III.

Aus der
Untersuchung über die elliptischen Elemente der Pallas
aus den Oppositionen der Jahre 1803, 1804, 1805, 1807, 1808 und 1809.

(Der Königlichen Societät der Wissenschaften überreicht 1810, November 25.)

10.

. . . .

. . . .

. . . . Ich beabsichtige, die elliptischen Elemente zu ermitteln, welche nicht diesen oder jenen Oppositionen genau, sondern allen, welche bis jetzt beobachtet sind, möglichst nahe genügen. Die Methode, vermittelst deren man ein solches Geschäft erledigen kann, habe ich zwar schon in der „Theorie der Bewegung der Himmelskörper“, Art. 187., kurz beschrieben, da aber nicht nur der Gegenstand, welchen ich dort allgemein behandelt habe, in dem speciellen Falle, wo die beobachteten Oerter Oppositionen sind, gewisse Abkürzungen gestattet, sondern auch gewisse praktische Kunstgriffe, durch welche ich die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate schon lange zu einer bequemeren zu machen gewohnt bin, in jenem Werke nicht gegeben werden, so hoffe ich, dass es den Astronomen nicht unlieb sein wird, wenn ich diese Rechnungen hier etwas weitläufiger wiedergebe. Da sich das ganze Geschäft um die Bestimmung von *Verbesserungen* dreht, die an angenäherte Elemente anzubringen sind, von welchen angenommen wird, dass sie von allen beobachteten Oertern nicht sehr abweichen, so wird die ganze Arbeit in zwei Abschnitte zerfallen: erstens nämlich müssen die linearen Gleichungen gebildet werden, welche die einzelnen beobachteten Oerter liefern, sodann sind aus diesen Gleichungen die zweckmässigsten Werthe der Unbekannten zu ermitteln.

11.

Nach den angenäherten Elementen sei

- L die mittlere Länge des Planeten für eine beliebige Epoche,
- t die Anzahl der verstrichenen Tage von der Epoche an bis zum Augenblick der Beobachtung,
- 7 die mittlere tägliche siderische Bewegung in Secunden,
- Π die Länge des Perihels,
- $e = \sin\varphi$ die Excentricität,
- a die grosse Halbaxe,
- r der Radius vector,
- v die wahre Anomalie,
- E die excentrische Anomalie,
- ☊ die Länge des aufsteigenden Knotens,
- i die Neigung der Bahn,
- u das Argument der Breite,
- λ die heliocentrische Länge,
- γ die heliocentrische Breite,
- β die geocentrische Breite,
- R die Entfernung der Erde von der Sonne.

Beobachtet soll aber sein

- α die heliocentrische Länge,
- $\mathfrak{B}$ die geocentrische Breite.

Endlich bezeichne ich mit dL, d7, $d\Pi$ etc. Verbesserungen der Grössen L, 7, Π etc. Es wird daher

$d\mathrm{L} + t\,d7$ die Verbesserung der mittleren Länge,

$d\mathrm{L} + t\,d7 - d\Pi$ die Verbesserung der mittleren Anomalie,

und deshalb nach den Art. 15. und 16. der „Theorie der Bewegung der Himmelskörper“

$$dv = \frac{a^2\cos\varphi}{r^2}(d\mathrm{L} + t\,d7 - d\Pi) + \frac{a^2}{r^2}(2 - e\cos\mathrm{E} - e^2)\sin\mathrm{E}\,d\varphi$$

$$dr = \frac{r}{a}\,da + a\,\mathrm{tang}\,\varphi\sin v\,(d\mathrm{L} + t\,d7 - d\Pi) - a\cos\varphi\cos v\,d\varphi\,,$$

Ferner wird die Verbesserung des Argumentes der Breite

$$du = dv + d\Pi - d\Omega\,,$$

und nach Art. 52. der „Theorie der Bewegung der Himmelskörper" die Verbesserung der heliocentrischen Länge

$$d\lambda = d\Omega - \operatorname{tang}\gamma\cos(\lambda - \Omega)\,di + \frac{\cos i}{\cos^2\gamma}\,du\,.$$

