V.

Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf eine Aufgabe der praktischen Geometrie.

(Auszug aus einem Schreiben an *H. C. Schumacher. Astronomische Nachrichten,* Bd. I, S. 81. 1822.)

Ihrem Wunsche zufolge schicke ich Ihnen die Vorschriften zur Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Aufgabe der praktischen Geometrie: die Lage eines Punktes aus den an demselben gemessenen horizontalen Winkeln zwischen andern Punkten von genau bekannter Lage zu finden. Der Gegenstand ist zwar ganz elementarisch, und jeder, der den Geist der Methode der kleinsten Quadrate kennt, kann sich die Vorschriften leicht selbst entwickeln: inzwischen wird jene Aufgabe als eine der nützlichsten in der praktischen Geometrie auch wohl oft von solchen Personen benutzt werden können, die nicht ganz in jenem Falle sind, und denen daher die Mittheilung der Formeln nicht unlieb ist.

Die Coordinaten eines der bekannten Punkte seien a, b, jene von Norden nach Süden, diese von Osten nach Westen positiv gezählt — ob die Abscissenlinie wahrer Meridian ist oder nicht, ist hier gleichgültig; ebenso x, y genäherte Coordinaten des zu bestimmenden Punktes, und dx, dy deren noch unbekannte Verbesserungen. Man bestimme φ und r nach den Formeln

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{b-y}{a-x}, \quad r = \frac{a-x}{\cos \varphi} = \frac{b-y}{\sin \varphi},$$

indem man φ in demjenigen Quadranten wählt, der r positiv macht, und setze noch

$$\alpha = \frac{206265''(b-y)}{r^2}, \quad \beta = -\frac{206265''(a-x)}{r^2}.$$

Dann ist das Azimuth des ersten Punktes vom zweiten aus gesehen (die Richtung der Abscissenlinie als 0 betrachtet)

$$= \varphi + \alpha dx + \beta dy ,$$

wo die beiden letzten Theile in Secunden ausgedrückt sind.

In Beziehung auf einen zweiten Punkt von bekannter Lage sollen φ', α', β', in Beziehung auf einen dritten φ'', α'', β'' u. s. w. dasselbe bedeuten, was φ, α, β in Beziehung auf den ersten sind.

Sind die Winkelmessungen an dem zu bestimmenden Orte auf einmal mit einem Theodolithen ohne Repetition gemacht, indem bei unverrücktem Instrument das Fernrohr nach der Reihe auf die verschiedenen bekannten Punkte geführt ist, so sollten, wenn h, h', h'' etc. die dabei abgelesenen Winkel bedeuten, die Ausdrücke

$$\begin{aligned} &\varphi - h + \alpha\, dx + \beta\, dy \\ &\varphi' - h' + \alpha' dx + \beta' dy \\ &\varphi'' - h'' + \alpha'' dx + \beta'' dy \text{ etc.} \end{aligned}$$

durch die Substitution der wahren Werthe von dx und dy alle einerlei Werth bekommen, wenn die Beobachtungen absolut genau wären, und wenn man also drei derselben unter sich gleich setzte, würde man durch Elimination die Werthe von dx und dy erhalten. Sind überhaupt nur drei bekannte Punkte beobachtet, so lässt sich auch nichts weiter thun; ist aber ihre Anzahl grösser, so werden die Fehler der Winkelmessungen am vollkommensten ausgeglichen, indem man alle obigen Ausdrücke addirt, die Summe mit der Anzahl dividirt, die Differenz zwischen diesem Quotienten und jedem einzelnen Ausdruck $= 0$ setzt, und diese Gleichungen nach der bekannten Vorschrift der Methode der kleinsten Quadrate behandelt.

