IV.

Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen.

(*Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften*, herausgegeben von *B. von Lindenau* und *J. G. F. Bohnenberger*. Band I, S. 185. Heft für März und April 1816.)

1.

Bei der Begründung der sogenannten Methode der kleinsten Quadrate wird angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers Δ durch die Formel

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\Delta^2}$$

ausgedrückt wird, wo π den halben Kreisumfang, e die Basis der hyperbolischen Logarithmen, auch h eine Constante bedeutet, die man nach Art. 178. der *Theoria Motus Corporum Coelestium* als das Maass der Genauigkeit der Beobachtungen ansehen kann. Bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Ausmittelung der wahrscheinlichsten Werthe derjenigen Grössen, von welchen die Beobachtungen abhängen, braucht man den Werth der Grösse h gar nicht zu kennen; auch das *Verhältniss* der Genauigkeit der Resultate zu der Genauigkeit der Beobachtungen ist von h unabhängig. Inzwischen ist immer eine Kenntniss dieser Grösse selbst interessant und lehrreich, und ich will daher zeigen, wie man durch die Beobachtungen selbst zu einer solchen Kenntniss gelangen mag.

2.

Ich lasse zuerst einige den Gegenstand erläuternde Bemerkungen vorausgehen. Der Kürze wegen bezeichne ich den Werth des Integrals

$$\int \frac{2e^{-t^2}\,dt}{\sqrt{\pi}},$$

von $t=0$ an gerechnet, durch $\Theta(t)$. Einige einzelne Werthe werden von dem Gange dieser Funktion eine Vorstellung geben. Man hat

$$\begin{array}{lllll}
0{,}5000000 & = & \Theta(0{,}4769363) & = & \Theta(\varrho) \\
0{,}6000000 & = & \Theta(0{,}5951161) & = & \Theta(1{,}247790\varrho) \\
0{,}7000000 & = & \Theta(0{,}7328691) & = & \Theta(1{,}536618\varrho) \\
0{,}8000000 & = & \Theta(0{,}9061939) & = & \Theta(1{,}900032\varrho) \\
0{,}8427008 & = & \Theta(1) & = & \Theta(2{,}096716\varrho) \\
0{,}9000000 & = & \Theta(1{,}1630872) & = & \Theta(2{,}438664\varrho) \\
0{,}9900000 & = & \Theta(1{,}8213864) & = & \Theta(3{,}818930\varrho) \\
0{,}9990000 & = & \Theta(2{,}3276754) & = & \Theta(4{,}880475\varrho) \\
0{,}9999000 & = & \Theta(2{,}7510654) & = & \Theta(5{,}768204\varrho) \\
1 & = & \Theta(\infty) & &
\end{array}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler einer Beobachtung zwischen den Grenzen $-\Delta$ und $+\Delta$ liege, oder, ohne Rücksicht auf das Zeichen, nicht grösser als Δ sei, ist

$$= \int \frac{he^{-h^2x^2}\,dx}{\sqrt{\pi}},$$

wenn man das Integral von $x = -\Delta$ bis $x = +\Delta$ ausdehnt, oder doppelt so gross, wie dasselbe Integral von $x = 0$ bis $x = \Delta$ genommen, mithin

$$= \Theta(h\Delta).$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler nicht unter $\frac{\varrho}{h}$ sei, ist also $= \frac{1}{2}$, oder der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils gleich: wir wollen diese Grösse $\frac{\varrho}{h}$ den *wahrscheinlichen Fehler* nennen und mit r bezeichnen. Hingegen ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler über $2{,}438664\,r$ hinausgehe, nur $\frac{1}{10}$; die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler über $3{,}818930\,r$ steige, nur $\frac{1}{100}$ u. s. w.

3.

Wir wollen nun annehmen, dass bei m wirklich angestellten Beobachtungen die Fehler α, β, γ, δ etc. begangen sind, und untersuchen, was sich daraus in Beziehung auf den Werth von h und r

schliessen lasse. Macht man zwei Voraussetzungen, indem man den wahren Werth von h entweder $= \mathrm{H}$ oder $= \mathrm{H}'$ setzt, so verhalten sich die Wahrscheinlichkeiten, mit welchen sich in denselben die Fehler α, β, γ, δ etc. erwarten liessen, bezw. wie

$$\mathrm{H}e^{-\mathrm{H}^2\alpha^2} \times \mathrm{H}e^{-\mathrm{H}^2\beta^2} \times \mathrm{H}e^{-\mathrm{H}^2\gamma^2} \times \text{etc.}$$

$$\text{zu } \mathrm{H}'e^{-\mathrm{H}'^2\alpha^2} \times \mathrm{H}'e^{-\mathrm{H}'^2\beta^2} \times \mathrm{H}'e^{-\mathrm{H}'^2\gamma^2} \times \text{etc.},$$

d. i. wie

$$\mathrm{H}^m e^{-\mathrm{H}^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\text{etc.})} \quad \text{zu} \quad \mathrm{H}'^m e^{-\mathrm{H}'^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\text{etc.})}.$$

