + x''$  .... und führt dann für  $L$  seinen, aus der Vergleichung der Mefsstange  $\mathcal{N}_0^I$  mit der Toise gefundenen Werth, nämlich

$$L = 1727,^{L}9962 - x' + 1,5405 m'$$

in die obigen Gleichungen ein, so erhält man die Ausdrücke, welche den Einfluß der Größen  $x'$ ,  $x''$ ,  $x'''$ ,  $x^{iv}$ ,  $m'$ ,  $m''$ ,  $m'''$ ,  $m^{iv}$  auf die Länge der beiden Theile der Grundlinie ausdrücken, und zwar

für den südlichen Theil:

$$- 220 x' + 74 x'' + 73 x''' + 73 x^{iv} + 360,^{L}577 m' - 99,^{L}171 m'' - 92,^{L}470 m''' - 95,^{L}107 m^{iv};$$

für den nördlichen Theil:

$$- 228 x' + 76 x'' + 76 x''' + 76 x^{iv} + 374,^{L}681 m' - 100,^{L}499 m'' - 94,^{L}593 m''' - 97,^{L}478 m^{iv}.$$

Der mittlere Fehler eines jeden Ausdruckes ist zugleich der mittlere Fehler des zugehörigen Theils der Grundlinie, welcher aus der Vergleichung der Mefsstangen unter einander hervorgegangen ist.

Der mittlere Fehler  $F$  eines solchen Ausdruckes wird aber aus dem Gewicht  $P$  dieses Ausdruckes, und dem mittleren Fehler  $\varepsilon$  der Vergleichung der Mefsstangen unter einander gefunden wie folgt:

$$F = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{P}}$$

44 I. §. 11. *Beurtheilung der Messungen beider Theile der Grundlinie.*

Da  $\varepsilon$  bereits bekannt und nach §. 4.  $= 0,00432$  ist, so kömmt es bloß darauf an, das Gewicht  $P$  eines jeden der obigen Ausdrücke zu suchen, um den mittleren Fehler desselben bestimmen zu können.

Wenn unbekannte Größen  $x, y, z \dots$  durch Gleichungen, wie

$$(an) = (aa) x + (ab) y + (ac) z + \dots$$

$$(bn) = (ab) x + (bb) y + (bc) z + \dots$$

$$(cn) = (ac) x + (bc) y + (cc) z + \dots$$

gegeben sind, und man das Gewicht  $P$  eines aus denselben zusammengesetzten Ausdrucks

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \dots$$

sucht, so findet man es durch die Formel

$$\frac{1}{P} = \alpha A + \beta B + \gamma C + \dots$$

in welcher  $A, B, C \dots$  Größen sind, die den folgenden Gleichungen Genüge leisten, und aus denselben gefunden werden können:

$$\alpha = (aa) A + (ab) B + (ac) C + \dots$$

$$\beta = (ab) A + (bb) B + (bc) C + \dots$$

$$\gamma = (ac) A + (bc) B + (cc) C + \dots$$

u. s. w. u. s. w.

Im vorliegenden Fall lassen sich zur Bestimmung von  $A, B, C \dots$  aus den Gleichungen des §. 4. nach dem obigen Schema leicht die erforderlichen Gleichungen bilden; denn  $\alpha$  ist der Coefficient von  $x'$ ,  $\beta$  der Coefficient von  $x''$  etc., in den vorhin aus den Messungen der Grundlinie abgeleiteten Ausdrücken.

Auf diese Weise erhält man für beide Theile der Grundlinie die folgenden beiden Systeme von Gleichungen:

$$\begin{aligned} - 220 &= 8 A - 8,81876 E + 3,10727 F + 2,97395 G + 2,97052 H = - 228 \\ + 74 &= 8 B + 2,93961 E - 9,32177 F + 2,97395 G + 2,97052 H = + 76 \\ + 73 &= 8 C + 2,93961 E + 3,10727 F - 8,92180 G + 2,97052 H = + 76 \\ + 73 &= 8 D + 2,93961 E + 3,10727 F + 2,97395 G - 8,91152 H = + 76 \\ + 360,577 &= - 11,7583 A + 13,76481 E - 4,64469 F - 4,50939 G - 4,32496 H = + 374,618 \\ - 99,171 &= - 12,4290 B - 4,64469 E + 15,22860 F - 4,58989 G - 4,75987 H = - 100,499 \\ - 92,470 &= - 11,8957 C - 4,50939 E - 4,58989 F + 14,03738 G - 4,53592 H = - 94,593 \\ - 95,107 &= - 11,8820 D - 4,32496 E - 4,75987 F - 4,53592 G + 14,24174 H = - 97,478 \end{aligned}$$

Die erste Vertikalreihe bildet mit den Größen rechts des Gleichheitszeichens, das System der Gleichungen für den südlichen Theil der Grundlinie. Die letzte Vertikalreihe, mit denselben Größen links des Gleichheitszeichens, das System der Gleichungen für den nördlichen Theil.

