VIII.

Anzeigen.

1.

(*Göttingische gelehrte Anzeigen.* 1821, Februar 26.)

Am 15. Februar wurde der Königl. Societät vom Herrn Hofrath *Gauss* eine Vorlesung übergeben, überschrieben

Theoria Combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars prior,

die eine der wichtigsten Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zum Gegenstande hat. Alle Beobachtungen, die sich auf Grössenbestimmungen aus der Sinnenwelt beziehen, können, mit welcher Genauigkeit und mit wie vortrefflichen Werkzeugen sie auch angestellt werden, nie *absolute* Genauigkeit haben; sie bleiben immer nur Näherungen, grösseren oder kleineren Fehlern ausgesetzt. Nicht von solchen Fehlern ist hier die Rede, deren Quellen genau bekannt sind, und deren Grösse bei bestimmten Beobachtungen jedesmal berechnet werden kann; denn da dergleichen Fehler bei den beobachteten Grössen in Abzug gebracht werden können und sollen, so ist es dasselbe, als ob sie gar nicht da wären. Ganz anders verhält es sich dagegen mit den als zufällig zu betrachtenden Fehlern, die aus der beschränkten Schärfe der Sinne, aus mancherlei unvermeidlichen und keiner Regel folgenden Unvollkommenheiten der Instrumente, und aus mancherlei regellos (wenigstens für uns) wirkenden Störungen durch äussere Umstände (z. B. das Wallen der Atmosphäre beim Sehen, Mangel absoluter Festigkeit beim Aufstellen der Instrumente) herrühren. Diese zufälligen Fehler, die dem Calcül nicht unterworfen werden können, lassen sich nicht *wegschaffen*, und der Beobachter kann sie durch sorgfältige Aufmerksamkeit und durch Vervielfältigung der Beobachtungen nur *vermindern*: allein nachdem der Beobachter das seinige gethan hat, ist es an dem Geometer, die Unsicherheit der Beobachtungen und der durch Rechnung daraus abgeleiteten Grössen nach streng mathematischen Principien zu würdigen, und was das wichtigste ist, da, wo die mit den Beobachtungen zusammenhängenden Grössen aus denselben durch verschiedene Combinationen abgeleitet werden können, diejenige Art vorzuschreiben, wobei so wenig Unsicherheit als möglich zu befürchten bleibt.

Obgleich die zufälligen Fehler als solche keinem Gesetze folgen, sondern ohne Ordnung in einer Beobachtung grösser, in einer anderen kleiner ausfallen, so ist doch gewiss, dass bei einer bestimmten Beobachtungsart, auch die Individualität des Beobachters und seiner Werkzeuge als bestimmt betrachtet, die aus jeder einfachen Fehlerquelle fliessenden Fehler nicht bloss in gewissen Grenzen eingeschlossen sind, sondern dass auch alle möglichen Fehler zwischen diesen Grenzen ihre bestimmte relative Wahrscheinlichkeit haben, der zu Folge sie nach Maassgabe ihrer Grösse häufiger oder seltener zu erwarten sind, und derjenige, der eine genaue und vollständige Einsicht in die Beschaffenheit einer solchen Fehlerquelle hätte, würde diese Grenzen und den Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeit der einzelnen Fehler und ihrer Grösse zu bestimmen im Stande sein, auf eine ähnliche Weise, wie sich bei Glücksspielen, so bald man ihre Regeln kennt, die Grenzen der möglichen Gewinne und Verluste, und deren relative Wahrscheinlichkeiten berechnen lassen. Dasselbe gilt auch von dem aus dem Zusammenwirken der einfachen Fehlerquellen entspringenden Totalfehler. Auch sind diese Begriffe nicht auf unmittelbare Beobachtungen beschränkt, sondern auch auf mittelbare aus Beobachtungen abgeleitete Grössenbestimmungen anwendbar. In der Wirklichkeit werden uns freilich fast allemal die Mittel fehlen, das Gesetz der Wahrscheinlichkeiten der Fehler *a priori* anzugeben.