Sind hingegen die Winkelmessungen unabhängig von einander gemacht, so giebt jede derselben sofort eine Gleichung zwischen den unbekannten Grössen dx und dy, und alle diese Gleichungen sind dann nach der Methode der kleinsten Quadrate zu combiniren, wobei man, wenn man will, auch noch auf die etwa ungleiche Zuverlässigkeit der Winkel Rücksicht nehmen kann. Wäre also z. B. der Winkel zwischen dem ersten und zweiten Punkte $= i$, zwischen dem zweiten und dritten $= i'$ etc. gefunden, immer von der Linken zur Rechten gerechnet, so hätte man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi' - \varphi - i + (\alpha' - \alpha)\, dx + (\beta' - \beta)\, dy &= 0 \\ \varphi'' - \varphi' - i' + (\alpha'' - \alpha')\, dx + (\beta'' - \beta')\, dy &= 0 \end{aligned}$$

etc. Haben diese Winkelmessungen gleiche Zuverlässigkeit, so bildet man aus diesen Gleichungen zwei Normalgleichungen, die erste, indem man jene der Ordnung nach mit den respectiven Coefficienten von dx, d. i. die erste mit $\alpha' - \alpha$, die zweite mit $\alpha'' - \alpha'$ etc. multiplicirt und alles addirt; die andere, indem man dasselbe durch Multiplication mit den Coefficienten von dy ausführt und gleichfalls addirt. Ist hingegen die Winkelmessung von ungleicher Genauigkeit, und z. B. die erste auf μ, die andere auf μ' etc. Repetitionen gegründet, so müssen die Gleichungen beidemale vor der Addition auch erst noch mit diesen Zahlen μ, μ' etc. bezw. multiplicirt werden. Aus den so gefundenen beiden Normalgleichungen werden dann dx und dy durch Elimination gefunden. (Diese Vorschriften sind nur um derer willen beigefügt, denen die Methode der kleinsten Quadrate noch unbekannt ist, und für die vielleicht auch die Erinnerung noch nöthig sein könnte, dass bei jenen Multiplicationen die algebraischen Zeichen von $\alpha' - \alpha$ etc. sorgfältig beachtet werden müssen.) Endlich bemerke ich noch, dass hierbei *nur* die Fehler der Winkelmessungen ausgeglichen werden sollen, indem die Coordinaten der bekannten Punkte als *genau* angesehen werden.

Ich erläutere diese Vorschriften für den zweiten Fall noch an den mir von Ihnen mitgetheilten Winkelmessungen auf der Holkensbastion bei Copenhagen, obwohl, wie es scheint, die zuletzt angezeigte Voraussetzung dabei nicht genau genug statt findet; bei so kleinen Entfernungen haben kleine Unrichtigkeiten von einigen Zehntheilen eines Fusses in den gegebenen Coordinaten einen sehr viel grösseren Einfluss, als die Fehler in den Winkelmessungen, und man darf sich daher nicht wundern, dass nach möglichster Ausgleichung der Winkel Differenzen zurückbleiben, die viel grösser sind, als bei den Beobachtungen der Winkel als möglich angenommen werden kann. Für den gegenwärtigen Zweck, wo nur ein Rechnungsbeispiel gegeben werden soll, kann dies jedoch gleichgültig sein.

Winkel auf Holkensbastion.

Friedrichsberg—Petri	73°	35′	22,8″
Petri—Erlöserstthurm	104	57	33,0
Erlöserstthurm—Friedrichsberg .	181	27	5,0
Friedrichsberg—Frauenthurm .	80	37	10,8
Frauenthurm—Friedrichsthurm .	101	11	50,8
Friedrichsthurm—Friedrichsberg	178	11	1,5 .

Coordinaten, von der Copenhagener Sternwarte gerechnet, in Pariser Fuss.

Petri	+ 487,7	+ 1007,7
Frauenthurm	+ 710,0	+ 684,2
Friedrichsberg . . .	+ 2430,6	+ 8335,0
Erlöserstburm . . .	+ 2940,0	— 3536,0
Friedrichsthurm . .	+ 3059,3	— 2231,2 .