Hieraus entnimmt man

$$\begin{aligned} d\lambda = & \frac{a^2\cos\varphi\cos i}{r^2\cos^2\gamma}\,d\mathrm{L} \\ & + \frac{t\,a^2\cos\varphi\cos i}{r^2\cos^2\gamma}\,d7 \\ & + \left(\frac{\cos i}{\cos^2\gamma} - \frac{a^2\cos\varphi\cos i}{r^2\cos^2\gamma}\right)d\Pi \\ & + \frac{a^2\cos i}{r^2\cos^2\gamma}\,(2 - e\cos\mathrm{E} - e^2)\sin\mathrm{E}\,d\varphi \\ & + \left(1 - \frac{\cos i}{\cos^2\gamma}\right)d\Omega \\ & - \operatorname{tang}\gamma\cos(\lambda - \Omega)\,di\,. \end{aligned}$$

Da man ferner hat

$$\begin{aligned} a^{\frac{3}{2}}7 &= \text{Const.} \\ r\sin(\beta - \gamma) &= \mathrm{R}\sin\beta \\ \operatorname{tang}\gamma &= \operatorname{tang} i\sin(\alpha - \Omega)\,, \end{aligned}$$

so wird durch Differentiation

$$\frac{da}{a} = -\frac{2}{3}\,\frac{d7}{7}$$

$$\frac{dr}{r} + \operatorname{cotang}(\beta - \gamma)\cdot(d\beta - d\gamma) = \operatorname{cotang}\beta\,d\beta\,,\ \text{oder}$$

$$d\beta = \frac{\sin\beta\cos(\beta - \gamma)}{\sin\gamma}\,d\gamma - \frac{\sin\beta\sin(\beta - \gamma)}{r\sin\gamma}\,dr$$

$$d\gamma = \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2i}\,di - \frac{1}{2}\sin 2\gamma\operatorname{cotang}(\alpha - \Omega)\,d\Omega\,,$$

woraus man mit Hinzuziehung des oben entwickelten Werthes von dr entnimmt

$$d\beta = -\frac{a \sin\beta \sin(\beta-\gamma) \operatorname{tang}\varphi \sin v}{r \sin\gamma} dL$$
$$+\left\{\frac{2 \sin\beta \sin(\beta-\gamma)}{3\,7 \sin\gamma} - \frac{a t \sin\beta \sin(\beta-\gamma) \operatorname{tang}\varphi \sin v}{r \sin\gamma}\right\} d7$$
$$+\frac{a \sin\beta \sin(\beta-\gamma) \operatorname{tang}\varphi \sin v}{r \sin\gamma} d\Pi$$
$$+\frac{a \sin\beta \sin(\beta-\gamma) \cos\varphi \cos v}{r \sin\gamma} d\varphi$$
$$+\frac{2 \sin\beta \cos(\beta-\gamma) \cos\gamma}{\sin 2i} di$$
$$- \sin\beta \cos(\beta-\gamma) \cos\gamma \operatorname{cotang}(\alpha-\Omega)\, d\Omega\,.$$

Hiernach werden die Werthe der heliocentrischen Länge und der geocentrischen Breite aus den verbesserten Werthen der Elemente $\lambda + d\lambda$, $\beta + d\beta$, und deshalb liefert jede Opposition zwei Gleichungen

$$\alpha = \lambda + d\lambda$$
$$\mathfrak{b} = \beta + d\beta\,.$$

12.

Bei Anwendung dieser Vorschriften auf die im Art. 2. gegebenen sechs Oppositionen der Pallas erhalten wir, wenn wir die Rechnung auf das zweite der im Art. 3. skizzirten Elementensysteme begründen, die folgenden zwölf Gleichungen*):

*) Um die Nachrechnung der Zahlenangaben zu ermöglichen, setzen wir die oben angeführten, beobachteten sechs Oppositionen aus Art. 2. und die Elemente II. aus Art. 3. hierher.

