

## VII.

# Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona

durch Beobachtungen am Ramsden'schen Zenithsector.

(1828).

### *Einleitung.*

Durch die von mir in den Jahren 1821 bis 1824 durch das Königreich Hannover längs des Meridians von Göttingen geführte Dreieckskette sind die Sternwarten von Göttingen und Altona auf das genaueste trigonometrisch mit einander verbunden. Diese Messungen werden in Zukunft ausführlich bekannt gemacht werden: hier wird nur bemerkt, dass die absoluten Grössen auf der von Herrn Prof. *Schumacher* in Holstein mit äusserster Schärfe gemessenen Basis beruhen, mit welcher das Dreieckssystem durch die Seite Hamburg—Hohenhorn zusammenhängt; die Orientirung gründet sich auf die Beobachtungen am Göttinger Mittagsfernrohr, da die Sternwarte und das nördliche Meridianzeichen selbst Dreieckspunkte sind. Die Sternwarten von Göttingen und Altona liegen durch ein merkwürdiges Spiel des Zufalls auf weniger als eine Hausbreite in einerlei Meridian. Obgleich die absoluten Polhöhen durch die Beobachtungen mit festen Meridianinstrumenten bestimmt sind, so war es doch wichtig, den Unterschied der Breiten noch auf eine andere Art mit einerlei Instrument zu bestimmen, und ich war so glücklich, dazu den trefflichen *Ramsden'schen* Zenithsector anwenden zu können, der bekanntlich zu ähnlichem Zweck bei der englischen Gradmessung gedient hat. Die damit im Frühjahr 1827 von mir angestellten Beobachtungen und ihre Resultate sind der Hauptgegenstand dieser Schrift.

Da die Beobachtungen mit diesem Instrument, wenn viele Sterne in einer Reihe zu beobachten sind, nicht wohl ohne den

Beistand eines geübten Gehülfen gemacht werden können, so hatte Herr Prof. *Schumacher* die Güte, den Herrn Ingenieur-Lieutenant *v. Nehus*, unter Genehmigung Sr. Majestät des Königs von Dänemark, für die Beobachtungen an beiden Plätzen damit zu beauftragen. Dieser sehr geschickte Beobachter hat fortwährend die Ableseung der Mikrometerschraube und die Einstellung des Lothfadens besorgt, während ich selbst die Antritte an die Meridianfäden beobachtete, und den auf den Meridian senkrechten Faden auf die Sterne einstellte: nur in den beiden ersten Beobachtungsnächten in Altona war jenes Geschäft von einem andern Gehülfen besorgt; allein diese Beobachtungen sind deshalb nicht mit aufgenommen, zumal da die Erfahrung bestätigte, dass verschiedene Personen die Bisection der Punkte durch den Lothfaden ungleich schätzten.

Das Instrument ist durch die ausführliche von *Mudge* gegebene Beschreibung hinlänglich bekannt. In Göttingen konnte es in der Sternwarte selbst, unter dem östlichen Meridianspalt, aufgestellt werden. In Altona war dies nicht thunlich; es wurde daher in dem Garten des Herrn Prof. *Schumacher*, in welchem die dortige Sternwarte selbst liegt, unter demselben Beobachtungszelte, welches *Mudge* in England gebraucht hat, aufgestellt. Die Solidität der Aufstellung, auf eingerammten Pfählen, liess nichts zu wünschen übrig: das Nivellement der Verticalaxe wurde täglich nachgesehen, und gewöhnlich fast nichts zu ändern gefunden; dasselbe gilt von der Horizontalaxe.

Um die Ebene des Limbus in den Meridian zu bringen, wurde in Göttingen das südliche Meridianzeichen benutzt, welches zwar in dem Meridian des westlichen Spaltes steht, dessen Azimuth am Platze des Sectors sich aber mit grösster Schärfe berechnen liess. In Altona konnte ein ähnliches Mittel nicht angewandt werden; der Limbus wurde zuerst, mit Hülfe der Kenntniss der absoluten Zeit, mittelst eines culminirenden Sterns sehr nahe in den Meridian gebracht; die Beobachtung mehrerer Sterne in der ganzen Ausdehnung des Limbus gab dann leicht die noch nöthige kleine Correction der Aufstellung. Da, wie schon erwähnt ist, von den am Sector culminirenden Sternen in jeder Nacht auch die Antritte an die Meridianfäden beobachtet wurden, und die Rectascensionen der Sterne bekannt waren, so erhielt die richtige Aufstellung im Meridian dadurch eine fortwährende sichere Controlle, und nur einmal war eine unbedeutende Nachhülfe erforderlich. In der

Regel wurde von einer Nacht zur andern mit der Stellung des Limbus, östlich oder westlich, abgewechselt, und nur gegen den Schluss der Beobachtungen wurde, um die Anzahl der Beobachtungen auf beide Lagen ziemlich gleich zu vertheilen, von dieser Regel zuweilen abgewichen, und der Sector in einer Nacht ein- oder mehreremale umgewandt.

Der Stand des Barometers und des inneren und äusseren Thermometers wurde in jeder Nacht wenigstens dreimal, zu Anfang, in der Mitte und am Schluss der Beobachtungen aufgezeichnet. Ebenso, nach dem Vorgang von *Mudge*, der Unterschied der Temperatur oben und unten am Sector, da deshalb der Limbus und der Radius in ungleichem Verhältnisse verändert werden. Dass übrigens jede andere durch die Einrichtung des Instruments vorgeschriebene Vorsicht sorgfältig beachtet ist, z. B. das Wassergefäss, in welches das Loth hängt, gehörig angefüllt zu erhalten, von der Mikrometerschraube, so viel thunlich, dieselben Gewinde spielen zu lassen u. dgl., ist wohl überflüssig, besonders zu bemerken. Die Einstellung des Lothfadens auf den oberen Punkt (das Centrum des Gradbogens) wurde bei der Beobachtung jedes Sternes von neuem unabhängig von der vorhergegangenen gemacht, und die Einstellung auf den nächsten Theilungspunkt (oder die beiden nächsten) wurde in der Regel mehreremale wiederholt, und aus den verschiedenen Ablesungen der Mikrometerschraube, die meistens auf wenige Decimaltheile der Secunde übereinstimmten, das Mittel genommen.

### I. Die beobachteten Sterne.

Ich hatte zu Anfang 38 Sterne in schicklichen Lagen zur Beobachtung ausgewählt, denen ich gegen den Schluss der Beobachtungen in Göttingen noch fünf andere beifügte, weil ich besorgte, dass durch ungünstiges Wetter der Schluss der Beobachtungen in Altona so weit verzögert werden könnte, dass ein beträchtlicher Theil der ersten Sterne wegen der bei Tage eintretenden Culmination nicht oft genug würde beobachtet werden können. Diese Besorgniss bestätigte sich jedoch nur in geringem Grade, und nur ein einziger Stern ist in Altona bloss einseitig beobachtet. Ich gebe hier die mittlere Stellung dieser Sterne auf den Anfang des Jahres 1827 reducirt: die Declinationen sind die Resultate, welche die Beobachtungen am Zenithsector selbst ergeben haben; die Rectascensionen, bei welchen für den gegen-

wärtigen Zweck die allerschärfste Bestimmung unwesentlich ist, gründen sich meistens nur auf eine einmalige Beobachtung am Meridiankreise, deren Reduktion Herr von *Heiligenstein* gefälligst berechnet hat. Der Bequemlichkeit wegen bezeichne ich die Sterne mit fortlaufenden Zahlen. No. 8, 13, 15 und 31 sind Doppelsterne; bei dem ersten ist immer der nachfolgende Stern, bei den beiden folgenden die Mitte eingestellt; bei No. 31 ist der Nebenstern so klein, dass er im Fernrohr des Sectors, selbst bei versuchsweise verdunkeltem Felde immer unsichtbar blieb, obgleich er von Herrn Prof. *Schumacher* im lichtstärkeren Fernrohr des *Reichenbach'schen* Meridiankreises sofort bemerkt wurde, ohne dass uns damals bekannt war, dass schon andere Astronomen diesen Doppelstern als solchen erkannt hatten.

Bezeichnung.		G. Aufst. 1827.	Declin. 1827.
1	24 Canum	13 <sup>h</sup> 27 <sup>m</sup> 22,39 <sup>s</sup>	49° 54' 11,62''
2	83 Ursae	34 9,77	55 33 34,98
3	η Ursae	40 42,86	50 10 46,20
4	86 Ursae	47 28,48	54 34 55,55
5	—	50 45,55	55 25 59,22
6	P. 13. 289	55 19,44	46 35 39,14
7	13 Bootis	14 1 49,03	50 16 43,44
8	α Bootis seq.	7 16,93	52 36 7,47
9	P. 14. 56	12 5,39	56 13 36,51
10	⊙ Bootis	19 18,40	52 39 12,05
11	P. 14. 131	27 50,42	53 39 33,02
12	P. 14. 164	35 24,18	52 58 55,66
13	39 Bootis med.	43 48,37	49 26 9,46
14	P. 14. 235	50 38,71	50 20 22,49
15	44 Bootis med.	58 5,30	48 19 52,47
16	—	15 7 8,12	49 13 46,68
17	P. 15. 39	10 33,95	51 34 53,72
18	—	15 0,55	52 35 5,87
19	—	21 50,88	54 37 34,87
20	—	30 42,13	54 29 54,30
21	—	38 9,07	52 54 37,09
22	—	42 14,32	46 16 4,70
23	—	48 16,24	56 20 27,00

Bezeichnung.		G. Aufst. 1827.	Declin. 1827.		
24	—	15 <sup>h</sup> 54 <sup>m</sup> 10,23 <sup>s</sup>	50° 22'	39,41''	
25	☉ Draconis	58 39,70	59 1	47,14	
26	—	16 4 24,06	50 38	13,12	
27	P. 16. 33	7 24,92	46 20	17,04	
28	P. 16. 56	11 34,31	53 40	13,41	
29	—	16 2,19	52 27	11,06	
30	—	20 38,75	55 36	4,73	
31	—	26 34,90	45 58	5,85	
32	16 Draconis	32 6,42	53 15	3,64	
33	—	37 53,85	50 16	13,67	
34	—	42 1,51	57 5	37,79	
35	—	45 2,26	46 56	48,53	
36	P. 16. 253	49 21,51	46 49	22,01	
37	P. 16. 291	56 11,73	56 56	42,35	
38	P. 16. 310	17 0 15,10	49 2	47,09	
39	P. 17. 20	4 23,12	58 29	49,33	
40	P. 17. 38	8 1,46	56 52	21,74	
41	74 Herculis	15 28,30	46 24	52,90	
42	P. 17. 120	20 53,56	57 10	13,11	
43	β Draconis	26 31,90	52 25	57,91	

## II. Die Beobachtungen.

Ein vollständiger Abdruck des Tagebuches in seiner ursprünglichen Gestalt, welcher die Stärke dieser Schrift mehr als verdoppelt haben würde, hat mir überflüssig erschienen: ich gebe daher die Beobachtungen sogleich nach den Sternen geordnet.

Die erste Columne enthält die Zenithdistanzen, wie das Instrument sie gegeben hat, d. i. die blosse Reduktion der Ablesung. Nördliche Zenithdistanzen sind als positiv, südliche als negativ betrachtet.