In demselben Verhältnisse stehen folglich die Wahrscheinlichkeiten, dass H oder H′ der wahre Werth von h war, *nach* dem Erfolge jener Fehler (*T. M. C. C.* Art. 176.): oder die Wahrscheinlichkeit jedes Werthes von h ist der Grösse

$$h^m e^{-h^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\text{etc.})}$$

proportional. Der *wahrscheinlichste* Werth von h ist folglich derjenige, für welchen diese Grösse ein Maximum wird, welchen man nach bekannten Regeln

$$= \sqrt{\frac{m}{2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\text{etc.})}}$$

findet. Der wahrscheinlichste Werth von r wird folglich

$$= \varrho\sqrt{\frac{2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\text{etc.})}{m}}$$

$$= 0{,}6744897\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\text{etc.}}{m}}.$$

Dies Resultat ist allgemein, m mag gross oder klein sein.

4.

Man begreift leicht, dass man von dieser Bestimmung von h und r desto weniger berechtigt ist, viele Genauigkeit zu erwarten, je kleiner m ist. Entwickeln wir daher den Grad von Genauigkeit, welchen man dieser Bestimmung beizulegeu hat, für den Fall, wo m eine grosse Zahl ist. Wir bezeichnen den gefundenen wahrscheinlichen Werth von h

$$\sqrt{\frac{m}{2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\text{etc.})}}$$

Kürze halber mit H, und bemerken, dass die Wahrscheinlichkeit, H sei der wahre Werth von h, zu der Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Werth $= \mathrm{H} + \lambda$ sei, sich verhält, wie

$$\mathrm{H}^m e^{-\frac{m}{2}} : (\mathrm{H}+\lambda)^m e^{-\frac{m(\mathrm{H}+\lambda)^2}{2\mathrm{H}^2}}$$

oder wie

$$1 : e^{-\frac{\lambda^2 m}{\mathrm{H}^2}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\lambda}{\mathrm{H}} + \frac{1}{4}\frac{\lambda^2}{\mathrm{H}^2} - \frac{1}{5}\frac{\lambda^3}{\mathrm{H}^3} + \text{etc.}\right)}.$$

Das zweite Glied wird gegen das erste nur dann noch merklich sein, wenn $\frac{\lambda}{\mathrm{H}}$ ein kleiner Bruch ist, daher wir uns erlauben dürfen, anstatt des angegebenen Verhältnisses dieses zu gebrauchen

$$1 : e^{-\frac{\lambda^2 m}{\mathrm{H}^2}}.$$

Dies heisst nun eigentlich so viel: die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Werth von h zwischen $\mathrm{H} + \lambda$ und $\mathrm{H} + \lambda + d\lambda$ liege, ist sehr nahe

$$= \mathrm{K} e^{-\frac{\lambda^2 m}{\mathrm{H}^2}} d\lambda,$$

wo K eine Constante ist, die so bestimmt werden muss, dass das Integral

$$\int \mathrm{K} e^{-\frac{\lambda^2 m}{\mathrm{H}^2}} d\lambda$$

zwischen den zulässigen Grenzen von λ genommen, $= 1$ werde. Statt solcher Grenzen ist es hier, wo wegen der Grösse von m offenbar

$$e^{-\frac{\lambda^2 m}{\mathrm{H}^2}}$$

unmerklich wird, sobald $\frac{\lambda}{\mathrm{H}}$ aufhört ein kleiner Bruch zu sein, erlaubt, die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ zu nehmen, wodurch

$$\mathrm{K} = \frac{1}{\mathrm{H}}\sqrt{\frac{m}{\pi}}$$

wird. Mithin ist die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Werth von h zwischen $\mathrm{H} - \lambda$ und $\mathrm{H} + \lambda$ liege,

