Ergänzung zur Theorie
der den kleinsten Fehlern unterworfenen
Combination der Beobachtungen.

(Der Königlichen Societät der Wissenschaften überreicht 1826, Sept. 16.)

1.

In der Abhandlung über die Theorie der Combination der Beobachtungen, welche im 5. Bande der „Commentationes recentiores“ abgedruckt ist, haben wir angenommen, die Grössen, deren Werthe durch nicht völlig genaue Beobachtungen gegeben sind, seien von gewissen unbekannten Elementen so abhängig, dass sie in Form von gegebenen Funktionen dieser Elemente dargestellt seien, und es komme hauptsächlich darauf an, diese Elemente so genau als möglich aus den Beobachtungen abzuleiten.

In den meisten Fällen ist jene Annahme freilich unmittelbar zutreffend. In anderen Fällen aber tritt uns die Aufgabe in ein wenig anderer Gestalt entgegen, so dass es auf den ersten Anblick zweifelhaft erscheint, wie man sie auf die verlangte Form zurückführen könne. Es kommt nämlich nicht selten vor, dass die Grössen, auf welche sich die Beobachtungen beziehen, noch nicht in der Form von Funktionen bestimmter Elemente ausgedrückt sind und auch nicht auf eine solche Form zurückführbar erscheinen, wenigstens nicht bequem oder nicht ohne Umschweife; während andererseits die Natur des Gegenstandes gewisse Bedingungen liefert, denen die wahren Werthe der beobachteten Grössen in aller Strenge genügen müssen.

Wenn man aber genauer zusieht, so bemerkt man leicht, dass dieser Fall sich von dem früheren in der That nicht wesentlich unterscheidet, sondern auf ihn zurückgeführt werden kann. Bezeichnet man nämlich mit π die Anzahl der beobachteten Grössen, mit σ aber die Anzahl der Bedingungsgleichungen, und wählt man von den ersteren nach Belieben $\pi - \sigma$ aus, so steht nichts im Wege, gerade diese als Elemente anzunehmen und die übrigen, deren Anzahl σ sein wird, mit Hülfe der Bedingungsgleichungen als Funktionen von jenen zu betrachten, wodurch die Aufgabe auf unsere Voraussetzung zurückgeführt ist.

Wenn nun aber auch dieser Weg in sehr vielen Fällen thatsächlich bequem genug zum Ziele führt, so lässt sich doch nicht leugnen, dass er nicht ganz natürlich ist, und dass es demnach die Mühe lohnt, die Aufgabe in dieser anderen Form gesondert zu behandeln, und zwar um so mehr, als sie eine sehr elegante Lösung erlaubt. Ja man darf sogar sagen: Da diese neue Lösung zu kürzeren Rechnungen, als die Lösung der Aufgabe im früheren Zustande führt, wenn σ kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ ist, oder, was dasselbe ist, wenn die in der früheren Abhandlung mit ϱ bezeichnete Anzahl der Elemente grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist, so wird man die in der vorliegenden Abhandlung auseinandergesetzte neue Lösung in diesem Fall auch dann noch der früheren vorzuziehen haben, wenn man die Bedingungsgleichungen aus der Natur des Problems ohne Umschweife wegschaffen kann.

2.

Wir bezeichnen mit v, v', v'' etc. die Grössen, in der Anzahl π, deren Werthe durch Beobachtung zu unserer Kenntniss kommen; es hänge nun eine unbekannte Grösse von jenen so ab, dass sie durch eine gegebene Funktion u derselben ausgedrückt sei; es seien ferner l, l', l'' etc. die Werthe der Differentialquotienten

$$\frac{du}{dv}, \frac{du}{dv'}, \frac{du}{dv''} \text{ etc.},$$

welche den wahren Werthen der Grössen v, v', v'' etc. entsprechen. Ebenso wie nun durch Einsetzen dieser wahren Werthe in die Funktion u ihr wahrer Werth hervorgeht, so erhält man, wenn man für v, v', v'' etc. Werthe einsetzt, welche von den wahren bezw. um die Fehler e, e', e'' etc., unterschieden sind, einen fehlerhaften Werth der Unbekannten, dessen Fehler

$$= le + l'e' + l''e'' + \text{etc.}$$

gesetzt werden kann, wenn nur, was wir stets annehmen, die Fehler e, e', e'' etc. so klein sind, dass (für eine nicht lineare Funktion u) ihre Quadrate und Produkte vernachlässigt werden dürfen. Obwohl nun die Grösse der Fehler e, e', e'' etc. unbestimmt bleibt, kann man doch die einer solchen Bestimmung der

Unbekannten anhaftende Unsicherheit allgemein schätzen, und zwar durch den mittleren bei einer solchen Bestimmung zu befürchtenden Fehler, der nach den Principien der früheren Abhandlung

$$= \sqrt{l^2m^2 + l'^2m'^2 + l''^2m''^2 + \text{etc.}}$$

wird, wenn m, m', m'' etc. die mittleren Fehler der Beobachtungen bezeichnen, oder wenn die einzelnen Beobachtungen mit derselben Unsicherheit behaftet sind,

$$= m\sqrt{l^2 + l'^2 + l''^2 + \text{etc.}}\ .$$

Offenbar darf man bei dieser Rechnung für l, l', l'' etc. mit gleichem Recht auch die Werthe der Differentialquotienten nehmen, welche den beobachteten Werthen der Grössen v, v', v'' etc. entsprechen.

3.

Sind die Grössen v, v', v'' etc. vollständig unabhängig von einander, so kann die Unbekannte nur auf eine einzige Weise durch sie bestimmt werden; es kann deshalb jene Unsicherheit alsdann auf keine Weise weder vermieden noch verringert werden, und bei der Ableitung des Werthes der Unbekannten aus den Beobachtungen ist jede Willkür ausgeschlossen.

Ganz anders verhält es sich aber, wenn zwischen den Grössen v, v', v'' etc. eine gegenseitige Abhängigkeit besteht, welche wir durch σ Bedingungsgleichungen

$$X = 0,\ \ Y = 0,\ \ Z = 0 \text{ etc.}$$

ausgedrückt annehmen wollen, wo X, Y, Z etc. gegebene Funktionen der Variabeln v, v', v'' etc. bezeichnen. In diesem Falle kann man unsere Unbekannte auf unendlich viele verschiedene Weisen durch Combinationen der Grössen v, v', v'' etc. bestimmen, da man an Stelle der Funktion u offenbar irgend eine andere U annehmen kann, welche so beschaffen ist, dass $U - u$ identisch verschwindet, wenn man $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc. setzt.

Bei der Anwendung auf einen bestimmten Fall würde sich so zwar kein Unterschied in Bezug auf den Werth der Unbekannten ergeben, wenn die Beobachtungen völlig genau wären; insofern diese aber Fehlern unterworfen sind, würde offenbar im allgemeinen jede einzelne Combination einen anderen Werth der Unbekannten hervorbringen. So erhalten wir an Stelle des Fehlers

$$le + l'e' + l''e'' + \text{etc.},$$

welcher der Funktion u zugehört hatte, für die Funktion U den Fehler

$$Le + L'e' + L''e'' + \text{etc.},$$

wo die Werthe der Differentialquotienten $\frac{dU}{dv}, \frac{dU}{dv'}, \frac{dU}{dv''}$ etc. bezw. mit L, L′, L″ etc. bezeichnet sind. Obwohl wir nun die Fehler selbst nicht angeben können, so werden sich doch die mittleren bei den verschiedenen Combinationen der Beobachtungen zu befürchtenden Fehler mit einander vergleichen lassen; und die beste Combination wird die sein, bei der dieser mittlere Fehler so klein als möglich wird. Da dieser

$$= \sqrt{L^2m^2 + L'^2m'^2 + L''^2m''^2 + \text{etc.}}$$

ist, so wird man darauf hinwirken müssen, dass die Summe $L^2m^2 + L'^2m'^2 + L''^2m''^2 + \text{etc.}$ den kleinsten Werth erhält.

4.

Da die unendliche Mannigfaltigkeit von Funktionen U, welche unter der im vorigen Art. angegebenen Bedingung an die Stelle von u treten können, hier nur insofern zu betrachten ist, als sich hieraus verschiedene Werthsysteme der Coefficienten L, L′, L″ etc. ergeben, so muss man vor allem den Zusammenhang aufsuchen, welcher zwischen sämmtlichen zulässigen Systemen statthaben muss. Bezeichnen wir die bestimmten Werthe der partiellen Differentialquotienten

$$\frac{dX}{dv}, \frac{dX}{dv'}, \frac{dX}{dv''} \text{ etc.}$$
$$\frac{dY}{dv}, \frac{dY}{dv'}, \frac{dY}{dv''} \text{ etc.}$$
$$\frac{dZ}{dv}, \frac{dZ}{dv'}, \frac{dZ}{dv''} \text{ etc. etc.}$$

für den Fall, dass den v, v', v'' etc. ihre wahren Werthe beigelegt werden, bezw. mit

$$a, a', a'' \text{ etc.}$$
$$b, b', b'' \text{ etc.}$$
$$c, c', c'' \text{ etc. etc.},$$

so folgt, wenn man die v, v', v'' etc. solche Zuwachse dv, dv', dv'' etc. annehmen lässt, durch welche X, Y, Z etc. nicht geändert werden und deshalb einzeln $= 0$ bleiben, d. h. welche den Gleichungen

$$0 = adv + a'dv' + a''dv'' + \text{etc.}$$
$$0 = bdv + b'dv' + b''dv'' + \text{etc.}$$
$$0 = cdv + c'dv' + c''dv'' + \text{etc. etc.}$$

genügen, dass sich auch $u - \mathrm{U}$ nicht ändern darf, und daher auch

$$0 = (l - \mathrm{L})\, dv + (l' - \mathrm{L}')\, dv' + (l'' - \mathrm{L}'')\, dv'' + \text{etc.}$$

werden wird. Hieraus schliesst man leicht, dass die Coefficienten L, L′, L″ etc. in folgenden Formeln

$$\mathrm{L} = l + ax + by + cz + \text{etc.}$$
$$\mathrm{L}' = l' + a'x + b'y + c'z + \text{etc.}$$
$$\mathrm{L}'' = l'' + a''x + b''y + c''z + \text{etc. etc.}$$

enthalten sein müssen, wo x, y, z etc. bestimmte Multiplicatoren bezeichnen. Umgekehrt leuchtet ein, wenn ein System von bestimmten Multiplicatoren x, y, z etc. beliebig angenommen wird, dass man stets eine solche Funktion U angeben kann, welcher den obigen Gleichungen genügende Werthe von L, L′, L″ etc. entsprechen, und welche der Bedingung des vorigen Art. gemäss die Funktion u ersetzen kann; ja dass man dies auf unendlich verschiedene Weisen erreichen kann. Der einfachste Fall wird der sein, dass man $\mathrm{U} = u + x\mathrm{X} + y\mathrm{Y} + z\mathrm{Z} + \text{etc.}$ setzt; allgemeiner darf man setzen $\mathrm{U} = u + x\mathrm{X} + y\mathrm{Y} + z\mathrm{Z} + \text{etc.} + u'$, wo u' eine solche Funktion der Variabeln v, v', v'' etc. bezeichnet, welche für $\mathrm{X} = 0$, $\mathrm{Y} = 0$, $\mathrm{Z} = 0$ etc. immer verschwindet, und deren Werth in dem betreffenden bestimmten Fall ein Maximum oder Minimum wird. Aber für unseren Zweck erwächst daraus kein Unterschied.