Die zweite Columne giebt die Vereinigung der Refraction mit der Wirkung der ungleichen Ausdehnung des Instruments wegen Ungleichheit der oberen und unteren Temperatur: die äussersten vorgekommenen Unterschiede waren + 1,2° Réaum. (das obere Thermometer höher), und — 0,6°. Um ein reines Resultat zur Beurtheilung der Uebereinstimmung der Beobachtungen unter sich

zu erhalten, habe ich die Mühe nicht gescheut, den Betrag für jede einzelne Beobachtung zu berechnen, wobei jedoch einige kleine sich leicht darbietende Rechnungsvortheile benutzt sind.

Die dritte Columne enthält die Reduktion auf den mittleren Ort für den Anfang des Jahres wegen Aberration, Nutation und Praecession, wozu bei einigen Sternen noch die eigene Bewegung gesetzt ist; es ist nämlich die jährliche eigene Bewegung in Declination angenommen

für 10 . . .	— 0,42"
„ 25 . . .	+ 0,33
„ 37 . . .	+ 0,38.

Bei den beiden ersten Sternen ist die eigene Bewegung längst unterschieden; bei 37 zeigt sie sich durch Vergleichung mit *Piazzi's* Bestimmung so, dass, die Richtigkeit der letzteren vorausgesetzt, sie nicht bezweifelt werden kann\*). Der Berechnung der Aberration, Nutation und Präcession liegen *Baily's* schätzbare Tafeln zu Grunde, nach denen für jeden Stern eine Ephemeride von 10 zu 10 Tagen, unter Beihülfe der Hrn. *v. Nehus* und *Petersen*, berechnet, und in diese mit Berücksichtigung der zweiten Differenzen interpolirt wurde.

Die vierte Columne enthält endlich die Summe der drei ersten, also die wahre nur noch mit dem Collimationsfehler behaftete Zenithdistanz für die mittlere Stellung zu Anfang des Jahres 1827, wie sie sich aus jeder einzelnen Beobachtung ergibt.

---

\*) Die Richtigkeit von *Piazzi's* Bestimmung dieses Sternes, auf 8 Beobachtungen gegründet, erhält durch die nahe Uebereinstimmung mit der Angabe der älteren Ausgabe seines Verzeichnisses von 1803, welche auf 6 Beobachtungen beruhte, eine Bestätigung; die genaue Grösse der eigenen Bewegung bleibt aber deswegen noch etwas ungewiss, weil das Jahr unbekannt ist, welches dem Mittel der Beobachtungen entspricht. Es ist merkwürdig, diese nicht unbedeutliche eigene Bewegung bei einem Stern der 7. Grösse zu finden. Auch Nr. 11 scheint in dieser Beziehung die Aufmerksamkeit der Astronomen zu verdienen.

## 1. (24 Canum Venaticorum)\*).

## Göttingen. Limbus Ost.

April 5.	— 1° 37'	52,62"	— 1,66"	+ 13,34"	— 1° 37'	40,94"
17.		47,75	— 1,62	+ 10,12		39,25
18.		46,01	— 1,61	+ 7,15		40,47
29.		44,57	— 1,61	+ 6,88		39,30

Mittel aus 4 Beobachtungen — 1 37 39,99

## Göttingen. Limbus West.

April 11.	— 1 37.	43,60	— 1,59	+ 11,75	— 1 37	33,44
20.		40,36	— 1,62	+ 9,31		32,67
27.		37,29	— 1,67	+ 7,41		31,55
30.		36,84	— 1,55	+ 6,62		31,77
Mai 14.		34,23	— 1,60	+ 3,02		32,81

Mittel aus 5 Beobachtungen — 1 37 32,45

## Altona. Limbus Ost.

Juni 4.	— 3 38	29,77	— 3,68	— 1,53	— 3 38	34,98
10.		26,44	— 3,58	— 2,57		32,59
11.		28,52	— 3,56	— 2,73		34,81
13.		29,85	— 3,53	— 3,03		36,41
15.		26,74	— 3,44	— 3,33		33,51

Mittel aus 5 Beobachtungen — 3 38 34,46

## Altona. Limbus West.

Juni 3.	— 3 38	25,37	— 3,69	— 1,35	— 3 38	30,41
6.		25,44	— 3,59	— 1,89		30,92
9.		25,32	— 3,60	— 2,41		31,33
12.		26,07	— 3,54	— 2,89		32,50

Mittel aus 4 Beobachtungen — 3 38 31,29

\*) Die Resultate der Beobachtungen für die übrigen 42 Sterne sind von Gauss selbst in derselben Form wie für 24 canum venaticorum gegeben. Da aber die Einzelresultate, speciell für den vorliegenden Zweck, ein besonderes Interesse nicht mehr beanspruchen können, ihre Benutzung bei der Ableitung und Discussion der Endresultate auch fast gar nicht in Frage kommt, so haben wir uns der Raumersparniss halber erlaubt, allein die Mittelwerthe der Zenithdistanzen für die einzelnen Lagen des Limbus in Göttingen und Altona unter Angabe der Anzahl der einzelnen Beobachtungen in nachstehender Tabelle zusammenzustellen.

Nr.	Stern.	Lage des Limb.	Zenithdistanz in Göttingen.	Anzahl der Beob.	Zenithdistanz in Altona.	Anzahl der Beob.
2.	83 Ursae majoris	O	+4° 1' 43,86"	6	+2° 0' 49,04"	6
		W	+4 1 50,74	7	+2 0 51,41	4
3.	η Ursae majoris	O	-1 21 5,00	6	-3 22 0,32	6
		W	-1 20 57,62	7	-3 21 57,02	6
4.	86 Ursae majoris	O	+3 3 3,52	6	+1 2 10,52	6
		W	+3 3 11,04	6	+1 2 12,34	3
5.	—	O	+3 54 7,57	6	—	—
		W	+3 54 15,03	6	+1 53 16,15	2
6.	Piazzi 13. 289	O	-4 56 11,92	6	-6 57 8,63	2
		W	-4 56 4,99	6	-6 57 3,92	4
7.	13 Bootis	O	-1 15 8,76	6	-3 16 2,46	6
		W	-1 15 0,56	6	-3 15 59,08	5
8.	α Bootis sequ.	O	+1 4 15,23	7	-0 56 37,59	6
		W	+1 4 23,43	7	-0 56 35,80	6
9.	Piazzi 14. 56	O	+4 41 44,77	7	+2 40 50,46	4
		W	+4 41 52,26	6	+2 40 54,44	2
10.	θ Bootis	O	+1 7 19,66	7	-0 53 33,07	6
		W	+1 7 27,64	7	-0 53 30,55	6
11.	Piazzi 14. 131	O	+2 7 41,46	6	+0 6 47,92	5
		W	+2 7 47,83	7	+0 6 50,69	4
12.	Piazzi 14. 164	O	+1 27 4,50	6	-0 33 49,36	5
		W	+1 27 10,63	7	-0 33 47,62	4
13.	39 Bootis med.	O	-2 5 41,35	6	-4 6 37,71	5
		W	-2 5 34,40	6	-4 6 33,62	5
14.	Piazzi 14. 235	O	-1 11 28,79	7	-3 12 23,62	6
		W	-1 11 21,46	6	-3 12 21,03	5
15.	44 Bootis med.	O	-3 11 59,25	6	-5 12 53,39	6
		W	-3 11 51,50	6	-5 12 50,68	5
16.	—	O	-2 18 5,07	5	-4 18 59,19	5
		W	-2 17 58,08	5	-4 18 55,64	5
17.	Piazzi 15. 39	O	+0 3 1,98	7	-1 57 51,14	6
		W	+0 3 9,04	7	-1 57 49,67	5
18.	—	O	+1 3 13,96	6	-0 57 38,86	6
		W	+1 3 21,22	7	-0 57 37,51	5
19.	—	O	+3 5 43,51	5	+1 4 49,15	6
		W	+3 5 50,35	7	+1 4 51,91	5

Nr.	Stern.	Lage des Limb.	Zenithdistanz in Göttingen.	Anzahl der Beob.	Zenithdistanz in Altona.	Anzahl der Beob.
20.	—	O	+2° 58' 2,56"	5	+0° 57' 9,14"	6
		W	+2 58 9,88	6	+0 57 10,82	5
21.	—	O	+1 22 45,19	4	-0 38 8,10	6
		W	+1 22 52,08	6	-0 38 5,58	6
22.	—	O	-5 15 46,21	4	-7 16 42,67	6
		W	-5 15 40,01	6	-7 16 36,74	6
23.	—	O	+4 48 34,52	5	+2 47 41,15	6
		W	+4 48 43,51	6	+2 47 43,99	6
24.	—	O	-1 9 12,44	5	-3 10 6,25	6
		W	-1 9 4,57	6	-3 10 3,83	6
25.	☉ Draconis	O	+7 29 55,43	6	+5 29 1,78	6
		W	+7 30 3,20	6	+5 29 3,43	6
26.	—	O	-0 53 37,66	6	-2 54 32,76	6
		W	-0 53 30,58	6	-2 54 31,24	6
27.	Piazzi 16. 33	O	-5 11 34,78	2	-7 12 29,49	5
		W	-5 11 25,90	2	-7 12 25,54	3
28.	Piazzi 16. 56	O	+2 8 22,19	5	+0 7 28,11	6
		W	+2 8 28,72	6	+0 7 30,01	6
29.	—	O	+0 55 18,58	3	-1 5 34,18	6
		W	+0 55 26,37	3	-1 5 31,88	6
30.	—	O	+4 4 12,22	6	+2 3 18,70	6
		W	+4 4 21,31	5	+2 3 22,11	6
31.	—	O	-5 33 46,24	6	-7 34 40,56	6
		W	-5 33 37,20	5	-7 34 37,10	6
32.	16 Draconis	O	+1 43 12,10	6	-0 17 41,55	6
		W	+1 43 18,61	6	-0 17 39,29	6
33.	—	O	-1 15 37,82	5	-3 16 31,74	5
		W	-1 15 30,84	6	-3 16 29,53	6
34.	—	O	+5 33 45,63	6	+3 32 51,35	6
		W	+5 33 54,80	6	+3 32 54,68	6
35.	—	O	-4 35 3,23	5	-6 35 57,04	5
		W	-4 34 56,00	5	-6 35 54,30	5
36.	Piazzi 16. 253	O	-4 42 29,81	6	-6 43 24,28	5
		W	-4 42 21,13	6	-6 43 21,61	5
37.	Piazzi 16. 291	O	+5 24 50,78	6	+3 23 55,60	5
		W	+5 24 58,73	6	+3 23 59,42	6

Nr.	Stern.	Lage des Limb.	Zenithdistanz in Göttingen.	Anzahl der Beob.	Zenithdistanz in Altona.	Anzahl der Beob.
38.	Piazzi 16. 310	O	-2° 29' 4,29"	6	-4° 29' 58,97"	5
		W	-2 28 57,26	6	-4 29 55,84	5
39.	Piazzi 17. 20	O	+6 57 58,55	1	+4 57 2,69	4
		W	+6 58 6,88	3	+4 57 5,60	4
40.	Piazzi 17. 38	O	+5 20 28,25	2	+3 19 36,52	3
		W	+5 20 38,33	3	+3 19 38,56	3
41.	74 Herculis	O	-5 6 58,39	2	-7 7 53,30	5
		W	-5 6 51,47	3	-7 7 49,79	5
42.	Piazzi 17. 120	O	+5 38 21,52	2	+3 37 26,27	5
		W	+5 38 29,20	2	+3 37 31,18	4
43.	$\beta$ Draconis	O	+0 54 5,81	2	-1 6 47,62	5
		W	+0 54 14,61	2	-1 6 45,60	5

### III. Resultate.

#### 1.

Die kunstloseste Combination der Beobachtungen zu einem Resultate für den Breitenunterschied der Beobachtungsplätze besteht darin, jeden Stern für sich zu betrachten. Ist, bei resp. östlicher und westlicher Lage des Limbus, die beobachtete Zenithdistanz in Göttingen  $a$  und  $a'$ , in Altona  $b$  und  $b'$ , so wird der Breitenunterschied  $= \frac{1}{2}(a + a') - \frac{1}{2}(b + b')$ . Man bekommt daher so viele Resultate, als Sterne vollständig beobachtet sind; für unsere Beobachtungen 42, da nur Nr. 5, als in Altona einseitig beobachtet, ausfällt.