Die Auflösungen beider Systeme von Gleichungen geben die Werthe  $A, B, C \dots$  für beide Theile der Grundlinie wie folgt:

|                           | Für den südlichen<br>Theil. | Für den nördlichen<br>Theil. |
|---------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| Log. $A =$                | 0,13280                     | $= 9,86564 - 10$             |
| - $B =$                   | 0,64220                     | $= 0,64217$                  |
| - $C =$                   | 0,84376                     | $= 0,91196$                  |
| - $D =$                   | 1,10464 <sub>n</sub>        | $= 1,12342$ <sub>n</sub>     |
| - $E =$                   | 1,73039                     | $= 1,75986$                  |
| - $F =$                   | 1,46459                     | $= 1,50939$                  |
| - $G =$                   | 1,50894                     | $= 1,55995$                  |
| - $H =$                   | 1,27994                     | $= 1,34048$                  |
| Hiermit findet man:       | $\frac{1}{P} = 11300,7$     | $\frac{1}{P} = 12513,7$      |
| und den mittleren Fehler: | $= \pm 0,^L459$             | $= \pm 0,^L483$              |

Dies sind die mittleren Fehler, welche lediglich aus der Vergleichung der Meßstangen unter einander für beide Theile der Grundlinie hervorgehen. Es bleibt daher noch die Untersuchung über die beiden anderen Fehlerursachen übrig.

Der mittlere Fehler einer Vergleichung von  $L$  mit der Toise ist in §. 5.  $= 0,^L003748$  gefunden worden. Da nun die Bestimmung von  $L$  auf 10 Messungen beruht, und der südliche Theil der Grundlinie durch eine 294malige, der nördliche durch eine 305malige Vervielfältigung von  $L$  gemessen wurde, so ist der mittlere Fehler, der aus der Vergleichung der Meßstange  $\mathcal{N}^{\circ}$  I. mit der Toise hervorgeht, für den südlichen Theil der Grundlinie

$$= \frac{294}{\sqrt{10}} \cdot 0,003748 = \pm 0,^L349$$

für den nördlichen Theil der Grundlinie

$$= \frac{305}{\sqrt{10}} \cdot 0,003748 = \pm 0,^L362$$

Der dritte Einfluss, der zufälligen Fehler, die bei dem Messen der Grundlinie selbst begangen wurden, kann nur nach den Unterschieden, welche die wiederholten Messungen im vorigen §. ergeben haben, geschätzt werden.

Für den südlichen Theil der Grundlinie ist

$$\text{für die ersten 160 Stangen der Unterschied} = 1,^L207$$

$$\text{- - zweiten 134 - - - - -} = 0,^L138$$

46 I. §. 11. *Beurtheilung der Messungen beider Theile der Grundlinie.*

Man erhält daher das Quadrat des mittleren Fehlers, welcher bei einer Messung zu fürchten ist

$$= \frac{294}{2} \left\{ \frac{(1,207)^2}{160} + \frac{(0,138)^2}{134} \right\}$$

Da aber die Messung zweimal gemacht wurde, so ist dasselbe noch durch 2 zu dividiren. Man erhält daher diesen mittleren Fehler des südlichen Theils der Grundlinie

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ \frac{294}{160} (1,207)^2 + \frac{294}{134} (0,138)^2 \right\}} = \pm 0,824$$

Für den nördlichen Theil der Grundlinie ist

für die ersten 160 Stangen der Unterschied = 0,930

- - zweiten 145 - - - - - = 0,144

Hieraus ergibt sich der mittlere Fehler

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ \frac{305}{160} (0,930)^2 + \frac{305}{145} (0,144)^2 \right\}} = \pm 0,650$$

Vereinigt man jetzt die aus den drei getrennten Ursachen hervorgegangenen partiellen Fehler, so erhält man die summarischen mittleren Fehler

1) für den südlichen Theil der Grundlinie

$$= \sqrt{\left\{ (0,459)^2 + (0,349)^2 + (0,824)^2 \right\}} = \pm 1,006$$

oder =  $\frac{1}{505400}$  der Länge.

2) Für den nördlichen Theil der Grundlinie

$$= \sqrt{\left\{ (0,483)^2 + (0,362)^2 + (0,650)^2 \right\}} = \pm 0,887$$

oder =  $\frac{1}{594400}$  der Länge.

Der erste Fehler beträgt auf 100 Preussische Meilen etwa  $4\frac{3}{4}$  Fufs; der zweite Fehler nur 4 Fufs.

Der mittlere Fehler beider Theile, oder der ganzen gemessenen Linie ist

$$= \sqrt{(1,006)^2 + (0,887)^2} = \pm 1,341$$

oder =  $\frac{1}{772300}$  der Länge.