5.

Es wird nunmehr leicht sein, den Multiplicatoren x, y, z etc. solche Werthe zu geben, dass die Summe

$$\mathrm{L}^2 m^2 + \mathrm{L}'^2 m'^2 + \mathrm{L}''^2 m''^2 + \text{etc.}$$

den kleinsten Werth erhält. Offenbar ist hierzu eine vollkommene Kenntniss der mittleren Fehler m, m', m'' etc. nicht nothwendig, sondern es genügt ihr gegenseitiges Verhältniss. Wir führen deshalb an Stelle derselben die Gewichte der Beobachtungen p, p', p'' etc. ein, d. h. Zahlen, welche den Quadraten m^2, m'^2, m''^2 etc. umgekehrt proportional sind, wobei das Gewicht irgend einer Beobachtung willkürlich gleich der Einheit angenommen wird. Die Grössen

x, y, z etc. müssen daher so bestimmt werden, dass das allgemeine Polynom

$$\frac{(ax + by + cz + \text{etc.} + l)^2}{p} + \frac{(a'x + b'y + c'z + \text{etc.} + l')^2}{p'} + \frac{(a''x + b''y + c''z + \text{etc.} + l'')^2}{p''} + \text{etc.}$$

den kleinsten Werth erhält, was für die *bestimmten* Werthe x^0, y^0, z^0 etc. der Fall sein möge.

Führen wir die Bezeichnungen ein:

$$\frac{a^2}{p} + \frac{a'^2}{p'} + \frac{a''^2}{p''} + \text{etc.} = [aa]$$
$$\frac{ab}{p} + \frac{a'b'}{p'} + \frac{a''b''}{p''} + \text{etc.} = [ab]$$
$$\frac{ac}{p} + \frac{a'c'}{p'} + \frac{a''c''}{p''} + \text{etc.} = [ac]$$
$$\frac{b^2}{p} + \frac{b'^2}{p'} + \frac{b''^2}{p''} + \text{etc.} = [bb]$$
$$\frac{bc}{p} + \frac{b'c'}{p'} + \frac{b''c''}{p''} + \text{etc.} = [bc]$$
$$\frac{c^2}{p} + \frac{c'^2}{p'} + \frac{c''^2}{p''} + \text{etc.} = [cc]$$

etc., und ferner

$$\frac{al}{p} + \frac{a'l'}{p'} + \frac{a''l''}{p''} + \text{etc.} = [al]$$
$$\frac{bl}{p} + \frac{b'l'}{p'} + \frac{b''l''}{p''} + \text{etc.} = [bl]$$
$$\frac{cl}{p} + \frac{c'l'}{p'} + \frac{c''l''}{p''} + \text{etc.} = [cl]$$

etc.,

so erfordert die Bedingung eines Minimum offenbar, dass wird

$$\left.\begin{aligned} 0 &= [aa]\,x^0 + [ab]\,y^0 + [ac]\,z^0 + \text{etc.} + [al] \\ 0 &= [ab]\,x^0 + [bb]\,y^0 + [bc]\,z^0 + \text{etc.} + [bl] \\ 0 &= [ac]\,x^0 + [bc]\,y^0 + [cc]\,z^0 + \text{etc.} + [cl] \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Sind die Grössen x^0, y^0, z^0 etc. durch Elimination hieraus abgeleitet, so setze man

$$\left.\begin{array}{l} a\,x^0 + b\,y^0 + c\,z^0 + \text{etc.} + l = \mathrm{L} \\ a'x^0 + b'y^0 + c'z^0 + \text{etc.} + l' = \mathrm{L}' \\ a''x^0 + b''y^0 + c''z^0 + \text{etc.} + l'' = \mathrm{L}'' \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Alsdann wird die zur Bestimmung unserer Unbekannten zweckmässigste und der geringsten Unsicherheit unterworfene Funktion der Grössen v, v', v'' etc. die sein, deren partielle Differentialquotienten in dem betreffenden bestimmten Fall bezw. die Werthe L, L′, L″ etc. haben, und das Gewicht dieser Bestimmung, welches wir mit P bezeichnen wollen, wird

$$= \frac{1}{\frac{\mathrm{L}^2}{p} + \frac{\mathrm{L}'^2}{p'} + \frac{\mathrm{L}''^2}{p''} + \text{etc.}} \qquad (3)$$

sein, oder $\frac{1}{\mathrm{P}}$ wird der Werth des oben angeführten Polynoms für dasjenige Werthsystem der Grössen x, y, z etc. sein, welches den Gleichungen (1) Genüge leistet.

6.

Im vorhergehenden Art. lehrten wir diejenige Funktion U kennen, welche zur zweckmässigsten Bestimmung unserer Unbekannten verhilft; nun wollen wir sehen, welchen *Werth* die Unbekannte auf diese Weise erlangt. Es werde dieser Werth mit K bezeichnet, welcher demnach entsteht, wenn man in U die beobachteten Werthe der Grössen v, v', v'' etc. einsetzt; für dieselbe Substitution erhalte die Funktion u den Werth k; endlich sei $\varkappa$ der wahre Werth der Unbekannten, wie er also durch die Substitution der wahren Werthe der Grössen v, v', v'' etc. erhalten werden würde, wenn man eine solche in U oder u ausführen könnte. Hiernach wird mithin

$$\begin{aligned} k &= \varkappa + le + l'e' + l''e'' + \text{etc.} \\ \mathrm{K} &= \varkappa + \mathrm{L}e + \mathrm{L}'e' + \mathrm{L}''e'' + \text{etc.} \end{aligned}$$

und ferner

$$\mathrm{K} = k + (\mathrm{L} - l)\,e + (\mathrm{L}' - l')\,e' + (\mathrm{L}'' - l'')\,e'' + \text{etc.}$$

Setzt man in dieser Gleichung für $\mathrm{L} - l$, $\mathrm{L}' - l'$, $\mathrm{L}'' - l''$ etc. ihre Werthe aus (2), und bezeichnet

$$\left.\begin{array}{l} ae + a'e' + a''e'' + \text{etc.} = \mathfrak{A} \\ be + b'e' + b''e'' + \text{etc.} = \mathfrak{B} \\ ce + c'e' + c''e'' + \text{etc.} = \mathfrak{C} \end{array}\right\} \qquad (4)$$

etc., so hat man

$$K = k + \mathfrak{A}x^0 + \mathfrak{B}y^0 + \mathfrak{C}z^0 + \text{etc.} \tag{5}$$

Die Werthe der Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. kann man nun freilich nach den Formeln (4) nicht berechnen, da die Fehler e, e', e'' etc. unbekannt bleiben; aber es ist von selber klar, dass jene nichts anderes sind, als die Werthe der Funktionen X, Y, Z etc., welche sich ergeben, wenn man für v, v', v'' etc. die beobachteten Werthe einsetzt. Sonach bildet das System der Gleichungen (1), (3), (5) die vollständige Lösung unserer Aufgabe, da unsere am Ende des Art. 2. gegebenen Vorschriften über die Berechnung der Grössen l, l', l'' etc. aus den beobachteten Werthen der Grössen v, v', v'' etc. offenbar mit gleichem Rechte auf die Berechnung der Grössen a, a', a'' etc., b, b', b'' etc. ausgedehnt werden dürfen.

7.

An Stelle der Formel (3), welche das Gewicht der plausibelsten Bestimmung ausdrückt, lassen sich noch einige andere finden, welche zu entwickeln die Mühe lohnen wird.

Zunächst bemerken wir, dass durch Multiplication der Gleichungen (2) bezw. mit $\frac{a}{p}$, $\frac{a'}{p'}$, $\frac{a''}{p''}$ etc. und durch Addition erhalten wird

$$[aa]\,x^0 + [ab]\,y^0 + [ac]\,z^0 + \text{etc.} + [al] = \frac{aL}{p} + \frac{a'L'}{p'} + \frac{a''L''}{p''} + \text{etc.}$$

Die linke Seite wird $= 0$, die rechte bezeichnen wir der Analogie gemäss mit $[aL]$, und erhalten so

$$[aL] = 0, \text{ und weiter ebenso } [bL] = 0, \; [cL] = 0 \text{ etc.}$$

Ferner finden wir, wenn wir die Gleichungen (2) der Reihe nach mit $\frac{L}{p}$, $\frac{L'}{p'}$, $\frac{L''}{p''}$ etc. multipliciren und addiren

$$\frac{lL}{p} + \frac{l'L'}{p'} + \frac{l''L''}{p''} + \text{etc.} = \frac{L^2}{p} + \frac{L'^2}{p'} + \frac{L''^2}{p''} + \text{etc.},$$

und erhalten so einen *zweiten* Ausdruck für das Gewicht

$$P = \frac{1}{\frac{lL}{p} + \frac{l'L'}{p'} + \frac{l''L''}{p''} + \text{etc.}}.$$

Multipliciren wir endlich die Gleichungen (2) der Reihe nach mit $\frac{l}{p}$, $\frac{l'}{p'}$, $\frac{l''}{p''}$ etc. und addiren, so gelangen wir zum *dritten* Ausdruck für das Gewicht

$$\mathrm{P} = \frac{1}{[al]\,x^0 + [bl]\,y^0 + [cl]\,z^0 + \text{etc.} + [ll]},$$

wenn wir nach Analogie der übrigen Bezeichnungen

$$\frac{l^2}{p} + \frac{l'^2}{p'} + \frac{l''^2}{p''} + \text{etc.} = [ll]$$

setzen. Hiernach gehen wir mit Hülfe der Gleichungen (1) leicht zum *vierten* Ausdruck über, den wir folgendermaassen schreiben:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{P}} = [ll] - [aa]\,x^{0\,2} - [bb]\,y^{0\,2} - [cc]\,z^{0\,2} - \text{etc.}\\ - 2[ab]\,x^0 y^0 - 2[ac]\,x^0 z^0 - 2[bc]\,y^0 z^0 - \text{etc.}\end{aligned}$$

8.