Wären die Beobachtungen, auf welchen die Bestimmungen  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$  beruhen für alle Sterne gleich zahlreich, so würden alle einzelnen Resultate für den Breitenunterschied für gleich zuverlässig zu halten, und daher das einfache arithmetische Mittel das wahrscheinlichste Endresultat sein. Bei unseren Beobachtungen findet jene Voraussetzung nicht statt, und es muss daher den Resultaten nach Maassgabe der Anzahl der Beobachtungen ein ungleiches Gewicht beigelegt werden.

Wenn man sich erlaubt, die Fehler aller einzelnen Beobachtungen als unabhängig von einander zu betrachten, das Gewicht einer einzelnen Beobachtung als Einheit annimmt, und die Anzahl

der Beobachtungen, welche zu den Bestimmungen  $a, a', b, b'$  concurrirt haben, durch  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ , bezeichnet, so wird, nach bekannten Gründen, das Gewicht des Resultats  $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a' - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b'$  durch

$$\frac{4}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'}}$$

ausgedrückt werden. Unsere 42 Resultate mit ihren Gewichten sind hiernach folgende:

Stern.	Breitenunterschied.	Gewicht.	Stern.	Breitenunterschied.	Gewicht.
1	2° 0' 56,65''	4,44	23	2° 0' 56,45''	5,71
2	57,07	5,51	24	56,53	5,71
3	57,36	6,22	25	56,71	6,00
4	55,85	4,80	26	57,88	6,00
6	57,81	3,69	27	57,17	2,61
7	56,11	5,71	28	56,39	5,71
8	56,03	6,46	29	55,51	4,00
9	56,07	3,78	30	56,37	5,71
10	55,46	6,46	31	57,11	5,71
11	55,35	5,27	32	55,78	6,00
12	56,05	5,27	33	56,31	5,45
13	57,78	5,45	34	57,19	6,00
14	57,19	5,92	35	56,06	5,00
15	56,65	5,71	36	57,48	5,45
16	55,85	5,00	37	57,24	5,71
17	55,92	6,13	38	56,62	5,45
18	55,78	5,92	39	58,51	2,18
19	56,40	5,64	40	55,75	2,67
20	56,24	5,45	41	56,61	3,24
21	55,48	5,33	42	56,64	2,76
22	56,59	5,33	43	56,82	2,86

Das Mittel aus diesen 42 Bestimmungen, mit Rücksicht auf die Ungleichheit der Gewichte, findet sich

$$2^{\circ} 0' 56,52''$$

und das Gewicht dieses Resultats = 213,41.

## 2.

Wenn  $n$  verschiedene Bestimmungen einer Grösse die Werthe  $A, A', A''$  etc. mit den Gewichten  $p, p', p''$  etc. gegeben haben,  $A^*$  den mit Rücksicht auf die Gewichte genommenen Mittelwerth, und  $M$  die Summe

$$p(A - A^*)^2 + p'(A' - A^*)^2 + p''(A'' - A^*)^2 + \text{etc.}$$

bedeuten, so wird in Folge des allgemeineren Lehrsatzes in der Theoria Combinationis Observationum, Art. 38.,

$$\sqrt{\frac{M}{n-1}}$$

einen genäherten Werth des mittleren Fehlers einer Beobachtung derselben Art, deren Gewicht = 1 ist, geben. Die Anwendung dieser Vorschrift auf unseren Fall giebt  $M = 103,4126$ , und damit den mittleren Fehler einer Beobachtung

$$\sqrt{\frac{103,41}{41}} = 1,5882''.$$

Den mittleren in unserem Resultat für den Breitenunterschied zu befürchtenden Fehler erhält man, wenn man den mittleren Fehler einer Beobachtung mit der Quadratwurzel aus dem Gewicht jenes Resultats dividirt; aus obigem Werthe folgt er demnach =  $0,1087''$ .

## 3.

Der Collimationsfehler des Instruments ergibt sich aus den Beobachtungen eines jeden Sternes in Göttingen =  $\frac{1}{2}(a' - a)$  mit dem Gewicht  $\frac{4\alpha\alpha'}{\alpha + \alpha'}$ , und in Altona =  $\frac{1}{2}(b' - b)$  mit dem Gewicht  $\frac{4\beta\beta'}{\beta + \beta'}$ . Folgende Tafel enthält diese Werthe.

Stern.	Göttingen.		Altona.		Stern.	Göttingen.		Altona.	
	Coll. F.	Gew.	Coll. F.	Gew.		Coll. F.	Gew.	Coll. F.	Gew.
1	3,77''	8,89	1,58''	8,89	6	3,46''	12,00	2,35''	5,33
2	3,44	12,92	1,19	9,60	7	4,10	12,00	1,69	10,91
3	3,69	12,92	1,65	12,00	8	4,10	14,00	0,90	12,00
4	3,76	12,00	0,91	8,00	9	3,75	12,92	1,99	4,00
5	3,73	12,00	—	—	10	3,99	14,00	1,26	12,00

Stern.	Göttingen.		Altona.		Stern.	Göttingen.		Altona.	
	Coll. F.	Gew.	Coll. F.	Gew.		Coll. F.	Gew.	Coll. F.	Gew.
11	3,19"	12,92	1,39"	8,89	28	3,27"	10,91	0,95"	12,00
12	3,06	12,92	0,87	8,89	29	3,89	6,00	1,15	12,00
13	3,48	12,00	2,04	10,00	30	4,54	10,91	1,70	12,00
14	3,67	12,92	1,30	10,91	31	4,52	10,91	1,73	12,00
15	3,87	12,00	1,36	10,91	32	3,26	12,00	1,13	12,00
16	3,50	10,00	1,77	10,00	33	3,49	10,91	1,11	10,91
17	3,53	14,00	0,74	10,91	34	4,58	12,00	1,66	12,00
18	3,63	12,92	0,68	10,91	35	3,61	10,00	1,37	10,00
19	3,42	11,67	1,38	10,91	36	4,33	12,00	1,34	10,00
20	3,66	10,91	0,84	10,91	37	3,97	12,00	1,91	10,91
21	3,45	9,60	1,26	12,00	38	3,52	12,00	1,56	10,00
22	3,10	9,60	2,96	12,00	39	4,16	3,00	1,45	8,00
23	4,49	10,91	1,42	12,00	40	5,04	4,80	1,02	6,00
24	3,93	10,91	1,21	12,00	41	3,46	4,80	1,75	10,00
25	3,88	12,00	0,83	12,00	42	3,84	4,00	2,45	8,89
26	3,54	12,00	0,76	12,00	43	4,40	4,00	1,01	10,00
27	4,44	4,00	1,97	7,50					

Die Mittelwerthe sind folgende:

Collimationsfehler in Göttingen . 3,75" mit dem Gewicht 455,17  
 Collimationsfehler in Altona . . 1,40 mit dem Gewicht 432,18.

Die Realität der Veränderung des Collimationsfehlers ist offenbar, und es leidet keinen Zweifel, dass dieselbe auf dem obwohl mit aller möglichen Vorsicht geleiteten Transport eingetreten ist.

#### 4.

Obgleich man sich bei dem für den Breitenunterschied gefundenen Resultate vollkommen beruhigen kann, so ist es doch wenigstens in theoretischer Rücksicht nicht überflüssig zu bemerken, dass die im 1. Art. angewandte Combination der Beobachtungen noch nicht die möglich vortheilhafteste ist, insofern nicht an jedem Ort jeder Stern in der einen Lage des Sectors eben so oft beobachtet ist, wie in der andern. In der That hat die Bestimmung der wahren Zenithdistanz in Göttingen durch die Formel  $\frac{1}{2}(a + a')$

das Gewicht  $\frac{4\alpha\alpha'}{\alpha + \alpha'}$ ; wäre nun der Collimationsfehler in Göttingen genau bekannt und  $= f$ , so würde die Bestimmung der wahren Zenithdistanz daselbst durch die Formel

$$\frac{\alpha(a + f) + \alpha'(a' - f)}{\alpha + \alpha'}$$

das Gewicht  $\alpha + \alpha' = \frac{4\alpha\alpha'}{\alpha + \alpha'} + \frac{(\alpha - \alpha')^2}{\alpha + \alpha'}$  haben, d. i. ein grösseres als nach der anderen Methode, so oft  $\alpha$  und  $\alpha'$  ungleich sind. Ebenso verhält es sich mit der wahren Zenithdistanz in Altona, und auf diese Art würden selbst einseitige Beobachtungen (wie die von Nr. 5) einen, wenn auch nur geringen, Beitrag zur Vergrößerung der Genauigkeit geben. Nun sind zwar die Collimationsfehler an beiden Plätzen nicht mit absoluter Schärfe bekannt: allein man überzeugt sich leicht, dass die Anwendung der für dieselben gefundenen Mittelwerthe das Gewicht nur ganz unbedeutend vermindert.

## 5.

Will man jedoch ein reines, den Forderungen der strengen Theorie ganz Genüge leistendes Resultat erhalten, so muss man die Bestimmung des Breitenunterschiedes, der Collimationsfehler, und der wahren Zenithdistanzen der einzelnen Sterne an dem einen Ort als ein Problem behandeln, wo diese unbekanntes Grössen (in unserem Fall 46 an der Zahl) aus den sämtlichen durch sie bestimmten beobachteten Grössen (171) durch eben so viele Gleichungen abgeleitet werden müssen, indem diese nach den Vorschriften der Wahrscheinlichkeitsrechnung combinirt werden. Setzt man die Collimationsfehler in Göttingen und Altona  $= f$  und  $g$ , den Breitenunterschied  $= h$ , die wahre Zenithdistanz eines Sterns in Göttingen  $= k$ , so hat man aus den Beobachtungen dieses Sternes die vier Gleichungen, mit den Gewichten  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ :

$$\begin{aligned} a &= k - f \\ a' &= k + f \\ b &= k - g - h \\ b' &= k + g - h. \end{aligned}$$

Es ist kaum nöthig zu erinnern, dass es zur Erleichterung der Rechnung vortheilhafter ist, anstatt jener unbekanntes Grössen, die noch erforderlichen Correctionen einzuführen, welche an die

schon sehr nahe bestimmten Werthe anzubringen sind; lassen wir die Zeichen  $f^{\circ}$ ,  $g^{\circ}$ ,  $h^{\circ}$ ,  $k^{\circ}$  diese genäherten Werthe bedeuten, so mag man annehmen

$$k^{\circ} = \frac{\alpha(a + f^{\circ}) + \alpha'(a' - f^{\circ}) + \beta(b + g^{\circ} + h^{\circ}) + \beta'(b' - g^{\circ} + h^{\circ})}{\alpha + \alpha' + \beta + \beta'}$$

Bei Befolgung jener Vorschrift (welche man bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf nur etwas zusammengesetzte Fälle niemals aus den Augen setzen sollte) und dem Gebrauch einer schicklichen indirekten Auflösungs-methode verwandelt sich eine Arbeit, die ohne jene und bei direkter Elimination unerträglich weitläufig ausfällt, in ein leichtes Spiel.