Zeit der Opposition für den Meridian von Göttingen	Tage von Beginn d. Jahres 1803 an	Heliocentrische Länge	Geocentrische Breite
1803 Juni 30. 0^h 27^m 32^s	181,019120	277° 39′ 24,0″	+46° 26′ 36,0″
1804 Aug. 30. 4 58 27	608,207257	337 0 36,1	+15 1 49,8
1805 Nov. 29. 11 15 4	1064,468796	67 20 42,9	−54 30 54,9
1807 Mai 4. 14 37 41	1585,609502	223 37 27,7	+42 11 25,6
1808 Juli 26. 21 17 32	2034,887176	304 2 59,7	+37 43 53,7
1809 Sept. 22. 16 10 20	2457,673843	359 40 4,4	− 7 22 10,1

II. *Elliptische Elemente der Pallas aus den Oppositionen der Jahre* 1804, 1805, 1807 und 1808.

Epoche der mittleren Länge 1803 für den Meridian von Göttingen 221° 34′ 56,7″
Mittlere tägliche tropische Bewegung . . . . 770,4467″

Aus der *ersten* Opposition, wo gefunden ist
die berechnete Länge = 277° 36′ 20,07″
und die geocentrische Breite = + 46° 26′ 29,19″:

$$\begin{aligned}
0 &= -183{,}93'' + 0{,}79363\, dL + 143{,}66\, d7 + 0{,}39493\, d\Pi \\
&\quad + 0{,}95920\, d\varphi - 0{,}18856\, d\Omega + 0{,}17387\, di \\
0 &= -\quad 6{,}81'' - 0{,}02658\, dL + 46{,}71\, d7 + 0{,}02658\, d\Pi \\
&\quad - 0{,}20858\, d\varphi + 0{,}15946\, d\Omega + 1{,}25782\, di.
\end{aligned}$$

Aus der *zweiten* Opposition, wo
die berechnete Länge = 337° 0′ 36,04″
und die geocentrische Breite = + 15° 1′ 46,71″:

$$\begin{aligned}
0 &= -\quad 0{,}06'' + 0{,}58880\, dL + 358{,}12\, d7 + 0{,}26208\, d\Pi \\
&\quad - 0{,}85234\, d\varphi + 0{,}14912\, d\Omega + 0{,}17775\, di \\
0 &= -\quad 3{,}09'' + 0{,}01318\, dL + 28{,}39\, d7 - 0{,}01318\, d\Pi \\
&\quad - 0{,}07861\, d\varphi + 0{,}91704\, d\Omega + 0{,}54365\, di.
\end{aligned}$$

Aus der *dritten* Opposition, wo
die berechnete Länge = 67° 20′ 42,88″
und die geocentrische Breite = − 54° 31′ 3,88″:

$$\begin{aligned}
0 &= -\quad 0{,}02'' + 1{,}73436\, dL + 1846{,}17\, d7 - 0{,}54603\, d\Pi \\
&\quad - 2{,}05662\, d\varphi - 0{,}18833\, d\Omega - 0{,}17445\, di \\
0 &= -\quad 8{,}98'' - 0{,}12606\, dL - 227{,}42\, d7 + 0{,}12606\, d\Pi \\
&\quad - 0{,}38939\, d\varphi + 0{,}17176\, d\Omega - 1{,}35441\, di.
\end{aligned}$$

Aus der *vierten* Opposition, wo
die berechnete Länge = 223° 37′ 25,39″
und die geocentrische Breite = + 42° 11′ 28,07″:

$$\begin{aligned}
0 &= -\quad 2{,}31'' + 0{,}99584\, dL + 1579{,}03\, d7 + 0{,}06456\, d\Pi \\
&\quad + 1{,}99545\, d\varphi - 0{,}06040\, d\Omega - 0{,}33750\, di \\
0 &= +\quad 2{,}47'' - 0{,}08089\, dL - 67{,}22\, d7 + 0{,}08089\, d\Pi \\
&\quad - 0{,}09970\, d\varphi - 0{,}46359\, d\Omega + 1{,}22803\, di.
\end{aligned}$$

Aus der *fünften* Opposition, wo
die berechnete Länge = 304° 2′ 59,71″
und die geocentrische Breite = + 37° 44′ 31,82″:

Länge des Perihels 1803	121° 5′ 22,1″
Länge des aufsteigenden Knotens 1803	172 28 46,8
Neigung der Bahn	34 37 31,5
Excentricität (= sin [14° 10′ 4,08″])	0,2447624
Logarithmus der grossen Halbaxe	0,4422276.