$$= \Theta\left(\frac{\lambda}{\mathrm{H}}\sqrt{m}\right),$$

also jene Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2}$, wenn

$$\frac{\lambda}{\mathrm{H}}\sqrt{m} = \varrho \quad \text{ist.}$$

Es ist also eins gegen eins zu wetten, dass der wahre Werth von h

$$\text{zwischen} \quad \mathrm{H}\left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right) \quad \text{und} \quad \mathrm{H}\left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right)$$

liegt, oder dass der wahre Werth von r

$$\text{zwischen} \quad \frac{\mathrm{R}}{1 - \frac{\varrho}{\sqrt{m}}} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{R}}{1 + \frac{\varrho}{\sqrt{m}}}$$

falle, wenn wir durch R den im vorhergehenden Art. gefundenen wahrscheinlichsten Werth von r bezeichnen. Man kann diese Grenzen die *wahrscheinlichen Grenzen der wahren Werthe von h und r* nennen; offenbar dürfen wir für die wahrscheinlichen Grenzen des wahren Werthes von r hier auch setzen

$$\mathrm{R}\left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right) \quad \text{und} \quad \mathrm{R}\left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right).$$

5.

Wir sind bei der vorhergehenden Untersuchung von dem Gesichtspunkte ausgegangen, dass wir α, β, γ, δ etc. als bestimmte und gegebene Grössen betrachteten, und die Grösse der Wahrscheinlichkeit suchten, dass der wahre Werth von h oder r zwischen gewissen Grenzen liege. Man kann die Sache auch von einer andern Seite betrachten, und unter der Voraussetzung, dass die Beobachtungsfehler irgend einem bestimmten Wahrscheinlichkeitsgesetze unterworfen sind, die Wahrscheinlichkeit bestimmen, mit welcher erwartet werden kann, dass die Summe der Quadrate von m Beobachtungsfehlern zwischen gewisse Grenzen falle. Diese Aufgabe, unter der Bedingung, dass m eine grosse Zahl sei, ist bereits von *Laplace* aufgelöset, ebenso wie diejenige, wo die Wahrscheinlichkeit gesucht wird, dass die Summe von m Beobachtungsfehlern selbst zwischen gewisse Grenzen falle. Man kann leicht diese Untersuchung noch mehr generalisiren; ich begnüge mich, hier das Resultat anzuzeigen.

Es bezeichne $\varphi(x)$ die Wahrscheinlichkeit des Beobachtungsfehlers x, so dass $\int\varphi(x)\,dx = 1$ wird, wenn man das Integral von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ ausdehnt. Zwischen denselben Grenzen wollen wir allgemein den Werth des Integrals

$$\int\varphi(x)\,x^n\,dx$$

durch $K^{(n)}$ bezeichnen. Es sei ferner $S^{(n)}$ die Summe

$$\alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \delta^n + \text{etc.},$$

wo α, β, γ, δ etc. unbestimmt m Beobachtungsfehler bedeuten; die Theile jener Summe sollen, auch für ein ungerades n, alle positiv genommen werden.

Sodann ist $mK^{(n)}$ der wahrscheinlichste Werth von $S^{(n)}$ und die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Werth von $S^{(n)}$ zwischen die Grenzen $mK^{(n)} - \lambda$ und $mK^{(n)} + \lambda$ falle,

$$= \Theta\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2m(K^{(2n)} - K^{(n)2})}}\right).$$

Folglich sind die wahrscheinlichen Grenzen von $S^{(n)}$

$$mK^{(n)} - \varrho\sqrt{2m\,(K^{(2n)} - K^{(n)2})}$$

und

$$mK^{(n)} + \varrho\sqrt{2m\,(K^{(2n)} - K^{(n)2})}.$$

Dieses Resultat gilt allgemein für jedes Gesetz der Beobachtungsfehler. Wenden wir es auf den Fall an, wo

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2x^2}$$

gesetzt wird, so finden wir

$$K^{(n)} = \frac{\Pi\,\frac{1}{2}(n-1)}{h^n\sqrt{\pi}},$$

die Charakteristik Π in der Bedeutung der *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* (Comm. nov. soc. Gotting. T. II.) genommen (M. 5. Art. 28. der angef. Abh.). Also

$$K = 1, \quad K' = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}, \quad K'' = \frac{1}{2h^2}, \quad K''' = \frac{1}{h^3\sqrt{\pi}}$$

$$K^{IV} = \frac{1.3}{4h^4}, \quad K^{V} = \frac{1.2}{h^5\sqrt{\pi}}, \quad K^{VI} = \frac{1.3.5}{5h^6}, \quad K^{VII} = \frac{1.2.3}{h^7\sqrt{\pi}} \text{ etc.}$$