## 6.

Der Erfolg dieser Rechnung, welche ausführlich herzusetzen unnöthig wäre, ist, dass die früheren Bestimmungen gar keine merkliche Correction erhalten. Es findet sich die Verbesserung des Breitenunterschiedes =  $-0,014''$ , die Verbesserung des Collimationsfehlers in Göttingen =  $+0,012''$ , die Verbesserung des Collimationsfehlers in Altona =  $-0,014''$ ; folglich die neuen Bestimmungen

Breitenunterschied . . . . .	$2^{\circ} 0' 56,51''$ ,	Gewicht =	217,67
Collimationsfehler in Göttingen . . . . .	3,76	„	457,03
Collimationsfehler in Altona . . . . .	1,39	„	437,64

Die Veränderungen der nach der Vorschrift des vorhergehenden Artikels zu Grunde gelegten wahren Zenithdistanzen der einzelnen Sterne in Göttingen sind gleichfalls fast alle unter  $0,01''$ . Die sich ergebenden Werthe hier anzuführen, wäre überflüssig, da es dieselben sind, aus welchen die oben mitgetheilten Declinationen der Sterne unter Voraussetzung der Polhöhe des Beobachtungsplatzes  $51^{\circ} 31' 47,92''$  abgeleitet sind. Dagegen setzen wir die Unterschiede hier her, welche nach Substitution der gefundenen Werthe in den 171 Gleichungen übrig bleiben.

Stern.	Unter-schied.	Stern.	Unter-schied.	Stern.	Unter-schied.	Stern.	Unter-schied.
1	+ 0,07''	2	+ 0,56''	3	+ 0,48''	4	- 0,35''
	+ 0,09		- 0,08		+ 0,34		- 0,35
	- 0,26		- 0,12		- 0,70		+ 0,79
	+ 0,13		- 0,53		- 0,18		- 0,17

Stern.	Unter- schied.	Stern.	Unter- schied.	Stern.	Unter- schied.	Stern.	Unter- schied.
5	+ 0,03" — 0,03 — — 0,03	14	+ 0,40" + 0,21 — 0,29 — 0,48	23	— 0,80" + 0,67 — 0,03 + 0,03	32	+ 0,14" — 0,87 + 0,63 + 0,11
6	+ 0,62 + 0,03 — 1,95 — 0,02	15	— 0,04 + 0,19 — 0,04 — 0,11	24	— 0,17 + 0,18 + 0,16 — 0,20	33	+ 0,19 — 0,35 + 0,41 — 0,16
7	— 0,52 + 0,16 — 0,08 + 0,52	16	— 0,07 — 0,60 — 0,05 + 0,72	25	— 0,03 + 0,22 + 0,46 — 0,67	34	— 0,48 + 1,17 — 0,62 — 0,07
8	— 0,56 + 0,12 + 0,76 — 0,23	17	— 0,06 — 0,52 + 0,96 — 0,35	26	+ 0,90 + 0,46 — 0,06 — 1,32	35	— 0,08 — 0,37 + 0,25 + 0,21
9	— 0,06 — 0,09 — 0,23 + 0,97	18	— 0,23 — 0,49 + 1,09 — 0,34	27	— 0,14 + 1,22 — 0,71 + 0,46	36	— 0,14 + 1,02 — 0,47 — 0,58
10	— 0,71 — 0,25 + 0,70 + 0,44	19	+ 0,32 — 0,36 + 0,10 + 0,08	28	+ 0,46 — 0,53 + 0,52 — 0,36	37	+ 0,11 + 0,54 — 0,93 + 0,11
11	+ 0,12 — 1,03 + 0,72 + 0,71	20	— 0,06 — 0,26 + 0,66 — 0,44	29	— 0,80 — 0,53 + 0,58 + 0,10	38	+ 0,30 — 0,19 — 0,24 + 0,11
12	+ 0,52 — 0,87 + 0,80 — 0,24	21	— 0,22 — 0,85 + 0,63 + 0,37	30	— 0,83 + 0,74 — 0,21 + 0,42	39	+ 0,90 + 1,71 — 0,82 — 0,69
13	+ 0,87 + 0,30 — 1,35 — 0,04	22	+ 0,77 — 0,55 — 1,55 + 1,60	31	— 0,41 + 1,11 — 0,59 + 0,09	40	— 1,81 + 0,75 + 0,60 — 0,14

Stern.	Unter- schied.	Stern.	Unter- schied.	Stern.	Unter- schied.
41	+ 0,39"	42	+ 0,09"	43	- 0,42"
	- 0,21		+ 0,25		+ 0,86
	- 0,38		- 1,02		+ 0,29
	+ 0,35		+ 1,11		- 0,47

## 7.

Die Summe der Produkte aus den Quadraten dieser 171 Unterschiede in die entsprechende Anzahl der Beobachtungen findet sich = 292,8249. Nach dem bereits angeführten Lehrsatz (Theoria Comb. Observ. Art. 38.) hat man als genäherten Werth des mittleren Fehlers einer einfachen Beobachtung die Quadratwurzel aus dem Bruch zu betrachten, dessen Zähler jene Summe, und der Nenner der Ueberschuss der Anzahl der verglichenen Beobachtungsdata über die Anzahl der nach der Methode der kleinsten Quadrate daraus abgeleiteten unbekanntten Grössen ist, in unserem Falle  $171 - 46 = 125$ . Es findet sich hieraus jener mittlere Fehler =  $1,5308''$ , wenig von dem im 2. Art. gefundenen verschieden. Der mittlere in dem Endresultate für den Breitenunterschied zu befürchtende Fehler würde demnach sein

$$= \frac{1,5308''}{\sqrt{217,67}} = 0,1038''.$$

## 8.

Bei den bisherigen Rechnungen ist vorausgesetzt, dass alle den verschiedenen Beobachtungen anhängenden Fehler als völlig unabhängig von einander oder als rein zufällig betrachtet werden können. Diese Voraussetzung aber ist offenbar nicht ganz richtig, indem alle  $\alpha$  Beobachtungen, welche zu der Bestimmung eines  $a$  concurrirt haben, nach der Natur des Instrumentes sich auf einen und denselben Theilungspunkt beziehen, und also ausser den eigentlichen rein zufälligen Beobachtungsfehlern noch den Fehler der Theilung bei diesem Punkte involviren. Dasselbe gilt von  $a'$ ,  $b$  und  $b'$ . Die Theilungsfehler sind ihrerseits unbekanntte Grössen, die in Beziehung auf die einzelnen 171 Beobachtungsergebnisse auch als rein zufällig und von einander unabhängig betrachtet werden

mögen, da man die Fälle, wo verschiedene derselben sich auf einerlei Theilungspunkt bezogen haben, ihrer geringen Anzahl wegen ignoriren kann. Die Berücksichtigung dieses Umstandes macht nun eine Modification obiger Rechnungen nothwendig, obwohl am Ende in praktischer Rücksicht die Resultate gar nicht geändert werden.

Bezeichnet man den eigentlichen mittleren Beobachtungsfehler, der nur von zufälligen Ursachen mit Ausschluss der Theilungsfehler herrührt, mit  $m$ , und den mittleren Theilungsfehler mit  $\mu$ , so wird der vollständige mittlere Beobachtungsfehler  $= \sqrt{m^2 + \mu^2}$  zu setzen sein, und der mittlere Fehler eines Mittels aus  $\alpha$  Beobachtungen, die sich auf einerlei Theilungspunkt beziehen,

$$= \sqrt{\frac{m^2}{\alpha} + \mu^2},$$

oder wenn wir  $\mu^2 = m^2 \Theta$  setzen,

$$= m \sqrt{\frac{1}{\alpha} + \Theta}.$$

Insofern wir also das Gewicht einer Beobachtung, ohne Theilungsfehler, zur Einheit annehmen, wird das Gewicht von  $a$  nunmehr

$$= \frac{\alpha}{1 + \alpha \Theta}$$

sein, und ebenso die Gewichte von  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$  bezw.

$$= \frac{\alpha'}{1 + \alpha' \Theta}, \quad \frac{\beta}{1 + \beta \Theta}, \quad \frac{\beta'}{1 + \beta' \Theta}.$$

Bei der erstenen Combinationmethode wird man daher das Gewicht des Resultates für den Breitenunterschied aus den Beobachtungen eines Sternes, wenn man den vorigen Ausdruck

$$\frac{4}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'}} = p$$

setzt, jetzt

$$= \frac{p}{1 + p \Theta}$$

zu setzen, und nach Maassgabe dieser Gewichte aus den 42 Bestimmungen das Mittel zu nehmen haben. Bei der zweiten Combinationmethode hingegen hat man nur jeder der 171 Gleichungen

ein Gewicht beizulegen, welches durch eine der Formeln  $\frac{\alpha}{1 + \alpha\Theta}$  etc. bestimmt wird.

Offenbar kann eine Veränderung des Endresultates selbst sowohl, als des mittleren in demselben zu befürchtenden Fehlers nur dadurch eintreten, dass die neuen Gewichte den früheren nicht proportional sind. Bei der vorigen Methode waren nur die Resultate der zahlreicheren Beobachtungsreihen etwas zu viel bevorzugt; die Berücksichtigung der Theilungsfehler bringt ihre Gewichte der Gleichheit näher, desto mehr, je grösser die Theilungsfehler vorausgesetzt werden, so dass bei Beobachtungen mit einem Instrumente, wo die Theilungsfehler die eigentlichen Beobachtungsfehler sehr weit überwogen, man sich nur begnügen könnte, alle Bestimmungen als gleich zuverlässig zu betrachten.

## 9.

Die angezeigten Methoden haben also gar keine Schwierigkeit, sobald nur der Coefficient  $\Theta$  bekannt ist. Man kann zu einer genäherten Kenntniss desselben, auf welche es hier begreiflich nur ankommt, auf einem indirekten Wege gelangen.

Wir bemerken zuvörderst, dass die Beobachtungen selbst ein Mittel darbieten, den eigentlichen mittleren Beobachtungsfehler  $m$  mit sehr grosser Zuverlässigkeit zu bestimmen. In der That macht sich derselbe unabhängig von dem Theilungsfehler in den Unterschieden der einzelnen Werthe, aus denen jedes  $a$  (oder  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$ ) das Mittel ist, von einander oder von diesem Mittel, bemerkbar, und wenn  $\alpha$  sehr gross wäre, so würde die Summe der Quadrate dieser Unterschiede der einzelnen Werthe von  $a$  vom Mittel als eine genäherte Bestimmung von  $(\alpha - 1)m^2$  anzusehen sein. Eine solche einzelne Bestimmung kann nun zwar in unserem Fall, wo  $\alpha$  nie grösser als 7 ist, von dem richtigen Werthe sehr abweichen; allein die Summe aller 171 partiellen Summen (für alle  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$  und für alle Sterne) muss nach den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung von

$$\{\Sigma(\alpha - 1) + \Sigma(\alpha' - 1) + \Sigma(\beta - 1) + \Sigma(\beta' - 1)\}m^2,$$

in unserem Fall von  $728m^2$ , wenig verschieden sein. Wir haben jene Summe der 171 partiellen Summen

$$= 844,50$$

gefunden, woraus sich für  $m$  der sehr zuverlässige Werth

$$= 1,0770''$$

ergiebt, bedeutend kleiner als der im 2. und 7. Artikel gefundene. Es bestätigt sich also die Einwirkung der Theilungsfehler vollkommen, um derentwillen die früher herausgebrachten Zahlen kein reines Resultat geben konnten.