D. H.

$$0 = + \quad 0{,}01'' + 0{,}65311\, dL + 1329{,}09\, d7 + 0{,}38994\, d\Pi$$
$$- 0{,}08439\, d\varphi - 0{,}04305\, d\Omega + 0{,}34268\, di$$
$$0 = + \quad 38{,}12'' - 0{,}00218\, dL + \quad 38{,}47\, d7 + 0{,}00218\, d\Pi$$
$$- 0{,}18710\, d\varphi + 0{,}47301\, d\Omega - 1{,}14371\, di.$$

Aus der *sechsten* Opposition, wo
die berechnete Länge $= 359^\circ\ 34'\ 46{,}67''$
und die geocentrische Breite $= -7^\circ\ 20'\ 12{,}13''$:

$$0 = -317{,}73'' + 0{,}69957\, dL + 1719{,}32\, d7 + 0{,}12913\, d\Pi$$
$$- 1{,}38787\, d\varphi + 0{,}17130\, d\Omega - 0{,}08360\, di$$
$$0 = +117{,}97'' - 0{,}01315\, dL - \quad 43{,}84\, d7 + 0{,}01315\, d\Pi$$
$$+ 0{,}02929\, d\varphi + 1{,}02138\, d\Omega - 0{,}27187\, di.$$

Von diesen zwölf Gleichungen verwerfen wir aber die zehnte vollständig, da die beobachtete geocentrische Breite allzu unsicher ist.

13.

Da man die sechs Unbekannten dL, $d7$ etc. nicht so zu bestimmen vermag, dass allen elf Gleichungen genau Genüge geschieht, d. h. dass die einzelnen Funktionen der Unbekannten, welche rechts stehen, gleichzeitig $= 0$ werden, so wollen wir diejenigen Werthe ermitteln, durch welche die Quadrate dieser Funktionen die allerkleinste Summe ergeben. Man sieht nämlich leicht ein, wenn allgemein die folgenden linearen Funktionen der Unbekannten p, q, r, s, etc. vorgelegt sind:

$$n + ap + bq + cr + ds + \text{etc.} = w$$
$$n' + a'p + b'q + c'r + d's + \text{etc.} = w'$$
$$n'' + a''p + b''q + c''r + d''s + \text{etc.} = w''$$
$$n''' + a'''p + b'''q + c'''r + d'''s + \text{etc.} = w'''$$

etc., dass die Bedingungsgleichungen dafür, dass

$$w^2 + w'^2 + w''^2 + w'''^2 + \text{etc.} = \Omega$$

ein Minimum wird, die folgenden sind:

$$aw + a'w' + a''w'' + a'''w''' + \text{etc.} = 0$$
$$bw + b'w' + b''w'' + b'''w''' + \text{etc.} = 0$$
$$cw + c'w' + c''w'' + c'''w''' + \text{etc.} = 0$$
$$dw + d'w' + d''w'' + d'''w''' + \text{etc.} = 0$$

etc. oder, wenn wir der Kürze wegen

$$
\begin{array}{l}
an + a'n' + a''n'' + a'''n''' + \text{etc. mit } [an] \\
a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2 + \text{etc. mit } [aa] \\
ab + a'b' + a''b'' + a'''b''' + \text{etc. mit } [ab] \\
\text{etc.} \\
b^2 + b'^2 + b''^2 + b'''^2 + \text{etc. mit } [bb] \\
bc + b'c' + b''c'' + b'''c''' + \text{etc. mit } [bc] \\
\text{etc. etc.}
\end{array}
$$

bezeichnen, dass p, q, r, s etc. durch Elimination aus nachstehenden Gleichungen bestimmt werden müssen:

$$
\begin{array}{l}
[an] + [aa]\,p + [ab]\,q + [ac]\,r + [ad]\,s + \text{etc.} = 0 \\
[bn] + [ab]\,p + [bb]\,q + [bc]\,r + [bd]\,s + \text{etc.} = 0 \\
[cn] + [ac]\,p + [bc]\,q + [cc]\,r + [cd]\,s + \text{etc.} = 0 \\
[dn] + [ad]\,p + [bd]\,q + [cd]\,r + [dd]\,s + \text{etc.} = 0 \\
\text{etc.}
\end{array}
$$