Wie wir die Unzulässigkeit einer bestimmten Art von Beobachtungen im allgemeinen abschätzen wollen, hängt zum Theil von unserer Willkür ab. Man kann dabei entweder bloss die Grösse der äussersten möglichen Fehler zum Maassstabe wählen, oder zugleich auf die grössere oder geringere Wahrscheinlichkeit der einzelnen möglichen Fehler mit Rücksicht nehmen. Das letztere scheint angemessener zu sein. Allein diese Berücksichtigung kann auf vielfache Weise geschehen. Man kann, wie es die Berechner bisher gemacht haben, den sogenannten wahrscheinlichen (nicht wahrschein*lichsten*) Fehler zum Maassstabe wählen, welches derjenige ist, über welchen hinaus alle möglichen Fehler zusammen noch eben so viele Wahrscheinlichkeit haben, wie alle diesseits liegenden zusammen; allein es wird *weit vortheilhafter* sein, zu diesem Zweck statt des wahrscheinlichen Fehlers den *mittleren* zu gebrauchen, vorausgesetzt, dass man diesen an sich noch schwankenden Begriff auf die rechte Art bestimmt. Man lege jedem Fehler ein von seiner Grösse abhängendes Moment bei, multiplicire das Moment jedes möglichen Fehlers in dessen Wahrscheinlichkeit und addire die Produkte: der Fehler, dessen Moment diesem Aggregat gleich ist, wird als mittlerer betrachtet werden müssen. Allein welche Funktion der Grösse des Fehlers wir für dessen Moment wählen wollen, bleibt wieder unserer *Willkür* überlassen, wenn nur der Werth derselben immer positiv ist, und für grössere Fehler grösser als für kleinere. Der Verf. hat die einfachste Funktion dieser Art gewählt, nämlich das Quadrat; diese Wahl ist aber noch mit manchen anderen höchst wesentlichen Vortheilen verknüpft, die bei keiner anderen stattfinden. Denn sonst könnte auch jede andere Potenz mit geraden Exponenten gebraucht werden, und je grösser dieser Exponent gewählt würde, desto näher würde man dem Princip kommen, wo bloss die äussersten Fehler zum Maassstabe der Genauigkeit dienen. Gegen die Art, wie ein grosser Geometer den Begriff des mittleren Fehlers genommen hat, indem er die Momente der Fehler diesen gleich setzt, wenn sie positiv sind, und die ihnen entgegengesetzten Grössen dafür gebraucht, wenn sie negativ sind, lässt sich bemerken, dass dabei gegen die mathematische Continuität angestossen wird, dass sie so gut wie jede andere auch willkürlich gewählt ist, dass die Resultate viel weniger einfach und genugthuend ausfallen, und dass es auch an sich schon natürlicher scheint, das Moment der Fehler in einem stärkeren Verhältniss, wie diese selbst, wachsen zu lassen, indem man sich gewiss lieber den einfachen Fehler zweimal, als den doppelten einmal gefallen lässt.

Diese Erläuterungen mussten vorangeschickt werden, wenn auch nur etwas von dem Inhalt der Untersuchung hier angeführt werden sollte, wovon die gegenwärtige Abhandlung die erste Abtheilung ausmacht.

Wenn die Grössen, deren Werthe durch Beobachtungen gefunden sind, mit einer gleichen Anzahl unbekannter Grössen auf eine bekannte Art zusammenhängen, so lassen sich, allgemein zu reden, die Werthe der unbekannten Grössen aus den Beobachtungen durch Rechnung ableiten. Freilich werden jene Werthe auch nur näherungsweise richtig sein, insofern die Beobachtungen es waren: allein die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat nichts dabei zu thun, als die Unsicherheit jener Bestimmungen zu würdigen, indem sie die der Beobachtungen voraussetzt. Ist die Anzahl der unbekannten Grössen grösser als die der Beobachtungen, so lassen sich jene aus diesen noch gar nicht bestimmen. Allein wenn die Anzahl der unbekannten Grössen kleiner ist, als die der Beobachtungen, so ist die Aufgabe mehr als bestimmt: es sind dann unendlich viele Combinationen möglich, um aus den Beobachtungen die unbekannten Grössen abzuleiten, die freilich alle zu einerlei Resultaten führen müssten, wenn die Beobachtungen absolute Genauigkeit hätten, aber unter den obwaltenden Umständen mehr oder weniger von einander abweichende Resultate hervorbringen. Aus dieser ins Unendliche gehenden Mannigfaltigkeit von Combinationen die zweckmässigste auszuwählen, d. i. diejenige, wobei die Unsicherheit der Resultate die möglich kleinste wird, ist unstreitig eine der wichtigsten Aufgaben bei der Anwendung der Mathematik auf die Naturwissenschaften.

Der Verfasser gegenwärtiger Abhandlung, welcher im Jahre 1797 diese Aufgabe nach den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zuerst untersuchte, fand bald, dass die Ausmittelung der *wahrscheinlichsten* Werthe der unbekannten Grössen unmöglich sei, wenn nicht die Funktion, die die Wahrscheinlichkeit der Fehler darstellt, bekannt ist. Insofern sie dies aber nicht ist, bleibt nichts übrig, als hypothetisch eine solche Funktion anzunehmen. Es schien ihm das natürlichste, zuerst den umgekehrten Weg einzuschlagen und die Funktion zu suchen, die zu Grunde gelegt werden muss, wenn eine allgemein als gut anerkannte Regel für den einfachsten aller Fälle daraus hervorgehen soll, die nämlich, dass das arithmetische Mittel aus mehreren für eine und dieselbe unbekannte Grösse durch Beobachtungen von gleicher Zuverlässigkeit gefundenen Werthen als der wahrscheinlichste betrachtet werden müsse. Es ergab sich daraus, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers x einer Exponentialgrösse von der Form $e^{-h^2x^2}$ proportional angenommen werden müsse, und dass dann gerade diejenige Methode, auf die er schon einige Jahre zuvor durch andere Betrachtungen gekommen war, allgemein nothwendig werde. Diese

Methode, welche er nachher besonders seit 1801 bei allerlei astronomischen Rechnungen fast täglich anzuwenden Gelegenheit hatte, und auf welche auch *Legendre* inzwischen gekommen war, ist jetzt unter dem Namen Methode der kleinsten Quadrate im allgemeinen Gebrauch, und ihre Begründung durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung, sowie die Bestimmung der Genauigkeit der Resultate selbst, nebst andern damit zusammenhängenden Untersuchungen sind in der *Theoria Motus Corporum Coelestium* ausführlich entwickelt.