### 10.

In Ermangelung einer direkten Kenntniss des mittleren Theilungsfehlers kann man nun  $\Theta$  auf eine indirekte Art so bestimmen, dass beim Gebrauch der ersten Methode nach dem Verfahren des Art. 2., oder beim Gebrauch der zweiten Methode nach dem Verfahren des Art. 7., der mittlere Fehler einer Beobachtung, deren Gewicht als Einheit angenommen war, wiederum dem gefundenen Werthe von  $m$  gleich wird.

Es hat indessen nicht belohnend genug geschienen, solche Versuche so lange zu wiederholen, bis eine vollkommene Uebereinstimmung erreicht wäre. Vielmehr schien es hinreichend, nachdem durch anderweitige Betrachtungen erkannt war, dass der letzte Werth von  $\Theta$  nur wenig von 0,2 verschieden ausfallen könnte, diesen Werth bloss der ersten Combinationsmethode unterzulegen, woraus sich dann ergeben hat

$$\text{Breitenunterschied . . . . .} = 2^{\circ} 0' 56,50''$$

$$\text{Gewicht dieser Bestimmung . . .} = 104,29$$

Mittlerer Fehler einer Beobachtung, deren Gewicht

$$\text{die Einheit . . . . .} = 1,131'',$$

und daher der mittlere in obigem Endresultate zu befürchtende Fehler

$$= 0,1108''.$$

Die Anwendung der zweiten Combinationsmethode, mit demselben Werthe von  $\Theta$ , würde vermuthlich eine noch nähere Uebereinstimmung mit obigem Werthe von  $m$  hervorgebracht, das Endresultat für den Breitenunterschied vielleicht um 0,01'' vermindert, das Gewicht dieser Bestimmung gewiss etwas wenigens vergrößert haben; es wurde aber der Mühe nicht werth gehalten, deshalb diese Rechnung von neuem durchzuführen. Man kann sich also an

den gefundenen Breitenunterschied  $2^{\circ} 0' 56,50''$  halten, und dessen Fehler als wahrscheinlich zwischen den Grenzen  $\pm 0,07''$  enthalten ansehen.

## 11.

Wenn wir den obigen Werth von  $\Theta$  beibehalten, so ergiebt sich der mittlere Theilungsfehler  $= m \sqrt{\Theta} = 0,48''$ , daher der sogenannte wahrscheinliche Theilungsfehler der einzelnen Punkte  $= 0,32''$  gesetzt werden mag. Offenbar bezieht sich dies aber nur auf die unregelmässigen Theilungsfehler, oder auf die Abweichungen der einzelnen Punkte von einer fingirten sich diesen so genau wie möglich anschliessenden gleichförmigen Theilung, deren absolute Richtigkeit hierbei eigentlich gar nicht in Frage kommen konnte. Oder mit anderen Worten, das gefundene Resultat für den Breitenunterschied mit der ihm beigelegten Genauigkeit bezieht sich, streng genommen, nur auf mittlere Sectorgrade, und bleibt von der absoluten Richtigkeit derselben abhängig. Dem Astronomen bietet das Instrument gar kein selbständiges Mittel dar, diese zu prüfen. Wenn man indessen erwägt, dass die Endpunkte des Bogens von dem Künstler mit äusserster Sorgfalt niedergelegt sind, und dass hier nur von einem kleinen Theile des ganzen Bogens die Rede ist, so wird man zugeben müssen, dass die Unsicherheit des gefundenen Breitenunterschiedes aus dieser Quelle nur um ein sehr Geringes vergrössert werden kann. Eine Controlle für die absolute Richtigkeit der Theilung geben übrigens auch die von mir am *Reichenbach'schen* Meridiankreise beobachteten Zenithdistanzen derselben 43 Sterne, deren Unterschiede von den am Sector beobachteten, bei einer Anordnung nach den Declinationen, keine Spur von Regelmässigkeit zeigen.

## 12.

Der Platz des Mittelpunkts des Sectors in Göttingen war 1,060 Toisen nördlich und 7,595 Toisen östlich vom Centrum der Axe des *Reichenbach'schen* Meridiankreises; in Altona hingegen war der Mittelpunkt des Sectors 13,511 Toisen südlich und 2,578 westlich vom Mittelpunkt des dortigen Meridiankreises. Die Reduktion des Breitenunterschiedes der Sectorplätze auf den der Meridiankreise ist daher für Göttingen  $0,07''$  und für Altona  $0,85''$ , und folglich der Breitenunterschied der Sternwarten von Göttingen und Altona in Beziehung auf die Plätze der *Reichenbach'schen* Meridiankreise

$$= 2^{\circ} 0' 57,42''.$$

## 13.

Die absolute Polhöhe, welche den oben gegebenen aus den Zenithdistanzen abgeleiteten Declinationen der Sterne zu Grunde gelegt ist, beruht auf 89 Beobachtungen des Nordsterns, am *Reichenbach'schen* Meridiankreise, in beiden Culminationen, direkt und von einer Wasserfläche reflectirt. Da die Beobachtungen von 1824, welche den grössten Theil ausmachen, bisher noch nicht bekannt gemacht sind, so stelle ich hier sämmtliche Beobachtungen zusammen, und bemerke nur, dass meistens die direkte Einstellung beim Antritt an den zweiten, vierten (mittelsten), und sechsten Faden, die Einstellung des reflectirten Bildes hingegen beim Antritt an den ersten, dritten, fünften und siebenten Faden gemacht ist. Von diesen auf die Culminationszeit reducirten Zenithdistanzen, ist hier das Mittel angegeben, welches bloss von der Refraction nach *Bessel's* Tafeln befreit ist, also Collimationsfehler und Wirkung der Biegung des Fernrohrs noch einschliesst.

*Zenithdistanzen des Nordsterns.*

## 1820. Kreis im Osten.

Mai 13. Untere Culm.	{	Direct	319° 50' 20,73"	3 Beob.
		Reflectirt	220 5 3,94	4 "
" 13. Obere Culm.	{	Direct	323 8 41,51	1 "
		Reflectirt	216 46 44,31	1 "

## 1824. Kreis im Osten.

Apr. 20. Obere Culm.	{	Direct	323 7 52,62	1 "
		Reflectirt	216 48 54,93	2 "
" 21. Untere Culm.	{	Direct	319 52 30,27	3 "
		Reflectirt	220 4 19,32	4 "
" 21. Obere Culm.	{	Direct	323 7 54,16	3 "
		Reflectirt	216 48 54,21	4 "
" 25. Untere Culm.	{	Direct	319 52 30,03	3 "
		Reflectirt	220 4 21,10	4 "
" 27. Obere Culm.	{	Direct	323 7 55,70	3 "
		Reflectirt	216 48 52,93	4 "
" 28. Obere Culm.	{	Direct	323 7 55,40	3 "
		Reflectirt	216 48 52,22	4 "
" 29. Untere Culm.	{	Direct	319 52 29,17	3 "
		Reflectirt	220 4 21,34	4 "

Mai	1.	Untere Culm.	{	Direct	319° 52' 28,59"	3 Beob.
				Reflectirt	220 4 22,62	
"	1.	Obere Culm.	{	Direct	323 7 57,22	3 "
				Reflectirt	216 48 51,66	4 "

## 1824. Kreis in Westen.

Mai	2.	Untere Culm.	{	Direct	40 4 20,00	3 "
				Reflectirt	139 52 27,15	4 "
"	8.	Obere Culm.	{	Direct	36 48 49,32	3 "
				Reflectirt	143 7 57,63	4 "
"	9.	Untere Culm.	{	Direct	40 4 22,93	3 "
				Reflectirt	139 52 25,68	4 "

Die Aenderungen der Declination des Nordsterns ergeben sich aus *Bessel's* Tafeln wie folgt:

1820 von der unteren Culmination des 13. Mai an gerechnet:  
Mai 13. Obere Culm. — 0,10".

1824 von der oberen Culmination des 20. April an gerechnet:

April	21.	U. C.	— 0,13"
"	21.	O. C.	— 0,26
"	25.	U. C.	— 1,29
"	27.	O. C.	— 2,04
"	28.	O. C.	— 2,32
"	29.	U. C.	— 2,45
Mai	1.	U. C.	— 2,93
"	1.	O. C.	— 3,03
"	2.	U. C.	— 3,14
"	8.	O. C.	— 4,64
"	9.	U. C.	— 4,77 .

## 14.

Bezeichnet man die Biegung des Fernrohrs, oder die Veränderung der Lage der auf die Ebene des getheilten Kreises projectirten optischen Axe gegen die Eintheilung, vermöge der Einwirkung der Schwere auf sämmtliche verbundenen Bestandtheile des Instruments, bei horizontaler Lage der optischen Axe durch  $f$ , bei verticaler durch  $g$ , und setzt voraus, dass diese Biegung der Schwerkraft proportional ist (was bei der äusserst geringen Grösse der ganzen Wirkung unbedenklich scheint), so wird bei der Neigung

der optischen Axe  $z$  die Biegung durch  $f \sin z + g \cos z$  ausgedrückt werden, so verstanden, dass wenn der Collimationsfehler =  $e$  und die abgelesene Zenithdistanz =  $z$  ist, die wahre Zenithdistanz

$$= z - e + f \sin (z - e) + g \cos (z - e)$$

sein wird. Wäre das Fernrohr vollkommen symmetrisch, so würde  $g$  ganz wegfallen; allein da keine menschliche materielle Arbeit absolut vollkommen ist, und überdies die vollkommene Symmetrie schon durch die Balancirgewichte gewissermaassen gestört wird, so scheint es durchaus nicht ungereimt, die Möglichkeit eines ein oder ein paar Zehnthelle einer Secunde betragenden Werthes von  $g$  zuzugeben, und wenn einmal die Rechnung auf einzelne Zehnthelle oder gar Hunderttheile der Secunde genau geführt wird, so würde es inconsequent sein, die Berücksichtigung des zweiten Theiles der Biegung, insofern sie möglich ist, zu unterlassen.

## 15.

Das Complement des halben Unterschiedes der direkt und durch Reflexion gemessenen Zenithdistanz zu  $90^\circ$  giebt die Zenithdistanz vom Collimationsfehler und von dem ersten Theile der Biegung befreit, also bloss noch den zweiten Theil der Biegung enthaltend, und zwar mit entgegengesetztem Zeichen, nachdem der Kreis im Osten oder Westen ist. Offenbar bezieht sich diese Zenithdistanz auf die Verticale an der Stelle, wo die optische Axe das Wassergefäss trifft, welche, für beide Culminationen des Nordsterns unmerklich verschieden, um  $0,05''$  nördlicher ist als die Axe des Kreises. Diese Combination ist unserem Zwecke auch insofern angemessener, als man der Voraussetzung der Unveränderlichkeit des Collimationsfehlers während der ganzen Dauer der Beobachtungen von 1824 ausweicht. Das Gewicht jener Bestimmung wird, wenn man die Anzahl der direkten Beobachtungen =  $\alpha$ , die der Reflexionsbeobachtungen =  $\beta$  setzt, =  $\frac{4\alpha\beta}{\alpha + \beta}$ , insofern man die Beobachtungsfehler als rein zufällig und von einander unabhängig betrachtet.