Als genäherte Coordinaten des Beobachtungsplatzes wurden angenommen:

$$x = +\,2836{,}44 \quad y = +\,444{,}33\,.$$

Und damit fanden sich die Azimuthe:

Petri	166°	30′	42,56″	$+\,19{,}92\,dx + 83{,}04\,dy$
Frauenthurm . . .	173	33	50,54	$+\,10{,}80\,dx + 95{,}78\,dy$
Friedrichsberg . .	92	56	39,46	$+\,26{,}07\,dx + \;\;1{,}34\,dy$
Erlöserstburm . .	271	29	25,38	$-\,51{,}79\,dx - \;\;1{,}35\,dy$
Friedrichsthurm .	274	45	41,48	$-\,76{,}56\,dx - \;\;6{,}38\,dy\,.$

Der berechnete Winkel Friedrichsberg—Petri ist daher

$$73^\circ\ 34'\ 3{,}10'' - 6{,}15\,dx + 81{,}70\,dy\,,$$

welches mit dem beobachteten verglichen die Gleichung

$$-\,79{,}70'' - 6{,}15\,dx + 81{,}70\,dy = 0$$

giebt. Ebenso erhält man die fünf anderen Gleichungen

$$\begin{aligned}
+\,69{,}82'' - \;\;71{,}71\,dx - \;\;84{,}39\,dy &= 0\\
+\;\;9{,}08 + \;\;77{,}86\,dx + \;\;\;\;2{,}69\,dy &= 0\\
+\;\;0{,}28 - \;\;15{,}27\,dx + \;\;94{,}44\,dy &= 0\\
+\;\;0{,}04 - \;\;87{,}36\,dx - 102{,}16\,dy &= 0\\
-\;\;3{,}42 + 102{,}63\,dx + \;\;\;\;7{,}72\,dy &= 0\,.
\end{aligned}$$

Aus der Verbindung dieser sechs Gleichungen erhält man, indem man den Beobachtungen gleiche Zuverlässigkeit beilegt, die beiden Normalgleichungen

$$\begin{aligned}
+\,29640\,dx + 14033\,dy &= +\;\;4168''\\
+\,14033\,dx + 33219\,dy &= +\,12383''\,,
\end{aligned}$$

und hieraus die Werthe

$$dx = -\,0{,}05\,,\quad dy = +\,0{,}40\,,$$

oder die verbesserten Coordinaten der Holkensbastion

$$+\,2836{,}39 \text{ und } +\,444{,}73\,.$$

Die nach Substitution dieser Werthe von dx und dy zwischen den berechneten und beobachteten Winkeln zurückbleibenden Unterschiede sind noch viel zu gross, um den Messungen zugeschrieben werden zu können, und beweisen, was oben bemerkt ist, dass die Coordinaten der bekannten Punkte nicht auf Zehntheile des Fusses zuverlässig waren, weshalb denn freilich auch die gefundene Verbesserung selbst diesmal etwas zweifelhaft bleibt.

Die bei dieser Rechnung zu Grunde gelegten genäherten Coordinaten der Holkensbastion waren durch die *direkte* Methode aus dem vierten und fünften der obigen Winkel berechnet. Obgleich diese direkte Methode als ein ziemlich erschöpfter Gegenstand zu betrachten ist, so setze ich sie doch der Vollständigkeit wegen hier auch noch her, in derjenigen Gestalt, in welcher ich sie anzuwenden pflege.

Es seien a, b die Coordinaten des ersten bekannten Punktes (man wählt denselben aus den drei bekannten nach Gefallen); die des zweiten seien in die Form

$$a + \mathrm{R}\cos \mathrm{E}, \quad b + \mathrm{R}\sin \mathrm{E}$$

gebracht, und die des dritten in dieselbe

$$a + \mathrm{R}'\cos \mathrm{E}', \quad b + \mathrm{R}'\sin \mathrm{E}'.$$

Die gesuchten Coordinaten des Beobachtungspunktes bezeichne man durch

$$a + \varrho\cos \varepsilon, \quad b + \varrho\sin \varepsilon.$$

Ferner sei der hier beobachtete Winkel zwischen dem ersten und zweiten Punkte $=$ M, der zwischen dem ersten und dritten $=$ M′; ich setze voraus, dass diese Winkel von der Linken zur Rechten genommen, und dass sie, falls sie so über 180° betragen haben, erst um 180° vermindert sind, oder was dasselbe ist, dass wenn ein Winkel in der verkehrten Ordnung unter 180° betrug, statt seiner das Complement zu 180° genommen ist*). Ich mache ferner