Die allgemeine Lösung, die wir bis jetzt gaben, ist besonders auf den Fall eingerichtet, dass nur *eine* von den beobachteten Grössen abhängige Unbekannte zu bestimmen ist. Wenn aber die plausibelsten Werthe mehrerer von denselben Beobachtungen abhängiger Unbekannten in Frage stehen, oder wenn es noch ungewiss ist, welche Unbekannten man vor allem aus den Beobachtungen ableiten soll, dann verfährt man mit ihnen besser auf eine andere Weise, welche wir nun entwickeln wollen.

Wir betrachten die Grössen x, y, z etc. als Variable und setzen

$$\left.\begin{aligned}[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + \text{etc.} &= \xi\\ [ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + \text{etc.} &= \eta\\ [ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + \text{etc.} &= \zeta\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

etc., und nehmen an, durch Elimination folge hieraus

$$\left.\begin{aligned}[\alpha\alpha]\,\xi + [\alpha\beta]\,\eta + [\alpha\gamma]\,\zeta + \text{etc.} &= x\\ [\beta\alpha]\,\xi + [\beta\beta]\,\eta + [\beta\gamma]\,\zeta + \text{etc.} &= y\\ [\gamma\alpha]\,\xi + [\gamma\beta]\,\eta + [\gamma\gamma]\,\zeta + \text{etc.} &= z\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

etc.

Vor allem ist hier zu bemerken, dass die symmetrisch stehenden Coefficienten nothwendig einander gleich sind, also

$$\begin{aligned}[][\beta\alpha] &= [\alpha\beta]\\ [\gamma\alpha] &= [\alpha\gamma]\\ [\gamma\beta] &= [\beta\gamma]\\ &\text{etc.,}\end{aligned}$$

was sich zwar schon aus der allgemeinen Theorie der Elimination aus linearen Gleichungen von selber ergiebt, ausserdem aber später auch noch einmal direkt von uns bewiesen werden soll.

Wir erhalten also

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= -[\alpha\alpha][al] - [\alpha\beta][bl] - [\alpha\gamma][cl] - \text{etc.}\\ y^0 &= -[\alpha\beta][al] - [\beta\beta][bl] - [\beta\gamma][cl] - \text{etc.}\\ z^0 &= -[\alpha\gamma][al] - [\beta\gamma][bl] - [\gamma\gamma][cl] - \text{etc.}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$
etc.

und hieraus, wenn wir

$$\left.\begin{aligned} [\alpha\alpha]\mathfrak{A} + [\alpha\beta]\mathfrak{B} + [\alpha\gamma]\mathfrak{C} + \text{etc.} &= \mathrm{A}\\ [\alpha\beta]\mathfrak{A} + [\beta\beta]\mathfrak{B} + [\beta\gamma]\mathfrak{C} + \text{etc.} &= \mathrm{B}\\ [\alpha\gamma]\mathfrak{A} + [\beta\gamma]\mathfrak{B} + [\gamma\gamma]\mathfrak{C} + \text{etc.} &= \mathrm{C}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

etc. setzen,

$$\mathrm{K} = k - \mathrm{A}[al] - \mathrm{B}[bl] - \mathrm{C}[cl] - \text{etc.}$$

oder, wenn wir ausserdem

$$\left.\begin{aligned} a\,\mathrm{A} + b\,\mathrm{B} + c\,\mathrm{C} + \text{etc.} &= p\,\varepsilon\\ a'\mathrm{A} + b'\mathrm{B} + c'\mathrm{C} + \text{etc.} &= p'\varepsilon'\\ a''\mathrm{A} + b''\mathrm{B} + c''\mathrm{C} + \text{etc.} &= p''\varepsilon''\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

etc. setzen,

$$\mathrm{K} = k - l\varepsilon - l'\varepsilon' - l''\varepsilon'' - \text{etc.} \tag{11}$$

9.

Eine Vergleichung der Gleichungen (7) und (9) lehrt, dass die Hülfsgrössen A, B, C etc. diejenigen Werthe der Variabeln x, y, z etc. sind, welche den Werthen $\xi = \mathfrak{A}$, $\eta = \mathfrak{B}$, $\zeta = \mathfrak{C}$ etc. der Variabeln ξ, η, ζ etc. entsprechen; woraus folgt, dass man

$$\left.\begin{aligned} [aa]\,\mathrm{A} + [ab]\,\mathrm{B} + [ac]\,\mathrm{C} + \text{etc.} &= \mathfrak{A}\\ [ab]\,\mathrm{A} + [ab]\,\mathrm{B} + [bc]\,\mathrm{C} + \text{etc.} &= \mathfrak{B}\\ [ac]\,\mathrm{A} + [ab]\,\mathrm{B} + [cc]\,\mathrm{C} + \text{etc.} &= \mathfrak{C}\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

etc. erhält. Multiplicirt man also die Gleichungen (10) bezw. mit $\frac{a}{p}$, $\frac{a'}{p'}$, $\frac{a''}{p''}$ etc. und addirt, so erhält man und analog weiter

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A} &= a\varepsilon + a'\varepsilon' + a''\varepsilon'' + \text{etc.}\\ \mathfrak{B} &= b\varepsilon + b'\varepsilon' + b''\varepsilon'' + \text{etc.}\\ \mathfrak{C} &= c\varepsilon + c'\varepsilon' + c''\varepsilon'' + \text{etc.}\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

etc. Da nun $\mathfrak{A}$ der Werth der Funktion X ist, falls man für v, v', v'' etc. die beobachteten Werthe einsetzt, so sieht man leicht, dass, wenn man an diese bezw. die Verbesserungen $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. anbringt, die Funktion X alsdann den Werth 0 erhalte, und dass die Funktionen Y, Z etc. alsdann ebenfalls zum Verschwinden gebracht werden. Auf dieselbe Weise schliesst man aus der Gleichung (11), dass K der Werth der Funktion u ist, welcher sich durch die nämliche Substitution ergiebt.

Das Anbringen der Verbesserungen $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. an die Beobachtungen werden wir *die Ausgleichung der Beobachtungen* nennen, und offenbar werden wir zu dem folgenden sehr wichtigen Schluss geführt, dass die auf die vorgetragene Weise ausgeglichenen Beobachtungen alle Bedingungsgleichungen genau erfüllen, und dass jede von den Beobachtungen irgendwie abhängige Grösse gerade den Werth erhält, welcher aus der zweckmässigsten Combination der ungeänderten Beobachtungen hervorgehen würde. Wenn es also auch unmöglich ist, die Fehler e, e', e'' etc. selbst aus den Bedingungsgleichungen zu bestimmen, da ja deren Anzahl nicht ausreicht, so haben wir wenigstens *plausibelste Fehler* erlangt, welchen Namen wir den Grössen ε, ε', ε'' etc. geben dürfen.

10.

Da wir die Anzahl der Beobachtungen grösser, als die Anzahl der Bedingungsgleichungen annehmen, so lassen sich ausser dem System der plausibelsten Verbesserungen $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. unendlich viele andere finden, welche die Bedingungsgleichungen befriedigen, und es ist der Mühe werth, zu untersuchen, wie diese sich zu jenen verhalten. Es sei also $-\mathrm{E}$, $-\mathrm{E}'$, $-\mathrm{E}''$ etc. ein solches, von dem plausibelsten verschiedenes System, so haben wir

$$\begin{aligned} a\mathrm{E} + a'\mathrm{E}' + a''\mathrm{E}'' + \text{etc.} &= \mathfrak{A}\\ b\mathrm{E} + b'\mathrm{E}' + b''\mathrm{E}'' + \text{etc.} &= \mathfrak{B}\\ c\mathrm{E} + c'\mathrm{E}' + c''\mathrm{E}'' + \text{etc.} &= \mathfrak{C}\end{aligned}$$

etc. Multiplicirt man diese Gleichungen bezw. mit A, B, C etc., und addirt, so erhält man mit Hülfe der Gleichungen (10)

$$p\varepsilon\mathrm{E} + p'\varepsilon'\mathrm{E}' + p''\varepsilon''\mathrm{E}'' + \text{etc.} = \mathrm{A}\mathfrak{A} + \mathrm{B}\mathfrak{B} + \mathrm{C}\mathfrak{C} + \text{etc.}$$

Auf ganz ähnliche Weise liefern aber die Gleichungen (13)

$$p\varepsilon^2 + p'\varepsilon'^2 + p''\varepsilon''^2 + \text{etc.} = \mathrm{A}\mathfrak{A} + \mathrm{B}\mathfrak{B} + \mathrm{C}\mathfrak{C} + \text{etc.} \qquad (14)$$

Durch Combination dieser beiden Gleichungen leitet man leicht ab

$$\begin{aligned} &p\mathrm{E}^2 + p'\mathrm{E}'^2 + p''\mathrm{E}''^2 + \text{etc.} \\ = &\, p\varepsilon^2 + p'\varepsilon'^2 + p''\varepsilon''^2 + \text{etc.} + p(\mathrm{E} - \varepsilon)^2 + p'(\mathrm{E}' - \varepsilon')^2 \\ &+ p''(\mathrm{E}'' - \varepsilon'')^2 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Die Summe $p\mathrm{E}^2 + p'\mathrm{E}'^2 + p''\mathrm{E}''^2 + \text{etc.}$ wird also nothwendig *grösser* sein als die Summe $p\varepsilon^2 + p'\varepsilon'^2 + p''\varepsilon''^2 + \text{etc.}$, was man ausdrücken kann als

Lehrsatz. Die Summe der mit den beziehentlichen Gewichten der Beobachtungen multiplicirten Quadrate von Verbesserungen, durch welche man die Beobachtungen mit den Bedingungsgleichungen in Uebereinstimmung zu bringen vermag, wird ein Minimum, wenn man die plausibelsten Verbesserungen anwendet.