Wenn jedoch die Anzahl der Unbekannten p, q, r, s etc. etwas grösser ist, so verursacht die Elimination eine sehr ausgedehnte und unangenehme Arbeit, welche wir auf nachfolgende Weise wesentlich abkürzen können. Ausser den Coefficienten $[an]$, $[aa]$, $[ab]$ etc. (deren Anzahl $= \frac{1}{2}(\mu^2 + 3\mu)$ wird, wenn die Anzahl der Unbekannten $= \mu$ ist) nehme ich auch

$$n^2 + n'^2 + n''^2 + n'''^2 + \text{etc.} = [nn]$$

als berechnet an, worauf leicht zu ersehen ist, dass

$$
\begin{array}{rl}
\Omega = [nn] & + 2[an]\,p + 2[bn]\,q + 2[cn]\,r + 2[dn]\,s + \text{etc.} \\
& + [aa]\,p^2 + 2[ab]\,pq + 2[ac]\,pr + 2[ad]\,ps + \text{etc.} \\
& \qquad + [bb]\,q^2 + 2[bc]\,qr + 2[bd]\,qs + \text{etc.} \\
& \qquad\qquad + [cc]\,r^2 + 2[cd]\,rs + \text{etc.} \\
& \qquad\qquad\qquad + [dd]\,s^2 + \text{etc.} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}
$$

wird. Bezeichnen wir daher

$$[an] + [aa]\,p + [ab]\,q + [ac]\,r + [ad]\,s + \text{etc. mit } \mathrm{A},$$

so sind offenbar diejenigen Glieder von $\frac{\mathrm{A}^2}{[aa]}$, bei welchen der Faktor p auftritt, einzeln in Ω enthalten, und deshalb muss $\Omega - \frac{\mathrm{A}^2}{[aa]}$ eine von p unabhängige Funktion sein. Setzen wir also

$$[nn] - \frac{[an]^2}{[aa]} = [nn, 1]$$

$$[bn] - \frac{[an]\,[ab]}{[aa]} = [bn, 1]$$

$$[cn] - \frac{[an]\,[ac]}{[aa]} = [cn, 1]$$

$$[dn] - \frac{[an]\,[ad]}{[aa]} = [dn, 1] \text{ etc.}$$

$$[bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]} = [bb, 1]$$

$$[bc] - \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]} = [bc, 1]$$

$$[bd] - \frac{[ab]\,[ad]}{[aa]} = [bd, 1] \text{ etc. etc., so ist}$$

$$\begin{aligned} \Omega - \frac{A^2}{[aa]} = [nn, 1] &+ 2[bn, 1]\,q + 2[cn, 1]\,r + 2[dn, 1]\,s + \text{etc.} \\ &+ [bb, 1]\,q^2 + 2[bc, 1]\,qr + 2[bd, 1]\,qs + \text{etc.} \\ &+ [cc, 1]\,r^2 + 2[cd, 1]\,rs + \text{etc.} \\ &+ [dd, 1]\,s^2 + \text{etc.} \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

welche Funktion wir mit Ω' bezeichnen wollen.

Wenn wir analog

$$[bn, 1] + [bb, 1]\,q + [bc, 1]\,r + [bd, 1]\,s + \text{etc.} = B$$

setzen, so wird $\Omega' - \frac{B^2}{[bb, 1]}$ eine von q unabhängige Funktion sein, welche wir $= \Omega''$ annehmen. Auf dieselbe Weise machen wir

$$[nn, 1] - \frac{[bn, 1]^2}{[bb, 1]} = [nn, 2]$$

$$[cn, 1] - \frac{[bn, 1]\,[bc, 1]}{[bb, 1]} = [cn, 2] \text{ etc.}$$

$$[cc, 1] - \frac{[bc, 1]^2}{[bb, 1]} = [cc, 2]$$

etc. etc. und

$$[cn, 2] + [cc, 2]\,r + [cd, 2]\,s + \text{etc.} = C,$$

wonach $\Omega'' - \frac{C^2}{[cc, 2]}$ eine auch von r unabhängige Funktion sein wird. In derselben Weise fahren wir fort, bis wir in der Reihe