$$\frac{\mathrm{R}}{\sin \mathrm{M}} = n, \quad \frac{\mathrm{R}'}{\sin \mathrm{M}'} = n'$$

$$\mathrm{E} - \mathrm{M} = \mathrm{N}, \quad \mathrm{E}' - \mathrm{M}' = \mathrm{N}'$$

(wo nöthigenfalls vorher 360° addirt wird).

*) Die Absicht davon ist, die folgenden Grössen n, n' immer positiv zu machen, und dadurch weniger Aufmerksamkeit auf die algebraischen Zeichen nöthig zu haben.

Dies vorausgesetzt, hat man die beiden Gleichungen

$$\varrho = n \sin(\varepsilon - \mathrm{N}), \quad \varrho = n' \sin(\varepsilon - \mathrm{N}'),$$

welche, wenn sie so geschrieben werden:

$$n = \frac{1}{\varrho} \sin(\varepsilon - \mathrm{N}), \quad n' = \frac{1}{\varrho} \sin(\varepsilon - \mathrm{N}'),$$

unter die Aufgabe Theor. Mot. C. C. p. 82. gehören. Die eine der dort gegebenen Auflösungen führt zu folgender Regel:

Ich nehme an, dass n' grösser, wenigstens nicht kleiner als n ist, welches erlaubt ist, da es willkürlich ist, welchen Punkt man als den zweiten oder dritten betrachten will. Es sei

$$\frac{n}{n'} = \operatorname{tang} \zeta$$

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\mathrm{N}' - \mathrm{N})}{\operatorname{tang}(45^\circ - \zeta)} = \operatorname{tang} \psi.$$

Sodann wird

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}(\mathrm{N} + \mathrm{N}') + \psi,$$

und nachdem ε gefunden ist, wird ϱ durch eine der obigen Formeln, oder besser durch beide berechnet.

In unserem Beispiele haben wir, den Frauenthurm als den ersten, Friedrichsberg vorläufig als den zweiten und den Friedrichsthurm als den dritten Punkt betrachtet,

$$a = +710{,}0 \quad b = +684{,}2$$

$$\mathrm{E} = 77^\circ\ 19'\ 31{,}92'' \qquad \mathrm{E}' = 308^\circ\ 51'\ 45{,}77''$$

$$\log \mathrm{R} = 3{,}8944205 \qquad \log \mathrm{R}' = 3{,}5733549$$

$$\mathrm{M} = 99^\circ\ 22'\ 50{,}20'' \qquad \mathrm{M}' = 101^\circ\ 11'\ 50{,}80''$$

(zufolge obiger Anm.)

$$\mathrm{N} = 337^\circ\ 56'\ 42{,}72'' \qquad \mathrm{N}' = 207^\circ\ 39'\ 54{,}97''$$

$$\log n = 3{,}9002650 \qquad n' = 3{,}5817019.$$

Da hier $n > n'$, so vertauschen wir die Ordnung und setzen

$$\mathrm{N} = 207^\circ\ 39'\ 54{,}97'' \qquad \mathrm{N}' = 337^\circ\ 56'\ 42{,}72''$$

$$\log n = 3{,}5817019 \qquad \log n' = 3{,}9002650.$$

Hiernächst findet sich ferner

$$\zeta = 19^\circ\ 39'\ 3{,}87'', \quad \psi = 80^\circ\ 45'\ 31{,}69'', \quad \varepsilon = 353^\circ\ 33'\ 50{,}53''$$

und $\log \varrho = 3{,}3303990$, und die Coordinaten der Holkensbastion $+2836{,}441$ und $+444{,}330$.