Dies ist eben das Princip der kleinsten Quadrate, aus welchem auch die Gleichungen (12) und (10) leicht unmittelbar hätten abgeleitet werden können. Uebrigens liefert uns die Gleichung (14) für diese kleinste Summe, welche wir im Folgenden mit S bezeichnen werden, den Ausdruck $\mathfrak{A}\mathrm{A} + \mathfrak{B}\mathrm{B} + \mathfrak{C}\mathrm{C} + \text{etc.}$

11.

Die Bestimmung der plausibelsten Fehler giebt, da sie von den Coefficienten l, l', l'' etc. unabhängig ist, offenbar die bequemste Vorbereitung zu jedwedem Gebrauch, für den man die Beobachtungen verwenden will. Ausserdem ist es klar, dass man zu diesem Geschäft der *unbestimmten* Elimination oder der Kenntniss der Coefficienten $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ etc. nicht bedarf, und dass man nur die Hülfsgrössen A, B, C etc., welche wir im Folgenden die *Correlaten* der Bedingungsgleichungen $\mathrm{X} = 0$, $\mathrm{Y} = 0$, $\mathrm{Z} = 0$ etc. nennen werden, aus den Gleichungen (12) durch bestimmte Elimination abzuleiten und in die Formeln (10) einzusetzen hat.

Obwohl nun diese Methode thatsächlich nichts zu wünschen übrig lässt, wenn allein die plausibelsten Werthe der von den Beobachtungen abhängigen Grössen verlangt werden, so scheint es sich doch anders zu verhalten, wenn ausserdem das Gewicht irgend einer Bestimmung gewünscht wird, da hierzu, mag man nun diesen oder jenen der oben gegebenen vier Ausdrücke benutzen, die Kenntniss der Grössen L, L′, L″ etc., oder doch wenigstens die Kenntniss von x^0, y^0, z^0 etc. nothwendig erscheint. Aus diesem Grunde wird es nützlich sein, das Eliminationsverfahren genauer zu untersuchen, wodurch sich uns auch ein leichterer Weg zur Auffindung der Gewichte erschliessen wird.

12.

Der Zusammenhang der in dieser Untersuchung vorkommenden Grössen wird wesentlich durch die Einführung der allgemeinen Funktion zweiten Grades

$$[aa]x^2 + 2[ab]xy + 2[ac]xz + \text{etc.}$$
$$+ [bb]y^2 + 2[bc]yz + \text{etc.} + [cc]z^2 + \text{etc.},$$

welche wir mit T bezeichnen wollen, aufgehellt. Zunächst ist diese Funktion offenbar sofort gleich

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(ax+by+cz+\text{etc.})^2}{p}+\frac{(a'x+b'y+c'z+\text{etc.})^2}{p'}\\&+\frac{(a''x+b''y+c''z+\text{etc.})^2}{p''}+\text{etc.}\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Ferner ist offenbar

$$\mathrm{T} = x\xi + y\eta + z\zeta + \text{etc.} \qquad (16)$$

und, wenn hier wiederum x, y, z etc. mit Hülfe der Gleichungen (7) durch ξ, η, ζ etc. ausgedrückt werden,

$$\mathrm{T} = [\alpha\alpha]\xi^2 + 2[\alpha\beta]\xi\eta + 2[\alpha\gamma]\xi\zeta + \text{etc.}$$
$$+ [\beta\beta]\eta^2 + 2[\beta\gamma]\eta\zeta + \text{etc.} + [\gamma\gamma]\zeta^2 + \text{etc.}$$

Die oben entwickelte Theorie enthält je zwei Systeme von bestimmten Werthen der Grössen x, y, z etc. und ξ, η, ζ etc.: dem ersten, in welchem $x = x^0$, $y = y^0$, $z = z^0$ etc. und $\xi = -[al]$, $\eta = -[bl]$, $\zeta = -[cl]$ etc. ist, entspricht der folgende Werth des T

$$\mathrm{T} = [ll] - \frac{1}{\mathrm{P}},$$

was entweder durch Vergleichung des dritten Ausdrucks für das Gewicht P mit der Gleichung (16) oder unmittelbar aus dem vierten Ausdrucke erhellt; dem zweiten, in welchem $x = \mathrm{A}$, $y = \mathrm{B}$, $z = \mathrm{C}$ etc. und $\xi = \mathfrak{A}$, $\eta = \mathfrak{B}$, $\zeta = \mathfrak{C}$ etc. ist, entspricht der Werth $\mathrm{T} = \mathrm{S}$, wie sowohl aus den Formeln (10) und (15), als aus (14) und (16) klar ist.

13.

Unsere Hauptarbeit besteht nunmehr in einer ähnlichen Transformation der Funktion T, wie die, welche wir in der „Theorie der Bewegung der Himmelskörper", Art. 182., und weitläufiger in der „Untersuchung über die elliptischen Elemente der Pallas" vorgetragen haben. Wir setzen nämlich

$$\left.\begin{array}{lll}
[bb,1] & = & [bb] - \dfrac{[ab]^2}{[aa]} \\
[bc,1] & = & [bc] - \dfrac{[ab]\,[ac]}{[aa]} \\
[bd,1] & = & [bd] - \dfrac{[ab]\,[ad]}{[aa]} \\
\text{etc.} & & \\
[cc,2] & = & [cc] - \dfrac{[ac]^2}{[aa]} - \dfrac{[bc,1]^2}{[bb,1]} \\
[cd,2] & = & [cd] - \dfrac{[ac]\,[ad]}{[aa]} - \dfrac{[bc,1]\,[bd,1]}{[bb,1]} \\
\text{etc.} & & \\
[dd,3] & = & [dd] - \dfrac{[ad]^2}{[aa]} - \dfrac{[bd,1]^2}{[bb,1]} - \dfrac{[cd,2]^2}{[cc,2]}
\end{array}\right\} \quad (17)$$

etc. etc. Setzt man alsdann*)

$$\begin{array}{r}
[bb,1]\,y + [bc,1]\,z + [bd,1]\,w + \text{etc.} = \eta' \\
[cc,2]\,z + [cd,2]\,w + \text{etc.} = \zeta'' \\
[dd,3]\,w + \text{etc.} = \varphi'''
\end{array}$$

etc., dann wird

$$T = \frac{\xi^2}{[aa]} + \frac{\eta'^2}{[bb,1]} + \frac{\zeta''^2}{[cc,2]} + \frac{\varphi'''^2}{[dd,3]} + \text{etc.},$$

und die Abhängigkeit der Grössen η', ζ'', φ''' etc. von ξ, η, ζ, φ etc. wird durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

---

*) Im Vorhergehenden konnten je drei, auf die drei ersten Bedingungsgleichungen bezügliche Buchstaben für die verschiedenen Grössensysteme genügen; hier schien es aber gut, um das Gesetz des Algorithmus deutlicher zu zeigen, einen vierten hinzuzufügen; während nun in der natürlichen Ordnung auf die Buchstaben a, b, c; A, B, C; 𝔄, 𝔅, ℭ von selbst d, D, 𝔇 folgt, fügten wir der Reihe x, y, z, da das Alphabet versagte, das w und den ξ, η, ζ das φ an.

$$\eta' = \eta - \frac{[ab]}{[aa]}\xi$$

$$\zeta'' = \zeta - \frac{[ac]}{[aa]}\xi - \frac{[bc, 1]}{[bb, 1]}\eta'$$

$$\varphi''' = \varphi - \frac{[ad]}{[aa]}\xi - \frac{[bd, 1]}{[bb, 1]}\eta' - \frac{[cd, 2]}{[cc, 2]}\zeta''$$

etc.

Hieraus werden nun alle für unseren Zweck nothwendigen Formeln leicht entnommen. Zur Bestimmung der Correlaten A, B, C etc. setzen wir nämlich

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{B}' &= \mathfrak{B} - \frac{[ab]}{[aa]}\mathfrak{A}\\ \mathfrak{C}'' &= \mathfrak{C} - \frac{[ac]}{[aa]}\mathfrak{A} - \frac{[bc, 1]}{[bb, 1]}\mathfrak{B}'\\ \mathfrak{D}''' &= \mathfrak{D} - \frac{[ad]}{[aa]}\mathfrak{A} - \frac{[bd, 1]}{[bb, 1]}\mathfrak{B}' - \frac{[cd, 2]}{[cc, 2]}\mathfrak{C}''\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

etc., und hiernach werden A, B, C, D etc. durch folgende Formeln, und zwar in umgekehrter Reihenfolge, indem man mit der letzten beginnt, erhalten:

$$\left.\begin{aligned}[aa]\,\mathrm{A} + [ab]\,\mathrm{B} + [ac]\,\mathrm{C} + [ad]\,\mathrm{D} + \text{etc.} &= \mathfrak{A}\\ [bb, 1]\,\mathrm{B} + [bc, 1]\,\mathrm{C} + [bd, 1]\,\mathrm{D} + \text{etc.} &= \mathfrak{B}'\\ [cc, 2]\,\mathrm{C} + [cd, 2]\,\mathrm{D} + \text{etc.} &= \mathfrak{C}''\\ [dd, 3]\,\mathrm{D} + \text{etc.} &= \mathfrak{D}'''\\ \text{etc.} &\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Für die Summe S aber erhalten wir die neue Formel

$$\mathrm{S} = \frac{\mathfrak{A}^2}{[aa]} + \frac{\mathfrak{B}'^2}{[bb, 1]} + \frac{\mathfrak{C}''^2}{[cc, 2]} + \frac{\mathfrak{D}'''^2}{[dd, 3]} + \text{etc.} \quad (20)$$

Wenn schliesslich das Gewicht P verlangt wird, welches der plausibelsten Bestimmung der durch die Funktion u ausgedrückten Grösse zu geben ist, so machen wir

$$\left.\begin{aligned}[bl, 1] &= [bl] - \frac{[ab]\,[al]}{[aa]}\\ [cl, 2] &= [cl] - \frac{[ac]\,[al]}{[aa]} - \frac{[bc, 1]\,[bl, 1]}{[bb, 1]}\\ [dl, 3] &= [dl] - \frac{[ad]\,[al]}{[aa]} - \frac{[bd, 1]\,[bl, 1]}{[bb, 1]} - \frac{[cd, 2]\,[cl, 2]}{[cc, 2]}\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

etc., und erhalten alsdann

$$\frac{1}{\mathrm{P}} = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl,1]^2}{[bb,1]} - \frac{[cl,2]^2}{[cc,2]} - \frac{[dl,3]^2}{[dd,3]} - \text{etc.} \quad (22)$$

Die Formeln (17) bis (22), deren Einfachheit nichts zu wünschen übrig zu lassen scheint, enthalten die in jeder Beziehung vollständige Lösung unserer Aufgabe.