Ω, Ω', Ω'' etc. zu einem von allen Unbekannten unabhängigen Glied gelangen, welches $[nn, \mu]$ sein wird, wenn wir die Anzahl der Unbekannten p, q, r, s etc. mit μ bezeichnen. Wir erhalten also

$$\Omega = \frac{A^2}{[aa]} + \frac{B^2}{[bb, 1]} + \frac{C^2}{[cc, 2]} + \frac{D^2}{[dd, 3]} + \text{etc.} + [nn, \mu].$$

Da nun $\Omega = w^2 + w'^2 + w''^2 +$ etc. seiner Natur nach einen negativen Werth nicht annehmen kann, so lässt sich leicht zeigen, dass die Divisoren $[aa]$, $[bb, 1]$, $[cc, 2]$, $[dd, 3]$ etc. nothwendig *positiv* herauskommen müssen (der Kürze wegen will ich jedoch diese Auseinandersetzung hier nicht weitläufiger verfolgen). Hieraus folgt aber von selbst, dass sich der kleinste Werth von Ω ergiebt, wenn $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ etc. wird. Aus diesen μ Gleichungen müssen wir daher die Unbekannten p, q, r, s etc. bestimmen, was wir in umgekehrter Reihenfolge sehr leicht ausführen können, da offenbar die letzte Gleichung nur eine einzige Unbekannte enthält, die vorletzte zwei und so weiter. Diese Methode empfiehlt sich zugleich aus dem Grunde, weil dabei der kleinste Werth der Summe Ω von selbst bekannt wird, da er ja offenbar $= [nn, \mu]$ ist.

14.

Diese Vorschriften wollen wir jetzt auf unser Beispiel anwenden, wo p, q, r, s etc. bezw. dL, $d7$, $d\Pi$, $d\varphi$, $d\Omega$, di sind. Nach sorgfältig durchgeführter Rechnung fand ich die folgenden numerischen Werthe:

$[nn] = +148848$	$[bc] = -49{,}06$	Hieraus leitete ich ferner ab
$[an] = -371{,}09$	$[bd] = -3229{,}77$	
$[bn] = -580104$	$[be] = -198{,}64$	$[nn, 1] = +125569$
$[cn] = -113{,}45$	$[bf] = -143{,}05$	$[bn, 1] = -138534$
$[dn] = +268{,}53$	$[cc] = +0{,}71917$	$[cn, 1] = -119{,}31$
$[en] = +94{,}26$	$[cd] = +1{,}13382$	$[dn, 1] = -125{,}18$
$[fn] = -31{,}81$	$[ce] = +0{,}06400$	$[en, 1] = +72{,}52$
$[aa] = +5{,}91569$	$[cf] = +0{,}26341$	$[fn, 1] = -43{,}22$
$[ab] = +7203{,}91$	$[dd] = +12{,}00340$	$[bb, 1] = +2458225$
$[ac] = -0{,}09344$	$[de] = -0{,}37137$	$[bc, 1] = +62{,}13$
$[ad] = -2{,}28516$	$[df] = -0{,}11762$	$[bd, 1] = -510{,}58$
$[ae] = -0{,}34664$	$[ee] = +2{,}28215$	$[be, 1] = +213{,}84$
$[af] = -0{,}18194$	$[ef] = -0{,}36136$	$[bf, 1] = +73{,}45$
$[bb] = +10834225$	$[ff] = +5{,}62456$	$[cc, 1] = +0{,}71769$

$[cd, 1] = +1{,}09773$
$[ce, 1] = -0{,}05852$
$[cf, 1] = +0{,}26054$
$[dd, 1] = +11{,}12064$
$[de, 1] = -0{,}50528$
$[df, 1] = -0{,}18790$
$[ee, 1] = +2{,}26185$
$[ef, 1] = -0{,}37202$
$[ff, 1] = +5{,}61905$