Es ist folglich der wahrscheinlichste Werth von $S^{(n)}$

$$\frac{m\Pi\,\frac{1}{2}(n-1)}{h^n\sqrt{\pi}},$$

und die wahrscheinlichen Grenzen des wahren Werthes von $S^{(n)}$

$$\frac{m\Pi\,\frac{1}{2}(n-1)}{h^n\sqrt{\pi}}\left\{1-\varrho\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{\Pi(n-\frac{1}{2})\cdot\sqrt{\pi}}{(\Pi\,\frac{1}{2}(n-1))^2}-1\right)}\right\}$$

und

$$\frac{m\Pi\,\frac{1}{2}(n-1)}{h^n\sqrt{\pi}}\left\{1+\varrho\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{\Pi(n-\frac{1}{2})\cdot\sqrt{\pi}}{(\Pi\,\frac{1}{2}(n-1))^2}-1\right)}\right\}.$$

Setzt man also, wie oben,

$$\frac{\varrho}{h}=r,$$

so dass r den wahrscheinlichen Beobachtungsfehler vorstellt, so ist der wahrscheinlichste Werth von

$$\varrho\sqrt[n]{\frac{S^{(n)}\sqrt{\pi}}{m\Pi\,\frac{1}{2}(n-1)}}$$

offenbar $=r$; und die wahrscheinlichen Grenzen des Werthes jener Grösse

$$r\left\{1-\frac{\varrho}{n}\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{\Pi(n-\frac{1}{2})\cdot\sqrt{\pi}}{(\Pi\,\frac{1}{2}(n-1))^2}-1\right)}\right\}$$

und

$$r\left\{1+\frac{\varrho}{n}\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{\Pi(n-\frac{1}{2})\cdot\sqrt{\pi}}{(\Pi\,\frac{1}{2}(n-1))^2}-1\right)}\right\}.$$

Es ist also auch eins gegen eins zu wetten, dass r zwischen den Grenzen

$$\varrho\sqrt[n]{\frac{S^{(n)}\sqrt{\pi}}{m\Pi\,\frac{1}{2}(n-1)}}\left\{1-\frac{\varrho}{n}\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{\Pi(n-\frac{1}{2})\cdot\sqrt{\pi}}{(\Pi\,\frac{1}{2}(n-1))^2}-1\right)}\right\}$$

und

$$\varrho\sqrt[n]{\frac{S^{(n)}\sqrt{\pi}}{m\Pi\,\frac{1}{2}(n-1)}}\left\{1+\frac{\varrho}{n}\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{\Pi(n-\frac{1}{2})\cdot\sqrt{\pi}}{(\Pi\,\frac{1}{2}(n-1))^2}-1\right)}\right\}$$

liege. Für $n=2$ sind diese Grenzen

$$\varrho\sqrt{\frac{2S''}{m}}\left\{1-\frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right\} \text{ und } \varrho\sqrt{\frac{2S''}{m}}\left\{1+\frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right\},$$

ganz mit den oben (Art. 4.) gefundenen übereinstimmend. Allgemein hat man für ein gerades n die Grenzen

$$\varrho\sqrt{2}\sqrt[n]{\frac{S^{(n)}}{m.1.3.5.7\ldots.(n-1)}}$$
$$\times\left\{1-\frac{\varrho}{n}\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{(n+1)(n+3)\ldots(2n-1)}{1.3.5\ldots(n-1)}-1\right)}\right\}$$

und

$$\varrho\sqrt{2}\sqrt[n]{\frac{S^{(n)}}{m.1.3.5.7\ldots.(n-1)}}$$
$$\times\left\{1+\frac{\varrho}{n}\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{(n+1)(n+3)\ldots(2n-1)}{1.3.5\ldots(n-1)}-1\right)}\right\}$$

und für ein ungerades n folgende

$$\varrho\sqrt[n]{\frac{S^{(n)}\sqrt{\pi}}{m.1.2.3\ldots\frac{1}{2}(n-1)}}\left\{1-\frac{\varrho}{n}\sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)\pi}{(2.4.6\ldots(n-1))^2}-2\right)}\right\}$$

und

$$\varrho\sqrt[n]{\frac{S^{(n)}\sqrt{\pi}}{m.1.2.3\ldots\frac{1}{2}(n-1)}}\left\{1+\frac{\varrho}{n}\sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)\pi}{(2.4.6\ldots(n-1))^2}-2\right)}\right\}.$$

6.