14.

Nachdem wir die Hauptaufgaben gelöst haben, wollen wir noch einige Nebenfragen behandeln, welche auf diesen Gegenstand ein helleres Licht werfen werden.

Zunächst muss man untersuchen, ob die Elimination, vermittelst deren x, y, z etc. aus ξ, η, ζ etc. abzuleiten sind, jemals unmöglich werden kann. Dies würde offenbar eintreten, wenn die Funktionen ξ, η, ζ etc. nicht von einander unabhängig wären. Nehmen wir daher für den Augenblick an, eine von ihnen werde durch die übrigen bereits bestimmt, so dass die identische Gleichung stattfinde

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \text{etc.} = 0,$$

wo α, β, γ etc. bestimmte Zahlen bezeichnen. Es wird demnach

$$\begin{aligned}
\alpha[aa] + \beta[ab] + \gamma[ac] + \text{etc.} &= 0 \\
\alpha[ab] + \beta[bb] + \gamma[bc] + \text{etc.} &= 0 \\
\alpha[ac] + \beta[bc] + \gamma[cc] + \text{etc.} &= 0
\end{aligned}$$

etc.; setzen wir nun

$$\begin{aligned}
\alpha a + \beta b + \gamma c + \text{etc.} &= p\,\Theta \\
\alpha a' + \beta b' + \gamma c' + \text{etc.} &= p'\Theta' \\
\alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' + \text{etc.} &= p''\Theta''
\end{aligned}$$

etc., so folgt hieraus von selbst

$$\begin{aligned}
a\Theta + a'\Theta' + a''\Theta'' + \text{etc.} &= 0 \\
b\Theta + b'\Theta' + b''\Theta'' + \text{etc.} &= 0 \\
c\Theta + c'\Theta' + c''\Theta'' + \text{etc.} &= 0
\end{aligned}$$

etc., und ferner

$$p\Theta^2 + p'\Theta'^2 + p''\Theta''^2 + \text{etc.} = 0,$$

eine Gleichung, welche, da alle p, p', p'' etc. ihrer Natur nach positive Grössen sind, offenbar nicht bestehen kann, wenn nicht $\Theta = 0$, $\Theta' = 0$, $\Theta'' = 0$ etc. gewesen ist.

Nun betrachten wir die Werthe der vollständigen Differentiale

dX, dY, dZ etc., welche denjenigen Werthen der Grössen v, v', v'' etc. entsprechen, auf welche sich die Beobachtungen beziehen. Diese Differentiale, nämlich

$$a\,dv + a'\,dv' + a''\,dv'' + \text{etc.}$$
$$b\,dv + b'\,dv' + b''\,dv'' + \text{etc.}$$
$$c\,dv + c'\,dv' + c''\,dv'' + \text{etc.}$$

etc., werden dem Schlusse zufolge, zu dem wir eben geführt worden sind, so von einander abhängen, dass ihre Summe nach der beziehentlichen Multiplication mit α, β, γ etc. identisch verschwinden muss, oder, was dasselbe ist, dass jedes einzelne von ihnen (wenigstens wenn der ihm entsprechende Faktor α, β, γ etc. nicht verschwindet) von selbst verschwinden muss, sobald wie alle übrigen als verschwindend vorausgesetzt werden. Deshalb muss (mindestens) eine von den Bedingungsgleichungen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc. überflüssig sein, da sie von selbst erfüllt wird, sobald den übrigen genügt ist.

Wird übrigens die Sache genauer untersucht, so ist klar, dass dieser Schluss an und für sich nur für einen unendlich kleinen Spielraum der Veränderlichkeit der Variabeln gilt. Es sind nämlich eigentlich zwei Fälle zu unterscheiden: erstens, wo eine der Bedingungsgleichungen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc. unbedingt und allgemein bereits in den übrigen enthalten ist, was man in jedem einzelnen Fall leicht wird vermeiden können; zweitens, wo so zu sagen zufällig für die bestimmten Werthe der Grössen v, v', v'' etc., auf welche sich die Beobachtungen beziehen, eine der Funktionen X, Y, Z etc., z. B. die erste X, einen grössten oder kleinsten (oder allgemeiner einen stationären) Werth erlangt in Hinblick auf alle Aenderungen, welche wir den Grössen v, v', v'' etc. geben können, ohne die Gleichungen $Y = 0$, $Z = 0$ etc. zu stören. Da aber in unserer Untersuchung die Veränderlichkeit der Grössen nur in so engen Grenzen betrachtet werden soll, dass sie als unendlich klein behandelt werden kann, so hat dieser zweite Fall (der in der Praxis kaum je vorkommt) dieselbe Wirkung wie der erste, nämlich dass eine der Bedingungsgleichungen als überflüssig zu verwerfen sein wird; wir können also sicher sein, wenn alle aufgenommenen Bedingungsgleichungen in dem hier vorausgesetzten Sinne von einander unabhängig sind, dass die Elimination nothwendigerweise möglich sein muss. Eine ausführlichere Untersuchung dieses Gegenstandes, deren er mehr seiner theoretischen Feinheit als seiner praktischen Nützlichkeit wegen würdig ist, müssen wir uns indessen für eine andere Gelegenheit vorbehalten.

15.

In den Art. 37. u. ff. der früheren Abhandlung haben wir eine Methode gelehrt, wie man die Genauigkeit der Beobachtungen a posteriori so scharf wie möglich bestimmen kann. Wenn nämlich die angenäherten Werthe von π Grössen durch Beobachtungen von gleicher Genauigkeit gefunden worden sind und mit denjenigen Werthen verglichen werden, welche durch Rechnung aus den plausibelsten Werthen der ϱ Elemente hervorgehen, von denen jene abhängen, so muss man die Quadrate der Differenzen addiren, und diese Summe durch $\pi - \varrho$ dividiren, wonach der Quotient als angenäherter Werth des Quadrates des einer derartigen Beobachtungsgruppe anhaftenden mittleren Fehlers betrachtet werden kann. Sind die Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit, so sind diese Vorschriften nur insofern abzuändern, als vor der Addition die Quadrate mit den Gewichten der Beobachtungen zu multipliciren sind, worauf der sich so ergebende mittlere Fehler für Beobachtungen gilt, deren Gewicht als Einheit angenommen worden ist.

In der vorliegenden Untersuchung stimmt nun jene Summe offenbar mit der Summe S, und die Differenz $\pi - \varrho$ mit der Anzahl σ der Bedingungsgleichungen überein, weshalb wir für den mittleren Fehler der Beobachtungen vom Gewichte $= 1$ den Ausdruck $\sqrt{\frac{S}{\sigma}}$ erhalten, eine Bestimmung, welche um so grösseres Vertrauen verdient, je grösser die Anzahl σ gewesen ist.

Es wird aber die Mühe lohnen, dies auch unabhängig von der früheren Untersuchung festzustellen. Hierzu empfiehlt es sich, einige neue Bezeichnungen einzuführen. Es mögen nämlich den nachstehenden Werthen der Variabeln ξ, η, ζ etc.

$$\xi = a, \quad \eta = b, \quad \zeta = c \text{ etc.}$$

folgende Werthe der x, y, z etc. entsprechen

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma \text{ etc.},$$

so dass man erhält

$$\begin{aligned}
\alpha &= a\,[\alpha\alpha] + b\,[\alpha\beta] + c\,[\alpha\gamma] + \text{etc.} \\
\beta &= a\,[\alpha\beta] + b\,[\beta\beta] + c\,[\beta\gamma] + \text{etc.} \\
\gamma &= a\,[\alpha\gamma] + b\,[\beta\gamma] + c\,[\gamma\gamma] + \text{etc.}
\end{aligned}$$

etc. Ebenso mögen den Werthen

$$\xi = a', \quad \eta = b', \quad \zeta = c' \text{ etc.}$$

die folgenden

$$x = \alpha', \quad y = \beta', \quad z = \gamma' \text{ etc.}$$

entsprechen, und den

$$\xi = a'', \quad \eta = b'', \quad \zeta = c'' \text{ etc.}$$

ebenso

$$x = \alpha'', \quad y = \beta'', \quad z = \gamma'' \text{ etc.}$$

und so weiter.

Unter dieser Voraussetzung erhält man durch Combination der Gleichungen (4) und (9)

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'' + \text{etc.} \\ \mathrm{B} &= \beta e + \beta' e' + \beta'' e'' + \text{etc.} \\ \mathrm{C} &= \gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e'' + \text{etc.} \end{aligned}$$

etc. Da nun $\mathrm{S} = \mathfrak{A}\mathrm{A} + \mathfrak{B}\mathrm{B} + \mathfrak{C}\mathrm{C} + \text{etc.}$ ist, so wird offenbar

$$\begin{aligned} \mathrm{S} = \; & (ae + a'e' + a''e'' + \text{etc.})(\alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'' + \text{etc.}) \\ + \; & (be + b'e' + b''e'' + \text{etc.})(\beta e + \beta' e' + \beta'' e'' + \text{etc.}) \\ + \; & (ce + c'e' + c''e'' + \text{etc.})(\gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e'' + \text{etc.}) + \text{etc.} \end{aligned}$$

16.