Und hieraus auf ähnliche Weise

$[nn, 2] = +117763$
$[cn, 2] = -115{,}81$
$[dn, 2] = -153{,}95$
$[en, 2] = +84{,}57$
$[fn, 2] = -39{,}08$
$[cc, 2] = +0{,}71612$

$[cd, 2] = +1{,}11063$
$[ce, 2] = -0{,}06392$
$[cf, 2] = +0{,}25868$
$[dd, 2] = +11{,}01463$
$[de, 2] = -0{,}46088$
$[df, 2] = -0{,}17265$
$[ee, 2] = +2{,}24325$
$[ef, 2] = -0{,}37841$
$[ff, 2] = +5{,}61686$

Hieraus ferner

$[nn, 3] = +99034$
$[dn, 3] = +25{,}66$
$[en, 3] = +74{,}23$
$[fn, 3] = +2{,}75$
$[dd, 3] = +9{,}29213$
$[de, 3] = -0{,}36175$
$[df, 3] = -0{,}57384$

$[ee, 3] = +2{,}23754$
$[ef, 3] = -0{,}35532$
$[ff, 3] = +5{,}52342$

Hieraus ebenso

$[nn, 4] = +98963$
$[en, 4] = +75{,}23$
$[fn, 4] = +4{,}33$
$[ee, 4] = +2{,}22346$
$[ef, 4] = -0{,}37766$
$[ff, 4] = +5{,}48798$

Hieraus

$[nn, 5] = +96418$
$[fn, 5] = +17{,}11$
$[ff, 5] = +5{,}42383$

Und hieraus endlich

$[nn, 6] = +96364$.

Wir haben daher zur Bestimmung der Unbekannten die sechs folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 &= +\ 17{,}11'' + 5{,}42383\, di \\
0 &= +\ 75{,}23'' + 2{,}22346\, d\Omega - 0{,}37766\, di \\
0 &= +\ 25{,}66'' + 9{,}29213\, d\varphi - 0{,}36175\, d\Omega - 0{,}57384\, di \\
0 &= -\ 115{,}81'' + 0{,}71612\, d\Pi + 1{,}11063\, d\varphi - 0{,}06392\, d\Omega \\
&\qquad + 0{,}25868\, di \\
0 &= -138534'' + 2458225\, d7 + 62{,}13\, d\Pi - 510{,}58\, d\varphi \\
&\qquad + 213{,}84\, d\Omega + 73{,}45\, di \\
0 &= -\ 371{,}09'' + 5{,}91569\, dL + 7203{,}91\, d7 - 0{,}09344\, d\Pi \\
&\qquad - 2{,}28516\, d\varphi - 0{,}34664\, d\Omega - 0{,}18194\, di,
\end{aligned}$$

woraus wir ableiten

$$\begin{aligned}
di &= -\ 3{,}15'' \\
d\Omega &= -\ 34{,}37'' \\
d\varphi &= -\ 4{,}29'' \\
d\Pi &= +166{,}44'' \\
d7 &= +\ 0{,}054335'' \\
dL &= -\ 3{,}06''.
\end{aligned}$$

Die verbesserten elliptischen Elemente, welche allen sechs Oppositionen möglichst nahe genügen, sind also folgende:

Epoche der mittleren Länge 1803 für den Meridian von Göttingen	221° 34′ 53,64″
Mittlere tägliche tropische Bewegung	770,5010″
Länge des Perihels 1803	121° 8′ 8,54″
Länge des aufsteigenden Knotens 1803	172 28 12,43
Neigung der Bahn	34 37 28,35
Excentricität (= sin [14° 9′ 59,79″])	0,2447424
Logarithmus der grossen Halbaxe	0,4422071.

15.

Setzen wir die soeben gefundenen Werthe der Verbesserungen dL, $d7$ etc. in die zwölf Gleichungen des Art. 12. ein, so erhalten wir die nachfolgenden Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Werthen der heliocentrischen Längen und der geocentrischen Breiten:

Bei d. Opposition des Jahres	Differenz in Länge	Differenz in Breite
1803	−111,00″	− 8,31″
1804	+ 59,18	− 36,67
1805	+ 19,92	+ 0,07
1807	+ 85,77	+ 25,01
1808	+135,88	+ 28,72
1809	−216,54	+ 83,01