Ich füge noch die numerischen Werthe für die einfachsten Fälle bei:

Wahrscheinliche Grenzen von r

$$\text{I.}\quad 0{,}8453473\ \frac{S'}{m}\left(1\mp\frac{0{,}5095841}{\sqrt{m}}\right)$$

$$\text{II.}\quad 0{,}6744897\sqrt[2]{\frac{S''}{m}}\left(1\mp\frac{0{,}4769363}{\sqrt{m}}\right)$$

$$\text{III.}\quad 0{,}5771897\sqrt[3]{\frac{S'''}{m}}\left(1\mp\frac{0{,}4971987}{\sqrt{m}}\right)$$

$$\text{IV.}\quad 0{,}5125017\sqrt[4]{\frac{S''''}{m}}\left(1\mp\frac{0{,}5507186}{\sqrt{m}}\right)$$

$$\text{V.}\quad 0{,}4655532\sqrt[5]{\frac{S^{\text{V}}}{m}}\left(1\mp\frac{0{,}6355080}{\sqrt{m}}\right)$$

$$\text{VI.}\quad 0{,}4294972\sqrt[6]{\frac{S^{\text{VI}}}{m}}\left(1\mp\frac{0{,}7557764}{\sqrt{m}}\right).$$

Man sieht also auch hieraus, dass die Bestimmungsart II von allen die vortheilhafteste ist. Hundert Beobachtungsfehler, nach dieser Formel behandelt, geben nämlich ein eben so zuverlässiges Resultat, wie

114 nach I, 109 nach III, 133 nach IV, 178 nach V, 251 nach VI.

Inzwischen hat die Formel I den Vorzug der allerbequemsten Rechnung, und man mag sich daher derselben, da sie doch nicht viel weniger genau ist als II, immerhin bedienen, wenn man nicht die Summe der Quadrate der Fehler sonst schon kennt, oder zu kennen wünscht.

7.

Noch bequemer, obwohl beträchtlich weniger genau, ist folgendes Verfahren: Man ordne die sämmtlichen m Beobachtungsfehler (absolut genommen) nach ihrer Grösse, und nenne den mittelsten, wenn ihre Zahl ungerade ist, oder das arithmetische Mittel der zwei mittelsten bei gerader Anzahl, M. Es lässt sich zeigen, was aber an diesem Orte nicht weiter ausgeführt werden kann, dass bei einer grossen Anzahl von Beobachtungen r der wahrscheinlichste Werth von M ist, und dass die wahrscheinlichen Grenzen von M

$$r\left(1 - e^{\varrho^2}\sqrt{\frac{\pi}{8m}}\right) \text{ und } r\left(1 + e^{\varrho^2}\sqrt{\frac{\pi}{8m}}\right)$$

sind, oder die wahrscheinlichen Grenzen des Werthes von r

$$\mathrm{M}\left(1 - e^{\varrho^2}\sqrt{\frac{\pi}{8m}}\right) \text{ und } \mathrm{M}\left(1 + e^{\varrho^2}\sqrt{\frac{\pi}{8m}}\right),$$

oder in Zahlen

$$\mathrm{M}\left(1 \mp \frac{0{,}7520974}{\sqrt{m}}\right)$$

Dies Verfahren ist also nur wenig genauer, als die Anwendung der Formel VI, und man müsste 249 Beobachtungsfehler zu Rathe ziehen, um eben so weit zu reichen, wie mit 100 Beobachtungsfehlern nach Formel II.

8.

Die Anwendung einiger von diesen Methoden auf die in *Bode*'s astronomischem Jahrbuche für 1818, S. 234, vorkommenden Fehler bei

48 Beobachtungen der geraden Aufsteigungen des Polarsterns von *Bessel* gab

$$S' = 60{,}46''; \quad S'' = 110{,}600''; \quad S''' = 250{,}341118''.$$

Hieraus folgten die wahrscheinlichsten Werthe von r

nach Formel I . . .	1,065″,	wahrscheinl. Unsicherheit	=	±0,078″
„ II . . .	1,024	„	=	±0,070
„ III . . .	1,001	„	=	±0,072
nach Art. 7 . . .	1,045	„	=	±0,113,

eine Uebereinstimmung, wie sie kaum zu erwarten war. *Bessel* giebt selbst 1,067″, und scheint daher der Formel I gemäss gerechnet zu haben.