Das Anstellen von Beobachtungen, durch welche wir die mit den zufälligen Fehlern e, e', e'' etc. behafteten Werthe der Grössen v, v', v'' etc. erhalten, können wir als einen Versuch betrachten, welcher zwar nicht die Grösse der einzelnen begangenen Fehler zu zeigen vermag, wohl aber durch Anwendung der früher auseinandergesetzten Vorschriften zu einem Werthe der Grösse S führt, welcher nach der eben gefundenen Formel eine gegebene Funktion jener Fehler ist. Bei einem solchen Versuch können gewiss bald grössere, bald kleinere zufällige Fehler begangen werden; je mehr Fehler aber vorhanden sind, um so grösser wird die Hoffnung sein, dass der Werth der Grösse S bei einem bestimmten Versuch von seinem mittleren Werth wenig abweichen werde. Es wird also hauptsächlich darauf ankommen, den mittleren Werth der Grösse S festzustellen. Nach den in unserer früheren Abhandlung vorgetragenen Principien, welche hier nicht wiederholt zu werden brauchen, finden wir diesen mittleren Werth

$$\begin{aligned} = (a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})\, m^2 + (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \text{etc.})\, m'^2 \\ + (a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' + \text{etc.})\, m''^2 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Bezeichnet man den mittleren Fehler der Beobachtungen vom Gewichte $= 1$ mit μ, so dass also $\mu^2 = pm^2 = p'm'^2 = p''m''^2$ etc. ist, so kann der eben gefundene Ausdruck auf die Form

$$\left(\frac{a\alpha}{p} + \frac{a'\alpha'}{p'} + \frac{a''\alpha''}{p''} + \text{etc.}\right)\mu^2 + \left(\frac{b\beta}{p} + \frac{b'\beta'}{p'} + \frac{b''\beta''}{p''} + \text{etc.}\right)\mu^2$$
$$+ \left(\frac{c\gamma}{p} + \frac{c'\gamma'}{p'} + \frac{c''\gamma''}{p''} + \text{etc.}\right)\mu^2 + \text{etc.}$$

gebracht werden. Die Summe $\frac{a\alpha}{p} + \frac{a'\alpha'}{p'} + \frac{a''\alpha''}{p''} + \text{etc.}$ wird aber

$$= [aa][\alpha\alpha] + [ab][\alpha\beta] + [ac][\alpha\gamma] + \text{etc.}$$

und deshalb $= 1$ gefunden, wie man aus der Verbindung der Gleichungen (6) und (7) leicht entnehmen kann. Ebenso wird

$$\frac{b\beta}{p} + \frac{b'\beta'}{p'} + \frac{b''\beta''}{p''} + \text{etc.} = 1$$
$$\frac{c\gamma}{p} + \frac{c'\gamma'}{p'} + \frac{c''\gamma''}{p''} + \text{etc.} = 1$$

u. s. w.

Hiernach wird der mittlere Werth des S schliesslich $= \sigma\mu^2$, und insofern man nun den zufälligen Werth des S als mittleren annehmen darf, wird $\mu = \sqrt{\frac{S}{\sigma}}$ sein.

17.

Ein wie grosses Vertrauen diese Bestimmung verdiene, muss man nach dem mittleren, bei ihr oder ihrem Quadrat zu befürchtenden Fehler entscheiden; der letztere wird die Quadratwurzel aus dem mittleren Werthe des Ausdrucks

$$\left(\frac{S}{\sigma} - \mu^2\right)^2$$

sein, dessen Entwicklung durch ähnliche Berechnungen wie die in den Art. 39. u. ff. der früheren Abhandlung vorgetragenen erlangt wird. Wir unterdrücken dieselben hier der Kürze halber und setzen nur die Formel selbst hierher. Der mittlere bei der Bestimmung des Quadrates μ^2 zu befürchtende Fehler wird nämlich ausgedrückt durch

$$\sqrt{\frac{2\mu^4}{\sigma} + \frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\sigma^2}N},$$

wo ν^4 den mittleren Werth der Biquadrate der Fehler vom Gewichte $= 1$, und N die Summe

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2 + (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \text{etc.})^2$$
$$+ (a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' + \text{etc.})^2 + \text{etc.}$$

bezeichnet. Diese Summe lässt sich im allgemeinen auf keine einfachere Form bringen; auf ähnliche Weise aber wie im Art. 40. der früheren Abhandlung kann man zeigen, dass ihr Werth immer zwischen den Grenzen π und $\frac{\sigma^2}{\pi}$ liegen muss. Bei derjenigen Hypothese, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate ursprünglich begründet worden war, fällt das Glied, welches diese Summe enthält, ganz fort, weil alsdann $\nu^4 = 3\mu^4$ wird, worauf die Genauigkeit, welche dem nach der Formel $\sqrt{\frac{S}{\sigma}}$ bestimmten mittleren Fehler zukommt, dieselbe sein wird, als wenn derselbe aus σ genau bekannten Fehlern nach den Art. 15. und 16. der früheren Abhandlung ermittelt worden wäre.

18.

Zur Ausgleichung der Beobachtungen ist, wie wir oben gesehen haben, zweierlei erforderlich: erstens die Ermittelung der Correlaten der Bedingungsgleichungen, d. h. der Zahlen A, B, C etc., welche den Gleichungen (12) Genüge leisten, zweitens das Einsetzen dieser Zahlen in die Gleichungen (10). Die so erhaltene Ausgleichung kann man eine *vollkommene* oder *vollständige* nennen, um sie von einer *unvollkommenen* oder *unvollständigen* zu unterscheiden; mit diesem Namen werden wir nämlich die Resultate bezeichnen, welche sich zwar aus denselben Gleichungen (10) ergeben, aber unter Zugrundelegung von Werthen der Grössen A, B, C etc., welche den Gleichungen (12) nicht, d. h. nur einigen oder keiner, genügen. Solche Aenderungen der Beobachtungen aber, welche unter den Formeln (10) nicht enthalten sein können, sollen von der gegenwärtigen Untersuchung ausgeschlossen sein und auch den Namen Ausgleichung nicht erhalten. Da, sobald die Gleichungen (10) statt haben, die Gleichungen (13) mit den Gleichungen (12) völlig gleichbedeutend sind, kann man diesen Unterschied auch so fassen: Die vollständig ausgeglichenen Beobachtungen genügen allen Bedingungsgleichungen X = 0, Y = 0, Z = 0 etc., die unvollständig ausgeglichenen aber entweder keiner oder doch wenigstens nicht allen; die Ausgleichung, durch welche allen Bedingungsgleichungen genügt wird, ist daher nothwendigerweise von selbst vollständig.

19.

Da nun aus dem Begriff einer Ausgleichung schon von selbst folgt, dass die Summe zweier Ausgleichungen wieder eine Ausgleichung ergebe, so sieht man leicht, dass es einerlei ist, ob man die Vorschriften zur Erlangung einer vollkommenen Ausgleichung unmittelbar auf die ursprünglichen Beobachtungen, oder auf bereits unvollständig ausgeglichene Beobachtungen anwendet.

Es mögen in der That $-\Theta$, $-\Theta'$, $-\Theta''$ etc. ein System einer unvollständigen Ausgleichung bilden, welches aus den Formeln

$$\left.\begin{aligned} \Theta p &= \mathrm{A}^0 a + \mathrm{B}^0 b + \mathrm{C}^0 c + \text{etc.} \\ \Theta' p' &= \mathrm{A}^0 a' + \mathrm{B}^0 b' + \mathrm{C}^0 c' + \text{etc.} \\ \Theta'' p'' &= \mathrm{A}^0 a'' + \mathrm{B}^0 b'' + \mathrm{C}^0 c'' + \text{etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

hervorgehe. Da vorausgesetzt wird, dass die durch diese Ausgleichungen geänderten Beobachtungen nicht allen Bedingungsgleichungen genügen, so seien $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{C}^*$ etc. die Werthe, welche X, Y, Z etc. durch Einsetzung jener erlangen. Man suche die Zahlen A^*, B^*, C^* etc., welche den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}^* &= \mathrm{A}^*[aa] + \mathrm{B}^*[ab] + \mathrm{C}^*[ac] + \text{etc.} \\ \mathfrak{B}^* &= \mathrm{A}^*[ab] + \mathrm{B}^*[bb] + \mathrm{C}^*[bc] + \text{etc.} \\ \mathfrak{C}^* &= \mathrm{A}^*[ac] + \mathrm{B}^*[bc] + \mathrm{C}^*[cc] + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

etc. genügen; alsdann wird die vollständige Ausgleichung der auf jene Weise geänderten Beobachtungen durch neue Aenderungen $-\varkappa$, $-\varkappa'$, $-\varkappa''$ etc. bewirkt, wo $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ etc. aus den Formeln

$$\left.\begin{aligned} \varkappa p &= \mathrm{A}^* a + \mathrm{B}^* b + \mathrm{C}^* c + \text{etc.} \\ \varkappa' p' &= \mathrm{A}^* a' + \mathrm{B}^* b' + \mathrm{C}^* c' + \text{etc.} \\ \varkappa'' p'' &= \mathrm{A}^* a'' + \mathrm{B}^* b'' + \mathrm{C}^* c'' + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}$$

etc. zu berechnen sind. Wir wollen nun untersuchen, wie diese Verbesserungen mit der vollständigen Ausgleichung der ursprünglichen Beobachtungen zusammenhängen. Zunächst ist klar, dass man hat

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^* &= \mathfrak{A} - a\Theta - a'\Theta' - a''\Theta'' - \text{etc.} \\ \mathfrak{B}^* &= \mathfrak{B} - b\Theta - b'\Theta' - b''\Theta'' - \text{etc.} \\ \mathfrak{C}^* &= \mathfrak{C} - c\Theta - c'\Theta' - c''\Theta'' - \text{etc.} \end{aligned}$$

etc. Setzen wir in diesen Gleichungen für Θ, Θ', Θ'' etc. die Werthe aus (I) und für $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{C}^*$ etc. die Werthe aus (II), so finden wir

$$\mathfrak{A} = (A^0 + A^*)[aa] + (B^0 + B^*)[ab] + (C^0 + C^*)[ac] + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{B} = (A^0 + A^*)[ab] + (B^0 + B^*)[bb] + (C^0 + C^*)[bc] + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{C} = (A^0 + A^*)[ac] + (B^0 + B^*)[bc] + (C^0 + C^*)[cc] + \text{etc.}$$

etc., woraus folgt, dass die Correlaten, welche die Bedingungsgleichungen (12) erfüllen,

$$A = A^0 + A^*, \quad B = B^0 + B^*, \quad C = C^0 + C^* \text{ etc.}$$

sind. Hiernach zeigen die Gleichungen (10), (I) und (III), dass

$$\varepsilon = \Theta + \varkappa, \quad \varepsilon' = \Theta' + \varkappa', \quad \varepsilon'' = \Theta'' + \varkappa'' \text{ etc.}$$

ist, d. h. die Ausgleichung der Beobachtungen ergiebt sich gleich vollständig sowohl bei unmittelbarer, als auch bei mittelbarer, von einer unvollständigen Ausgleichung ausgehenden Rechnung.