Der Marquis *de Laplace*, welcher nachher diesen Gegenstand aus einem neuen Gesichtspunkte betrachtete, indem er nicht die wahrscheinlichsten Werthe der unbekannten Grössen suchte, sondern die zweckmässigste Combination der Beobachtungen, fand das merkwürdige Resultat, dass, wenn die Anzahl der Beobachtungen als unendlich gross betrachtet wird, die Methode der kleinsten Quadrate allemal und unabhängig von der Funktion, die die Wahrscheinlichkeit der Fehler ausdrückt, die zweckmässigste Combination sei.

Man sieht hieraus, dass beide Begründungsarten noch etwas zu wünschen übrig lassen. Die erstere ist ganz von der hypothetischen Form für die Wahrscheinlichkeit der Fehler abhängig, und sobald man diese verwirft, sind wirklich die durch die Methode der kleinsten Quadrate gefundenen Werthe der unbekannten Grössen nicht mehr die wahrscheinlichsten, eben so wenig wie die arithmetischen Mittel in dem vorhin angeführten einfachsten aller Fälle. Die zweite Begründungsart lässt uns ganz im Dunkeln, was bei einer mässigen Anzahl von Beobachtungen zu thun sei. Die Methode der kleinsten Quadrate hat dann nicht mehr den Rang eines von der Wahrscheinlichkeitsrechnung gebotenen Gesetzes, sondern empfiehlt sich nur durch die Einfachheit der damit verknüpften Operationen.

Der Verfasser, welcher in gegenwärtiger Abhandlung diese Untersuchung aufs neue vorgenommen hat, indem er von einem ähnlichen Gesichtspunkte ausgeht, wie *de Laplace*, aber den Begriff des mittleren zu befürchtenden Fehlers auf eine andere, und wie ihm scheint, schon an und für sich natürlichere Art, feststellt, hofft, dass die Freunde der Mathematik mit Vergnügen sehen werden, wie die Methode der kleinsten Quadrate in ihrer neuen hier gegebenen Begründung allgemein als die zweckmässigste Combination der Beobachtungen erscheint, nicht näherungsweise, sondern nach mathematischer Schärfe, die Funktion für die Wahrscheinlichkeit der Fehler sei, welche sie wolle, und die Anzahl der Beobachtungen möge gross oder klein sein.

Mit dem Hauptgegenstande ist eine Menge anderer merkwürdiger Untersuchungen enge verbunden, deren Umfang aber den Verfasser nöthigte, die Entwickelung des grössten Theils derselben einer künftigen zweiten Vorlesung vorzubehalten. Von denjenigen, die schon in der gegenwärtigen ersten Abtheilung vorkommen, sei es uns erlaubt, hier nur ein Resultat anzuführen. Wenn die Funktion, welche die relative Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen Fehlers ausdrückt, unbekannt ist, so bleibt natürlich auch die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen gegebene Grenzen falle, unmöglich: dessenungeachtet muss, wenn nur allemal grössere Fehler geringere (wenigstens nicht grössere) Wahrscheinlichkeit haben als kleinere, die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen die Grenzen $-x$ und $+x$ falle, nothwendig grösser (wenigstens nicht kleiner) sein, als $\frac{x}{m}\sqrt{\frac{1}{3}}$, wenn x kleiner ist als $m\sqrt{\frac{3}{4}}$, und nicht kleiner als $1-\frac{4m^2}{9x^2}$, wenn x grösser ist als $m\sqrt{\frac{3}{4}}$, wobei m den bei den Beobachtungen zu befürchtenden mittleren Fehler bedeutet. Für $x = m\sqrt{\frac{3}{4}}$ fallen, wie man sieht, beide Ausdrücke zusammen.

2.

(*Göttingische gelehrte Anzeigen.* 1823, Februar 24.)

Eine am 2. Febr. der Königl. Societät von Hrn. Hofr. *Gauss* überreichte Vorlesung, überschrieben:

Theoria Combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars posterior,

steht im unmittelbaren Zusammenhange mit einer früheren, wovon in diesen Blättern (1821, Februar 26.) eine Anzeige gegeben ist. Wir bringen darüber nur kurz in Erinnerung, dass ihr Zweck war, die sogenannte Methode der kleinsten Quadrate auf eine neue Art zu begründen, wobei diese Methode nicht näherungsweise, sondern