## 16.

Bezeichnen wir nun mit

$\varphi$  die Polhöhe an dem Platz des Wassergefässes

$\delta$  die Declination des Nordsterns in der unteren Culmination  
des 13. Mai 1820

$\delta'$  die Declination in der oberen Culmination des 20. April 1824,

so geben uns die Beobachtungen folgende Bestimmungen:

für $\delta + \varphi - 0,765 g$	1820 Mai 13 . . .	139° 52' 38,40"	, Gewicht	6,86
für $\delta - \varphi + 0,800 g$	1820 Mai 13 . . .	36 49 1,50	, Gewicht	2,00
für $\delta' + \varphi - 0,765 g$	1824 Apr. 21 . . .	139 54 5,61	, Gewicht	6,86
	„ 25 . . .	139 54 5,76	„	6,86
	„ 29 . . .	139 54 6,36	„	6,86
	Mai 1 . . .	139 54 5,91	„	6,86
für $\delta' - \varphi + 0,800 g$	1824 Apr. 20 . . .	36 50 31,15	, Gewicht	2,67
	„ 21 . . .	36 50 30,29	„	6,86
	„ 27 . . .	36 50 30,65	„	6,86
	„ 28 . . .	36 50 30,73	„	6,86
	Mai 1 . . .	36 50 30,25	„	6,86
für $\delta' + \varphi + 0,765 g$	1824 Mai 2 . . .	139 54 6,71	, Gewicht	6,86
	„ 9 . . .	139 54 6,15	„	6,86
für $\delta' - \varphi - 0,800 g$	1824 Mai 8 . . .	36 50 30,48	, Gewicht	6,86 .

Wir erhalten demnach zur Bestimmung der vier unbekanntnen Grössen  $\delta$ ,  $\delta'$ ,  $\varphi$ ,  $g$  die sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned} \delta + \varphi - 0,765 g &= 139^\circ 52' 38,40'', \text{ Gewicht } 6,86 \\ \delta - \varphi + 0,800 g &= 36 49 1,50 \quad \text{„} \quad 2,00 \\ \delta' + \varphi - 0,765 g &= 139 54 5,91 \quad \text{„} \quad 27,43 \\ \delta' - \varphi + 0,800 g &= 36 50 30,54 \quad \text{„} \quad 30,10 \\ \delta' + \varphi + 0,765 g &= 139 54 6,43 \quad \text{„} \quad 13,71 \\ \delta' - \varphi - 0,800 g &= 36 50 30,48 \quad \text{„} \quad 6,86, \end{aligned}$$

woraus sich durch die Methode der kleinsten Quadrate\*) folgende Werthe ergeben:

\*) Hier etwas bequemer nach dem Verfahren im Supplem. Theor. Comb. Observ.

$$\begin{aligned}\delta &= 88^{\circ} 20' 50,33'' \\ \delta' &= 88 22 18,28 \\ \varphi &= 51 31 47,90 \\ g &= \quad \quad + 0,17.\end{aligned}$$

Das Gewicht der Bestimmung von  $\varphi$  wird hierbei = 60,8.

Um für die Genauigkeit der Beobachtungen einigermaassen einen Maassstab zu haben, substituiren wir diese Werthe in die vierzehn Gleichungen, aus welchen die vorigen sechs zusammgezogen waren; es bleiben dann folgende Fehler übrig:

Fehler	Gewicht der Gleichung
- 0,31''	6,86
+ 1,07	2,00
+ 0,44	6,86
+ 0,29	6,86
- 0,31	6,86
+ 0,14	6,86
- 0,63	2,67
+ 0,23	6,86
- 0,13	6,86
- 0,21	6,86
+ 0,27	6,86
- 0,40	6,86
+ 0,16	6,86
- 0,23	6,86.

Die Summe der Produkte der Quadrate dieser Fehler in die Gewichte wird = 9,6184; also ein genäherter Werth für den mittleren Fehler einer Beobachtung

$$= \sqrt{\frac{9,6184}{10}} = 0,981''.$$

Der mittlere in dem Endresultat für die Polhöhe zu befürchtende Fehler, so weit er von unregelmässig wirkenden Ursachen herrührt, ist demnach

$$= \frac{0,981''}{\sqrt{60,8}} = 0,126''.$$

Etwas muss aber die Unsicherheit des Resultates allerdings grösser sein, da die Voraussetzung, dass sämtliche Beobachtungs-

fehler ohne Ordnung von einander unabhängig sind, nicht ganz richtig ist. Bei gleichnamigen Beobachtungen zu einer Culmination, und bei den gleichnamigen Culminationen an mehreren Tagen liegt nämlich nahe dasselbe Ablesungsergebnis zu Grunde, und obgleich, bei der Ablesung durch Verniers, fast immer andere Theilstriche sprechend werden, deren unregelmässige Theilungsfehler also bei unserem Verfahren in dem mittleren Fehler einer Beobachtung  $0,981''$  mit eingeschlossen sind, so ist doch natürlich, dass in den verschiedenen Gegenden des Limbus gewisse ungleiche Durchschnittsfehler vorherrschen müssen. Jedenfalls sind aber dieselben sehr klein. Im Jahre 1826 habe ich mit vier vortrefflichen Mikroskopen von *Repsold* 30 Theilstriche von 12 zu 12 Grad mit äusserster Sorgfalt geprüft, wobei jeder Theilstrich fast 200 mal, in abgeänderten Combinationen, eingestellt wurde. Das Resultat ist, dass das Mittel der Fehler von zwei diametral entgegengesetzten Theilstrichen,  $A$  und  $A + 180^\circ$ , soweit noch einige Regelmässigkeit zu erkennen ist, durch die Formel

$$-1,23'' \cos(2A - 28^\circ 28') - 0,22'' \cos(4A - 47^\circ 56')$$

möglichst nahe dargestellt wird, dass die dann übrig bleibenden Fehler als regellos erscheinen, und die Quadratwurzel aus dem Mittel ihrer Quadrate  $= 0,32''$  wird. Ich hatte mir vorgesetzt, diese Prüfung auf die doppelte Anzahl der Theilstriche auszudehnen; allein bei der Geringfügigkeit der sich ergebenden Resultate scheint diese Untersuchung den grossen dazu erforderlichen Zeitaufwand nicht zu verdienen. Es bedarf keiner Erinnerung, dass der erste Theil des regelmässigen Fehlers  $-1,23'' \cos(2A - 28^\circ 28')$  von selbst wegfällt, wenn, wie bei obigen Beobachtungen immer geschehen ist, alle vier Verniers abgelesen werden. Er enthält hingegen eine reelle Verbesserung, falls man die Theilung nur an zwei gegenüberliegenden Stellen abliest, wie ich gegenwärtig immer thue, seitdem ich mich mit bedeutendem Gewinn für die Feinheit der Ablesung, statt der Verniers zweier *Repsold'scher* Mikroskope bediene.

## 17.

Zieht man vor,  $g = 0$  vorauszusetzen, so fällt die Polhöhe um  $0,07''$  kleiner aus, und das Gewicht dieser Bestimmung wird  $= 84,1$ . Anderweitige, an einem anderen Orte anzuführende Beobachtungen scheinen übrigens den obigen Werth von  $g$ , dem Zeichen und auch sehr nahe der Grösse nach, zu bestätigen, reichen

aber noch nicht hin, über einen so delicatesn Gegenstand zu entscheiden.

Den Coefficienten  $f$  kann man aus vorliegenden Beobachtungen nicht bestimmen, ohne die Unveränderlichkeit des Collimationsfehlers während der Beobachtungen von 1824 vorauszusetzen. Erlaubt man sich diese Voraussetzung, so hat man 28 Gleichungen, deren gehörige Behandlung

$$\begin{aligned} \varphi &= 51^\circ 31' 47,89'' \text{ mit dem Gewicht } 60,9 \\ f &= \quad \quad + 0,76 \\ g &= \quad \quad + 0,23 \end{aligned}$$

giebt. Da man gegenwärtig, durch Einstellen des Fernrohrs auf den Nadirpunkt, den Collimationsfehler jede Stunde mit bewundernswürdiger Genauigkeit ohne Umlegen bestimmen kann\*), so behalte ich mir weitere Prüfung dieses Gegenstandes vor.

## 18.

Mit Vorbehalt der durch künftige weitere Untersuchungen noch auszumittelnden Correction, die wohl schwerlich eine halbe Secunde erreichen kann, setze ich daher die Polhöhe

in Göttingen

für den Platz des Wassergefäßes bei den Nordsternbeobachtungen . . . . .	51° 31' 47,90"
für den Platz des <i>Reichenbach'schen</i> Meridiankreises . . . . .	47,85
für den Platz des Zenithsectors . . . . .	47,92
(welche letztere zur Reduktion der Declinationen der Zenithsterne zu Grunde gelegt ist)	

in Altona

für den Platz des Zenithsectors . . . . .	53° 32' 44,42"
für den Platz des Meridiankreises . . . . .	45,27.

## 19.

Nach der trigonometrischen Verbindung der Sternwarten von Göttingen und Altona liegt letztere

115163,725 Toisen nördlich  
7,211 Toisen westlich

\*) Ich bediene mich dieses unschätzbaren Mittels, dessen Ausführbarkeit *Bohnenberger* zuerst gezeigt hat, seit zwei Jahren beständig.

von jener. Diese Zahlen beziehen sich auf die Plätze der Meridiankreise; sie gründen sich auf den Werth der Dreiecksseite Hamburg—Hohenhorn 13841,815 Toisen, und diese auf die von Herrn Prof. *Schumacher* in Holstein im Jahre 1820 gemessene Basis. Da jedoch die Vergleichung der dabei gebrauchten Messstangen mit der Normaltoise noch nicht definitiv vollendet ist, so wird obige Entfernung in Zukunft noch in demselben Verhältniss abzuändern sein, wie die Basis selbst, welche Veränderung aber jedenfalls nur sehr gering sein kann. Der mittlere Breitengrad zwischen beiden Sternwarten ergibt sich danach

$$= 57127,2 \text{ Toisen,}$$

merklich grösser, als man nach den mittleren Werthen der in Frankreich und England gemessenen Grade hätte erwarten sollen.