20.

Wenn die Anzahl der Bedingungsgleichungen allzugross ist, kann die Bestimmung der Correlaten A, B, C etc. durch die direkte Elimination so weitschichtig werden, dass ihr die Geduld des Rechners nicht gewachsen ist; alsdann wird es häufig bequem sein können, die vollständige Ausgleichung durch successive Annäherungen mit Hülfe des im vorigen Art. enthaltenen Theorems zu ermitteln. Man theile die Bedingungsgleichungen in zwei oder mehrere Gruppen, und suche zuerst die Ausgleichung, durch welche der ersten Gruppe von Gleichungen, unter Vernachlässigung der übrigen, genügt wird. Darauf behandele man die durch diese Ausgleichung geänderten Beobachtungen so, dass allein den Gleichungen der zweiten Gruppe Rechnung getragen wird. Im allgemeinen wird durch das Anbringen des zweiten Systems von Ausgleichungen das Zusammenstimmen mit den Gleichungen der ersten Gruppe gestört werden; deshalb kehren wir, wenn nur zwei Gruppen gebildet sind, zu den Gleichungen der ersten Gruppe zurück, und bestimmen ein drittes System, welches dieser Genüge leistet; darauf unterwerfen wir die dreimal verbesserten Beobachtungen einer vierten Ausgleichung, wo nur die Gleichungen der zweiten Gruppe berücksichtigt werden. So werden wir, indem wir abwechselnd bald die erste, bald die zweite Gruppe berücksichtigen, fortwährend abnehmende Ausgleichungen erhalten, und war die Gruppentheilung geschickt getroffen, so werden wir nach wenigen Wiederholungen zu festen Zahlen gelangen. Wurden mehr als zwei Gruppen gebildet, so verhält sich die Sache ähnlich; die einzelnen Gruppen kommen nach einander zur Berechnung, nach der letzten wieder die erste

u. s. w. Hier möge indess der Hinweis auf diese Methode genügen, deren Erfolg sicher sehr von einer geschickten Anwendung abhängen wird.

21.

Es erübrigt noch, dass wir den Beweis des im Art. 8. vorausgesetzen Hülfssatzes nachholen, wobei wir indess der Durchsichtigkeit wegen andere hierzu mehr geeignete Bezeichnungen anwenden wollen.

Es seien also x^0, x', x'', x''' etc. Variable; und wir nehmen an, aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
n^{00} x^0 + n^{01} x' + n^{02} x'' + n^{03} x''' + \text{etc.} &= X^0 \\
n^{10} x^0 + n^{11} x' + n^{12} x'' + n^{13} x''' + \text{etc.} &= X' \\
n^{20} x^0 + n^{21} x' + n^{22} x'' + n^{23} x''' + \text{etc.} &= X'' \\
n^{30} x^0 + n^{31} x' + n^{32} x'' + n^{33} x''' + \text{etc.} &= X''' \\
\text{etc.} &
\end{aligned}$$

folge durch Elimination

$$\begin{aligned}
N^{00} X^0 + N^{01} X' + N^{02} X'' + N^{03} X''' + \text{etc.} &= x^0 \\
N^{10} X^0 + N^{11} X' + N^{12} X'' + N^{13} X''' + \text{etc.} &= x' \\
N^{20} X^0 + N^{21} X' + N^{22} X'' + N^{23} X''' + \text{etc.} &= x'' \\
N^{30} X^0 + N^{31} X' + N^{32} X'' + N^{33} X''' + \text{etc.} &= x''' \\
\text{etc.} &
\end{aligned}$$

Setzt man daher in die erste und zweite Gleichung des zweiten Systems die Werthe der Grössen X^0, X', X'', X''' etc. aus dem ersten System ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
x^0 = \quad & N^{00} (n^{00} x^0 + n^{01} x' + n^{02} x'' + n^{03} x''' + \text{etc.}) \\
+ & N^{01} (n^{10} x^0 + n^{11} x' + n^{12} x'' + n^{13} x''' + \text{etc.}) \\
+ & N^{02} (n^{20} x^0 + n^{21} x' + n^{22} x'' + n^{23} x''' + \text{etc.}) \\
+ & N^{03} (n^{30} x^0 + n^{31} x' + n^{32} x'' + n^{33} x''' + \text{etc.}) + \text{etc.}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
x' = \quad & N^{10} (n^{00} x^0 + n^{01} x' + n^{02} x'' + n^{03} x''' + \text{etc.}) \\
+ & N^{11} (n^{10} x^0 + n^{11} x' + n^{12} x'' + n^{13} x''' + \text{etc.}) \\
+ & N^{12} (n^{20} x^0 + n^{21} x' + n^{22} x'' + n^{23} x''' + \text{etc.}) \\
+ & N^{13} (n^{30} x^0 + n^{31} x' + n^{32} x'' + n^{33} x''' + \text{etc.}) + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Da jede dieser beiden Gleichungen offenbar eine identische Gleichung sein muss, so darf man sowohl in die erste, als in die zweite beliebige bestimmte Werthe für x^0, x', x'', x''' etc. einsetzen. Wir setzen in die erste ein

$$x^0 = N^{10},\quad x' = N^{11},\quad x'' = N^{12},\quad x''' = N^{13} \text{ etc.},$$

in die zweite aber

$$x^0 = N^{00},\quad x' = N^{01},\quad x'' = N^{02},\quad x''' = N^{03} \text{ etc.}$$

Alsdann folgt durch Subtraktion

$$\begin{aligned} N^{10} - N^{01} = \; & (N^{00}N^{11} - N^{10}N^{01})(n^{01} - n^{10}) \\ & + (N^{00}N^{12} - N^{10}N^{02})(n^{02} - n^{20}) \\ & + (N^{00}N^{13} - N^{10}N^{03})(n^{03} - n^{30}) \\ & + \text{etc.} \\ & + (N^{01}N^{12} - N^{11}N^{02})(n^{12} - n^{21}) \\ & + (N^{01}N^{13} - N^{11}N^{03})(n^{13} - n^{31}) \\ & + \text{etc.} \\ & + (N^{02}N^{13} - N^{12}N^{03})(n^{23} - n^{32}) \\ & + \text{etc. etc.,} \end{aligned}$$

welche Gleichung auch so geschrieben werden kann

$$N^{10} - N^{01} = \Sigma[N^{0\alpha}N^{1\beta} - N^{1\alpha}N^{0\beta}](n^{\alpha\beta} - n^{\beta\alpha}),$$

wo durch $\alpha\beta$ alle Combinationen von ungleichen Indices bezeichnet werden.

Hieraus folgt, dass, wenn

$$n^{01} = n^{10},\; n^{02} = n^{20},\; n^{03} = n^{30},\; n^{12} = n^{21},\; n^{13} = n^{31},\; n^{23} = n^{32} \text{ etc.}$$

oder allgemein

$$n^{\alpha\beta} = n^{\beta\alpha}$$

war, auch

$$N^{10} = N^{01}$$

sein wird. Da nun die Reihenfolge der Variabeln in den gegebenen Gleichungen willkürlich ist, so wird offenbar unter jener Voraussetzung allgemein

$$N^{\alpha\beta} = N^{\beta\alpha}.$$

22.

Da die in dieser Abhandlung dargelegte Methode vorzüglich eine häufige und bequeme Anwendung in den Rechnungen der höheren Geodäsie findet, so hoffen wir, unseren Lesern werde die Erläuterung der Vorschriften an einigen aus dieser entnommenen Beispielen nicht unlieb sein.

Die Bedingungsgleichungen zwischen den Winkeln eines Systems von Dreiecken sind hauptsächlich einer dreifachen Quelle zu entnehmen.

I. Die Summe der Horizontalwinkel, welche bei einem vollständigen Umlauf um denselben Scheitel den Horizont ausfüllen, muss vier Rechten gleich sein.

II. Die Summe der drei Winkel in jedem Dreieck ist einer gegebenen Grösse gleich, da man, wenn das Dreieck auf einer krummen Oberfläche liegt, den Ueberschuss jener Summe über zwei Rechte so scharf berechnen kann, dass er für vollkommen genau gelten darf.

III. Die dritte Quelle entspringt dem Verhältniss der Seiten in Dreiecken, welche eine geschlossene Kette bilden. Ist nämlich eine Reihe von Dreiecken so mit einander verbunden, dass das zweite Dreieck eine Seite a mit dem ersten Dreieck, eine andere b mit dem dritten gemeinsam hat; ebenso habe das vierte Dreieck mit dem dritten die Seite c, mit dem fünften die Seite d gemeinsam; und so weiter bis zum letzten Dreieck, welches mit dem vorhergehenden die Seite k und mit dem ersten wiederum die Seite l gemeinsam habe, dann werden die Werthe der Quotienten

$$\frac{a}{l}, \quad \frac{b}{a}, \quad \frac{c}{b}, \quad \frac{d}{c} \cdots \frac{l}{k}$$

nach bekannten Methoden bezw. aus je zwei, den gemeinschaftlichen Seiten gegenüberliegenden Winkeln auf einander folgender Dreiecke zu erhalten sein, und da das Produkt jener Brüche $= 1$ sein muss, so ergiebt sich hieraus eine Bedingungsgleichung zwischen den Sinus jener Winkel (welche bezw. um den dritten Theil des sphärischen oder sphäroidischen Excesses vermindert sind, wenn die Dreiecke auf einer krummen Oberfläche liegen).