## 20.

Die hannoversche Gradmessung liefert also einen neuen Beitrag zur Bestätigung der nicht mehr zu bezweifelnden Wahrheit, dass die Oberfläche der Erde keine ganz regelmässige Gestalt hat. Von dieser Unregelmässigkeit haben bereits die Anomalien bei den Theilen der französischen und der englischen Gradmessung Beweise gegeben, noch stärkere die Anomalien bei den Polhöhen mehrerer Oerter in Italien. Bei der hannoverschen Gradmessung findet sich ausser der Anomalie zwischen Göttingen und Altona eine noch beträchtlich stärkere bei einem zwischenliegenden Dreieckspunkte, dem Brocken. Wenn man meine Dreiecke als auf der Oberfläche eines elliptischen Sphäroids liegend, dessen Dimensionen die von *Walbeck* aus der Gesammtheit der bisherigen Gradmessungen abgeleiteten sind, und welches nach unserer besten gegenwärtigen Kenntniss sich am vollkommensten an die wirkliche Gestalt im Ganzen anschliesst (Abplattung  $\frac{1}{302,78}$ , der dreihundertsechzigste Theil des Erdmeridians = 57009,758 Toisen), berechnet, und dabei von der Polhöhe von Göttingen =  $51^{\circ} 31' 47,85''$  ausgeht, so findet sich die Breite

$$\begin{aligned} \text{des Brockens} &= 51^{\circ} 48' 1,85'' \\ \text{von Altona} &= 53 \quad 32 \quad 50,79. \end{aligned}$$

Während nun die astronomischen Beobachtungen die Polhöhe von Altona  $5,52''$  kleiner gegeben haben, geben die von Herrn *von Zach* auf dem Brocken angestellten Beobachtungen die Polhöhe

dieses Punktes 10" bis 11" *grösser*\*), ein Unterschied, von dem doch jedenfalls nur ein kleiner Theil dem Instrumente und den in der Rechnung gebrauchten Declinationen zur Last fallen kann. Die Vergleichung des Breitenunterschiedes zwischen Altona und dem Brocken mit der Krümmung, welche dem sich der Erde im Ganzen am besten anschliessenden Sphäroid entspricht, würde daher eine Abweichung von 16" geben.

Nach unserem Dafürhalten betrachtet man diesen Gegenstand aus einem falschen Gesichtspunkte, wenn man bei solchen Erscheinungen immer nur von Localablenkungen der Lothlinie spricht, und sie also gleichsam nur als einzelne Ausnahmen ansieht. Was wir im geometrischen Sinn Oberfläche der Erde nennen, ist nichts anderes als diejenige Fläche, welche überall die Richtung der Schwere senkrecht schneidet, und von der die Oberfläche des Weltmeeres einen Theil ausmacht. Die Richtung der Schwere an jedem Punkte wird aber durch die Gestalt des festen Theils der Erde und seine ungleiche Dichtigkeit bestimmt, und an der äusseren Rinde der Erde, von der allein wir etwas wissen, zeigt sich diese Gestalt und Dichtigkeit als höchst unregelmässig; die Unregelmässigkeit der Dichtigkeit mag sich leicht noch ziemlich tief unter die äussere Rinde erstrecken, und entzieht sich ganz unseren Berechnungen, zu welchen fast alle Data fehlen. Die geometrische Oberfläche ist das Produkt der Gesamtwirkung dieser ungleich vertheilten Elemente, und anstatt vorkommende unzweideutige Beweise der Unregelmässigkeit befremdend zu finden, scheint es eher zu bewundern, dass sie nicht noch grösser ist. Wären die astronomischen Beobachtungen einer zehn- oder hundertmal grösseren Genauigkeit fähig, als sie gegenwärtig haben, so würden sie diese Unregelmässigkeit ohne Zweifel überall nachweisen.

Bei dieser Lage der Sache hindert aber noch nichts, die Erde im Ganzen als ein Revolutionssphäroid zu betrachten, von dem die wirkliche (geometrische) Oberfläche überall bald in stärkeren, bald in schwächeren, bald in kürzeren, bald in längeren Undulationen abweicht. Wäre es möglich, die ganze Erde mit *einem* trigonometrischen Netze gleichsam zu umspinnen, und die gegenseitige Lage aller Punkte dadurch zu berechnen, so würde das idealische

---

\*) *Monatl. Corresp.* B. X, S. 203. An einem Platze, der etwa 0,5" südlicher liegt, als der Dreieckspunkt, fand dieser geschickte Beobachter aus 188 Beobachtungen von  $\alpha$  Aquilae  $51^{\circ} 48' 12,12''$ . Aus Sonnenbeobachtungen fand er  $51^{\circ} 48' 11,17''$ .

Revolutionssphäroid dasjenige sein, auf welchem berechnet die Richtungen der Verticalen die möglich beste Uebereinstimmung mit den astronomischen Beobachtungen gäben. Wenn man gleich von diesem unerreichen Ideale immer weit entfernt bleiben wird, so leidet es doch keinen Zweifel, dass die künftigen Jahrhunderte die mathematische Kenntniss der Erdfigur sehr viel werden weiter bringen können. Die Vervielfältigung der Gradmessungen ist aber eigentlich nur der Anfang dazu, woraus nur einzelne Resultate für eine kleine Anzahl in isolirten Linien liegender Punkte hervorgehen; wie viel ergiebiger wird aber die Ausbeute sein, wenn diejenigen trigonometrischen Operationen, welche mit ausgesuchten Hilfsmitteln in verschiedenen Ländern ausgeführt sind, in Verknüpfung kommen und sich zu *einem* grossen System abrunden. Vielleicht ist die Aussicht nicht chimärisch, dass einst alle Sternwarten von Europa trigonometrisch unter einander verbunden sein werden, da schon jetzt solche Verbindungen von Schottland bis zum adriatischen Meere und von Formentera bis Fühnen vorhanden, wenngleich bisher nur theilweise öffentlich bekannt gemacht sind. Möchte nur dieser letzte Umstand mehr als bisher geschehen, beachtet, und kostbare Materialien, die der wissenschaftlichen Welt angehören sollten, dieser nicht entzogen, oder gar der Gefahr des Unterganges preisgegeben werden!

## 21.

Ein nicht uninteressantes Resultat giebt noch die Vergleichung der aus den Sectorbeobachtungen hervorgegangenen Sterndeclinationen mit älteren Bestimmungen, wo solche vorhanden sind. Von unseren 43 Sternen finden sich 27 in *Piazzi's* und 13 in *Bessel's* *Bradley'schem* Catalog. Hier folgt die Vergleichung unserer Bestimmungen (1827), mit den *Bradley'schen* (1755) und *Piazzi'schen* (1800), nach *Bessel's* neuer Bestimmung der Präcession reducirt; positive Zeichen bedeuten eine nördlichere Stellung aus unserer Bestimmung.

Bezeichnung.		Bradley.	Piazz.	Bezeichnung.		Bradley.	Piazz.
1	24 Canum	+ 0,2"	+ 1,1"	17	P. 15. 39	—	— 0,7"
2	83 Ursae	— 1,5	— 2,0	25	☉ Draconis	+23,5"	+ 8,6
3	η Ursae	— 2,4	— 2,3	27	P. 16. 33	—	— 2,6
4	86 Ursae	— 5,4	— 0,8	28	P. 16. 56	—	— 2,6
6	P. 13. 289	—	— 1,3	32	16 Draconis	+ 1,2	— 3,7
7	13 Bootis	+ 1,4	+ 2,4	36	P. 16. 253	—	— 2,1
8	α Bootis sq.	— 2,9	— 2,2	37	P. 16. 291	—	+10,3
9	P. 14. 56	—	— 0,4	38	P. 16. 310	—	— 4,9
10	☉ Bootis	—30,6	—10,8	39	P. 17. 20	—	— 3,0
11	P. 14. 131	—	+ 7,4	40	P. 17. 38	—	— 2,9
12	P. 14. 164	—	+ 0,1	41	74 Herculis	+ 1,7	+ 0,7
13	39 Bootis med.	+ 4,8	+ 2,7	42	P. 17. 120	—	— 2,1
14	P. 14. 235	—	— 5,0	43	β Draconis	— 0,5	— 1,5
15	44 Bootis med.	+ 1,9	+ 1,1				

#### IV. Breitenbestimmung der Sternwarte Seeberg.

Gleichzeitig mit meinen Beobachtungen in Göttingen und Altona wurden dieselben Sterne auf meine Aufforderung auch von Herrn *Hansen*, Director der Sternwarte Seeberg bei Gotha, an dem dortigen *Ertel'schen* zweifüssigen Meridiankreise beobachtet. Der sich daraus ergebende Breitenunterschied zwischen dieser und der Göttinger Sternwarte erhält ein noch erhöhtes Interesse durch den Umstand, dass erstere vermittelt einiger unter Leitung des Herrn Generallieutenants *von Müffling* gemessener Dreiecke mit dem hannoverschen Dreieckssystem verbunden ist.

Der Kreis wurde während der Beobachtungen einigemal umgelegt, allein die Bestimmung des Collimationsfehlers wurde unabhängig davon jeden Tag, und meistens jeden Tag zweimal, durch Einstellung auf den Nadirpunkt gemacht, welches schon oben erwähnte Verfahren Herr *Hansen* im Herbst 1826 auf hiesiger Sternwarte praktisch kennen gelernt hatte. Die Ablesung geschah nicht mit Verniers, sondern mit Mikroskopen. Folgende Uebersicht enthält die Hauptresultate dieser Beobachtungen, indem die erste Columne die Bezeichnung des Sterns, die zweite die Lage des Kreises, die dritte die Anzahl der Beobachtungen, die vierte die von mir auf den Anfang des Jahres 1827 reducirte Zenithdistanz

(nördliche mit positiven Zeichen), die fünfte die Breite, welche aus den oben, S. 155/156, mitgetheilten Declinationen sich ergibt, darstellt:

1	Ost	5	-1° 1' 53,14"	50° 56' 4,76"	16	Ost	5	-1° 42' 19,87"	50° 56' 6,55"
	West	4	52,80	4,42		West	5	17,05	3,73
2	Ost	5	+4 37 29,41	5,57	17	Ost	5	+0 38 48,22	5,50
	West	6	30,86	4,12		West	5	48,79	4,93
3	Ost	5	-0 45 19,00	5,20	18	Ost	5	+1 38 59,63	6,24
	West	7	17,70	3,90		West	6	61,51	4,36
4	Ost	6	+3 38 50,38	5,17	19	West	2	+3 41 30,38	4,49
	West	6	51,05	4,50	20	Ost	1	+3 33 50,19	4,11
5	Ost	6	+4 29 54,35	4,87		West	1	47,87	6,43
	West	6	54,30	4,92	21	Ost	1	+1 58 31,74	5,35
6	Ost	6	-4 20 26,87	6,01		West	1	32,90	4,19
	West	4	25,92	5,06	22	Ost	1	-4 39 61,37	6,07
7	Ost	6	-0 39 22,12	5,56		West	1	58,90	3,60
	West	4	20,70	4,14	23	Ost	1	+5 24 21,09	5,91
8	Ost	5	+1 40 1,41	6,06		West	1	22,88	4,12
	West	4	3,24	4,23	24	West	1	-0 33 26,54	5,95
9	Ost	5	+5 17 29,69	6,82	25	West	1	+8 5 40,64	6,50
	West	4	33,72	2,79	26	West	1	-0 17 51,91	5,03
10	Ost	5	+1 43 6,51	5,54	27	West	1	-4 35 46,53	3,57
	West	5	8,63	3,42	28	West	1	+2 44 9,48	3,93
11	Ost	5	+2 43 27,76	5,26	29	West	1	+1 31 5,78	5,28
	West	4	28,89	4,13	30	West	2	+4 40 0,22	4,51
12	Ost	5	+2 2 48,89	6,77	31	West	1	-4 57 58,28	4,13
	West	3	50,29	5,37	32	West	1	+2 18 59,76	3,88
13	Ost	5	-1 29 56,73	6,19	33	West	1	-0 39 51,61	5,28
	West	5	56,64	6,10	34	West	1	+6 9 34,85	2,94
14	Ost	5	-0 35 42,51	5,00	35	West	1	-3 59 15,56	4,09
	West	3	42,84	5,33	36	West	2	-4 6 42,83	4,84
15	Ost	5	-2 36 14,46	6,93	37	West	1	+6 0 36,97	5,38
	West	4	12,88	5,35	38	West	1	-1 53 16,75	3,84

Diese sechzig Resultate für die Breite haben nun freilich ungleiche Zuverlässigkeit; allein um die ihnen beizulegenden Gewichte ohne Willkür angeben zu können, müsste das Verhältniss des mittleren eigentlichen Beobachtungsfehlers zum mittleren Theilungsfehler bekannt sein; ist dies Verhältniss wie 1 zu  $\sqrt{\Theta}$ , so wird, wenn man die geringe den Declinationen noch anhängende Unsicherheit nicht beachtet,

$$\frac{n}{1 + n\Theta}$$

das Gewicht einer auf  $n$  Beobachtungen, die sich auf einerlei Theilstrich beziehen, beruhenden Bestimmung sein.

Nimmt man statt dieses Gewichts schlechthin  $n$  an, so wird das Mittel aus den 206 Beobachtungen

$$= 50^{\circ} 56' 5,16''.$$

Inzwischen lassen die Beobachtungen erkennen, dass die Theilungsfehler vergleichungsweise beträchtlich grösser sein müssen, als an dem *Ramsden'schen* Zenithsector, während die eigentlichen Beobachtungsfehler eher noch etwas kleiner sein mögen. Bei jenem Verfahren werden also die auf einer grösseren Anzahl von Beobachtungen beruhenden Bestimmungen vor denen, welchen nur eine oder zwei zu Grunde liegen, viel zu sehr bevorzugt.

Sobald man aber den Einfluss der Theilungsfehler berücksichtigen will, darf auch nicht unbeachtet bleiben, dass die jedesmalige Bestimmung des Collimationsfehlers einen constanten von den Fehlern der dabei sprechenden Theilstriche abhängenden Theil involvirt. Es ist aber klar, dass derselbe auf die Polhöhe in entgegengesetztem Sinn wirkt, jenachdem der Kreis östlich oder westlich sich befindet. Man wird daher die auf die verschiedenen Lagen des Kreises sich beziehenden Beobachtungen von einander trennen, aus jeder Reihe, mit Anwendung des Gewichts  $\frac{n}{1+n\Theta}$  für jede Bestimmung, das Mittel berechnen, und zuletzt aus diesen beiden Mitteln das einfache arithmetische Mittel nehmen müssen.

In Ermangelung einer bestimmten Kenntniss von  $\Theta$ , ist diese Rechnung in den drei Hypothesen  $\Theta = 0$ ,  $\Theta = 1$ ,  $\Theta = \infty$  geführt, woraus sich für die Polhöhe ergeben hat:

	$\Theta = 0$	$\Theta = 1$	$\Theta = \infty$
Kreis Ost	50° 56' 5,75''	50° 56' 5,69''	50° 56' 5,71''
Kreis West	4,62	4,65	4,65
Polhöhe	50° 56' 5,18''	50° 56' 5,17''	50° 56' 5,18''

Man sieht also, dass die Berücksichtigung der strengeren Grundsätze das erste Resultat gar nicht merklich ändert, und dass man sich an die Zahl 50° 56' 5,17'' halten kann.

Bei diesen Rechnungen ist auf die Biegung des Fernrohrs noch keine Rücksicht genommen. Nach Herrn *Hansen's* Angabe ist dieselbe im Horizont = 1,00'', und zwar von der beobachteten Zenithdistanz abzuziehen, oder nach unserer Bezeichnung  $f = -1,00''$ .

Man sieht, dass bei Berücksichtigung dieser Biegung die Polhöhe aus den nördlich vom Zenith culminirenden Sternen etwas grösser, aus den südlichen kleiner ausfallen, und, weil jene etwas überwiegen, das Mittelresultat um  $0,02''$  vergrössert werden wird. Der zweite Theil der Biegung, oder die Biegung bei verticaler Stellung, kann, da alle hier vorkommenden Zenithdistanzen nur klein sind, als eine constante Veränderung des Collimationsfehlers betrachtet werden, und wird also bei unserem Verfahren gerade ebenso, wie die Theilungsfehler der bei der Bestimmung von jenem sprechenden Theilstriche, von selbst eliminirt.

Wir haben demnach als Definitivwerth für die Polhöhe aus diesen Beobachtungen

$$50^{\circ} 56' 5,19''.$$

Die erwähnte trigonometrische Verbindung der beiden Sternwarten, nach den oben angeführten Dimensionen des Erdsphäroids berechnet, giebt den Breitenunterschied

$$35' 41,86'',$$

also mit der oben bestimmten Polhöhe von Göttingen, die der Seeberger Sternwarte

$$= 50^{\circ} 56' 5,99''.$$

Diese bezieht sich auf den Dreieckspunkt, nämlich das Centrum der Axe des Mittagsfernrohrs; das Centrum der Axe des Meridiankreises liegt  $1,168$  Toisen, oder im Bogen  $0,07''$  südlicher; die Polhöhe des letzteren Punktes ist also, aus Göttingen durch die trigonometrische Verbindung abgeleitet,

$$= 50^{\circ} 56' 5,92''$$

oder  $0,73''$  grösser, als aus den astronomischen Beobachtungen.

Für den Längenunterschied folgt übrigens aus der trigonometrischen Verbindung  $47' 9,20''$  im Bogen, oder  $3^m 8,61^s$  in Zeit, sehr gut mit unserer Kenntniss aus astronomischen Beobachtungen übereinstimmend. Endlich folgt aus jenen Messungen das Azimuth der Dreiecksseite Seeberg—südliches Meridianzeichen bei Schwabhausen  $4,6''$  westlich, welches gleichfalls bei der nicht unbeträchtlichen Anzahl der Zwischenpunkte, den Verschiedenheiten, die in den Angaben einiger Winkel der preussischen Messung vorkommen, und der Ungewissheit, ob der Dreieckspunkt sich genau im Meridian befand, wie eine gute Uebereinstimmung betrachtet werden kann.

## Zusatz zu Artikel 20., S. 180.

*Walbeck's* Bestimmung der Dimensionen des Erdsphäroids befindet sich in einer kleinen Abhandlung: *De forma et magnitudine telluris, ex dimensis arcubus meridiani, definiendis*, wovon aber nur die zwei ersten Bogen im Druck erschienen sind (Abo, 1819). *Walbeck* hat die peruanische, die beiden ostindischen, die französische, englische und die neuere lappländische Gradmessung dem Calcül unterworfen, und ist meines Wissens bisher der einzige, der dieses Geschäft nach richtigen willkürfreien Grundsätzen ausgeführt hat. Inzwischen hat er bei jeder einzelnen Gradmessung nur den ganzen Bogen, oder die an den Endpunkten beobachteten Polhöhen, in Betracht gezogen, ohne die bei mehreren vorhandenen Zwischenpunkte zu berücksichtigen, und in der Rechnung ist er bei der ersten Potenz der Abplattung stehen geblieben.

Ich habe deshalb den durch mehrere Arbeiten bereits vortheilhaft bekannten Herrn Dr. *Schmidt* unlängst zu einer neuen Berechnung dieser sämtlichen Gradmessungen veranlasst, welche er während des Abdrucks der letzten Bogen gegenwärtiger Schrift vollendet hat. Er hat dabei sowohl die höheren Potenzen der Abplattung, als die an allen Zwischenpunkten beobachteten Polhöhen mit berücksichtigt, auch die hannoversche Gradmessung hinzugezogen, und, nach dem oben, S. 181, angedeuteten Princip, dasjenige Ellipsoid bestimmt, auf welchem die astronomisch beobachteten Polhöhen, um mit den geodätischen Messungen in vollkommene Uebereinstimmung zu kommen, der möglich geringsten Abänderung bedürfen, d. i. wo die Summe der Quadrate der hierzu erforderlichen Abänderungen ein Minimum wird. Das Resultat dieser Rechnung ist:

Abplattung . . . . .	1	298,39
Dreihundertsechzigster Theil des Erdmeridians . . . . .		57010,35 Toisen.

Die beobachteten Polhöhen an den 25 Punkten der sieben Gradmessungen, und ihre kleinsten zur vollkommenen Uebereinstimmung mit den gefundenen Erddimensionen erforderlichen Abänderungen stellt folgende Uebersicht dar:

*Peruanische Messung.*

Tarqui . . . . .	— 3° 4' 30,83"	+ 2,05"
Cotchesqui . . . . .	+ 0 2 37,82	— 2,05

*Erste ostindische Messung.*

Trivandeporum . . . . .	+ 11° 44' 52,59"	— 0,48"
Paudree . . . . .	13 19 49,02	+ 0,47

*Zweite ostindische Messung.*

Punnae . . . . .	8 9 38,39	— 1,43
Putchapolliam . . . . .	10 59 48,93	— 1,18
Dodagoontah . . . . .	12 59 59,91	+ 3,37
Namthabad . . . . .	15 6 0,64	— 0,77

*Französische Messung.*

Formentera . . . . .	38 39 56,11	+ 3,95
Montjouy . . . . .	41 21 45,45	+ 2,81
Barcellona . . . . .	41 22 47,16	+ 1,07
Perpignan . . . . .	42 41 58,01	— 3,67
Carcassonne . . . . .	43 12 54,31	— 0,96
Evauz . . . . .	46 10 42,19	— 6,14
Pantheon . . . . .	48 50 48,94	— 0,17
Dünkirchen . . . . .	51 2 8,74	+ 3,12

*Englische Messung.*

Dunnose . . . . .	50 37 7,81	— 1,73
Greenwich . . . . .	51 28 39,60	+ 1,00
Blenheim . . . . .	51 50 27,50	+ 3,02
Arburyhill . . . . .	52 13 27,79	+ 1,80
Clifton . . . . .	53 27 31,59	— 4,07

*Hannoversche Messung.*

Göttingen . . . . .	51 31 47,85	— 2,65
Altona . . . . .	53 32 45,27	+ 2,66

*Schwedische Messung.*

Mallörn . . . . .	65 31 31,06	+ 1,40
Pahtavara . . . . .	67 8 51,41	— 1,40.

Die Zahlen der letzten Columne sind nun keineswegs wie Fehler der astronomischen Beobachtungen zu betrachten, sondern sie sind die algebraische Summe dieser Fehler und der Unregelmässigkeiten der Richtung der Verticalen. Wenn man diese Ge-

samtabweichungen nach denselben Regeln, wie die zufälligen Fehler, behandelt, so findet sich die mittlere Abweichung 3,18", und damit der mittlere zu befürchtende Fehler

in dem Nenner der Abplattung . . . . . 12,5 Einheiten  
 in dem Werthe des dreihundertsechzigsten  
 Theiles des Erdmeridians . . . . . 5,0 Toisen.

Den sogenannten wahrscheinlichen Fehler mag man also auf 8 Einheiten bei dem Nenner der Abplattung, und auf 3 Toisen bei dem mittleren Breitengrade schätzen, und diese Fixirung unserer Begriffe über den Grad der Genauigkeit, welchen man der Bestimmung der Dimensionen des Erdsphäroids durch alle bisherigen Breitengradmessungen zuzuschreiben berechtigt ist, hat man als ein wichtiges Resultat dieser verdienstlichen an einem anderen Orte ausführlich bekannt zu machenden Arbeit des Herrn Dr. *Schmidt* anzusehen.