Uebrigens kommt es in complicirteren Dreiecksnetzen sehr häufig vor, dass Bedingungsgleichungen der zweiten oder dritten Art sich in grösserer Anzahl darbieten, als man beibehalten darf, weil nämlich ein Theil derselben in den übrigen schon enthalten ist. Dagegen wird der Fall seltener eintreten, wo man den Bedingungsgleichungen der zweiten Art ähnliche Gleichungen, die sich auf mehrseitige Figuren beziehen, beifügen muss, nämlich nur dann, wenn Polygone gebildet werden, welche nicht durch Messungen in Dreiecke getheilt sind. Ueber diese Dinge werden wir aber, weil es unserem gegenwärtigen Zweck zu fern liegt, bei einer anderen Gelegenheit des weiteren reden. Indessen können wir die Bemerkung nicht mit Stillschweigen übergehen, dass unsere Theorie, wenn eine reinliche und strenge Anwendung gewünscht wird, voraussetzt, es seien die mit v, v', v'' etc. bezeichneten Grössen wirklich und unmittelbar beobachtet, oder so aus Beobachtungen abgeleitet, dass sie von einander unabhängig bleiben oder wenigstens als von einander unabhängig betrachtet werden können. In der gewöhnlichen Praxis werden die Dreieckswinkel selbst beobachtet und können demnach für v, v', v'' etc. angenommen werden; wir dürfen aber nicht vergessen, falls das System zufällig ausserdem solche Dreiecke enthält, deren Winkel nicht unmittelbar beobachtet sind, sondern sich aus Summen oder Differenzen wirklich beobachteter Winkel ergeben, dass diese nicht unter die Zahl der beobachteten gerechnet, sondern in der Form ihrer Zusammensetzung bei den Rechnungen beibehalten werden müssen. Anders aber wird sich die Sache bei einer Beobachtungsweise verhalten, welche der von *Struve* (Astronomische Nachrichten, II, S. 431) befolgten ähnlich ist, bei der die Richtungen der einzelnen von demselben Scheitel ausgehenden Seiten durch Vergleichung mit einer und derselben willkürlichen Richtung erhalten werden. Dann sind nämlich gerade diese Winkel für v, v', v'' etc. anzunehmen, wodurch sich alle Dreieckswinkel in Form von Differenzen darstellen, während die Bedingungsgleichungen der ersten Art, denen der Natur der Sache nach von selbst genügt wird, als überflüssig fortfallen. Die Beobachtungsweise, welche ich selbst bei der in den letzten Jahren ausgeführten Triangulation angewandt habe, unterscheidet sich zwar sowohl von der ersten, als von der zweiten Methode, kann jedoch in Bezug auf das Resultat der letzteren gleichgeachtet werden, so dass man bei den einzelnen Stationen die von einem gleichsam beliebigen Anfang aus gezählten Richtungen der von ihnen ausgehenden Seiten für die Grössen v, v', v'' etc. annehmen darf. Wir werden nun zwei Beispiele ausarbeiten, von denen das eine der ersten, das andere der zweiten Weise entspricht.

23.

Das erste Beispiel entnehmen wir dem Werke von *de Krayenhoff*, „Précis historique des opérations trigonométriques faites en Hollande", und zwar unterwerfen wir den Theil des Dreiecksnetzes einer Ausgleichung, welcher zwischen den neun Punkten Harlingen, Sneek, Oldeholtpade, Ballum, Leeuwarden, Dockum, Drachten, Oosterwolde und Gröningen enthalten ist. Es werden zwischen diesen Punkten neun Dreiecke gebildet, welche in jenem Werke mit den Nummern 121, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 131, 132 bezeichnet sind, und deren Winkel (welche wir durch vorgesetzte Indices unterscheiden) nach der Tabelle, S. 77 bis 81, folgendermaassen beobachtet worden sind:

Dreieck 121.

0. Harlingen	50°	58′	15,238″
1. Leeuwarden	82	47	15,351
2. Ballum	46	14	27,202

Dreieck 122.

3. Harlingen	51	5	39,717
4. Sneek	70	48	33,445
5. Leeuwarden	58	5	48,707

Dreieck 123.

6. Sneek	49	30	40,051
7. Drachten	42	52	59,382
8. Leeuwarden	87	36	21,057

Dreieck 124.

9. Sneek	45	36	7,492
10. Oldeholtpade	67	52	0,048
11. Drachten	66	31	56,513

Dreieck 125.

12. Drachten	53	55	24,745
13. Oldeholtpade	47	48	52,580
14. Oosterwolde	78	15	42,347

Dreieck 127.

15. Leeuwarden	59	24	0,645
16. Dockum	76	34	9,021
17. Ballum	44	1	51,040

Dreieck 128.

18. Leeuwarden	72	6	32,043
19. Drachten	46	53	27,163
20. Dockum	61	0	4,494

Dreieck 131.

21. Dockum	57	1	55,292
22. Drachten	83	33	14,515
23. Gröningen	39	24	52,397

Dreieck 132.

24. Oosterwolde	81°	54′	17,447″
25. Gröningen	31	52	46,094
26. Drachten	66	12	57,246 .

Die Betrachtung des Zusammenhangs zwischen diesen Dreiecken zeigt, dass zwischen den 27 Winkeln, deren angenäherte Werthe durch Beobachtung bekannt geworden sind, 13 Bedingungsgleichungen bestehen, und zwar zwei der ersten, neun der zweiten und zwei der dritten Art. Es ist aber unnöthig, diese Gleichungen alle in ihrer geschlossenen Form hinzuschreiben, da für die Rechnungen nur die in der allgemeinen Theorie mit $\mathfrak{A}$, a, a', a'' etc.; $\mathfrak{B}$, b, b', b'' etc.; etc. bezeichneten Grössen verlangt werden; deshalb schreiben wir an deren Stelle sofort die oben mit (13) bezeichneten Gleichungen, welche jene Grössen vor Augen stellen; anstatt der Zeichen ε, ε', ε'' etc. setzen wir hier einfach (0), (1), (2) etc.

Demnach entsprechen den beiden Bedingungsgleichungen erster Art die folgenden:

$$(1) + (5) + (8) + (15) + (18) = -2{,}197''$$
$$(7) + (11) + (12) + (19) + (22) + (26) = -0{,}436\,.$$

Die sphäroidischen Excesse der neun Dreiecke finden wir der Reihe nach: 1,749″; 1,147″; 1,243″; 1,698″; 0,873″; 1,167″; 1,104″; 2,161″; 1,403″. Es entsteht daher als erste Bedingungsgleichung der zweiten Art die folgende*): $v^{(0)} + v^{(1)} + v^{(2)} - 180^\circ\, 0'\, 1{,}749'' = 0$, und analog die übrigen. Hieraus erhalten wir die neun folgenden Gleichungen:

$$(0) + (1) + (2) = -3{,}958''$$
$$(3) + (4) + (5) = +0{,}722$$
$$(6) + (7) + (8) = -0{,}753$$
$$(9) + (10) + (11) = +2{,}355$$
$$(12) + (13) + (14) = -1{,}201$$
$$(15) + (16) + (17) = -0{,}461$$
$$(18) + (19) + (20) = +2{,}596$$
$$(21) + (22) + (23) = +0{,}043$$
$$(24) + (25) + (26) = -0{,}616\,.$$

*) Wir ziehen es vor, die Indices in diesem Beispiel durch arabische Ziffern auszudrücken.

Die Bedingungsgleichungen der dritten Art werden bequemer in logarithmischer Form aufgestellt; so heisst die erste

$$\log\sin(v^{(0)}-0{,}583'')-\log\sin(v^{(2)}-0{,}583'')-\log\sin(v^{(3)}-0{,}382'')$$
$$+\log\sin(v^{(4)}-0{,}382'')-\log\sin(v^{(6)}-0{,}414'')+\log\sin(v^{(7)}-0{,}414'')$$
$$-\log\sin(v^{(16)}-0{,}389'')+\log\sin(v^{(17)}-0{,}389'')-\log\sin(v^{(19)}-0{,}368'')$$
$$+\log\sin(v^{(20)}-0{,}368'')=0\,.$$

Es erscheint überflüssig, die andere in geschlossener Form hinzuschreiben. Diesen beiden Gleichungen entsprechen die folgenden, wo die einzelnen Coefficienten sich auf die siebente Stelle der *Brigg*'schen Logarithmen beziehen,

$$17{,}068\,(0)-20{,}174\,(2)-16{,}993\,(3)+7{,}328\,(4)-17{,}976\,(6)$$
$$+22{,}672\,(7)-5{,}028\,(16)+21{,}780\,(17)-19{,}710\,(19)$$
$$+11{,}671\,(20)=-371$$
$$17{,}976\,(6)-0{,}880\,(8)-20{,}617\,(9)+8{,}564\,(10)-19{,}082\,(13)$$
$$+4{,}375\,(14)+6{,}798\,(18)-11{,}671\,(20)+13{,}657\,(21)$$
$$-25{,}620\,(23)-2{,}995\,(24)+33{,}854\,(25)=+370\,.$$

Da kein Grund angegeben ist, weshalb wir den Beobachtungen ungleiche Gewichte beilegen sollten, so setzen wir $p^{(0)}=p^{(1)}=p^{(2)}$ etc. $=1$. Bezeichnen wir daher die Correlaten der Bedingungsgleichungen in der Reihenfolge, in der wir die ihnen entsprechenden Gleichungen aufgestellt haben, mit A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, so ergeben sich zur Bestimmung derselben folgende Gleichungen:

$$-2{,}197''=5\,A+C+D+E+H+I+5{,}917\,N$$
$$-0{,}436=6\,B+E+F+G+I+K+L+2{,}962\,M$$
$$-3{,}958=A+3\,C-3{,}106\,M$$
$$+0{,}722=A+3\,D-9{,}665\,M$$
$$-0{,}753=A+B+3\,E+4{,}696\,M+17{,}096\,N$$
$$+2{,}355=B+3\,F-12{,}053\,N$$
$$-1{,}201=B+3\,G-14{,}707\,N$$
$$-0{,}461=A+3\,H+16{,}752\,M$$
$$+2{,}596=A+B+3\,I-8{,}039\,M-4{,}874\,N$$
$$+0{,}043=B+3\,K-11{,}963\,N$$
$$-0{,}616=B+3\,L+30{,}859\,N$$
$$-\ 371=+2{,}962\,B-3{,}106\,C-9{,}665\,D+4{,}696\,E+16{,}752\,H$$
$$-8{,}039\,I+2902{,}27\,M-459{,}33\,N$$
$$+\ 370=+5{,}917\,A+17{,}096\,E-12{,}053\,F-14{,}707\,G$$
$$-4{,}874\,I-11{,}963\,K+30{,}859\,L-459{,}33\,M$$
$$+3385{,}96\,N\,.$$

Hieraus erhalten wir durch Elimination

A = — 0,598	H = + 0,659
B = — 0,255	I = + 1,050
C = — 1,234	K = + 0,577
D = + 0,086	L = — 1,351
E = — 0,477	M = — 0,109792
F = + 1,351	N = + 0,119681.
G = + 0,271	

Endlich erhalten wir die plausibelsten Fehler aus den Formeln

$$
\begin{aligned}
(0) &= C + 17{,}068\,M \\
(1) &= A + C \\
(2) &= C - 20{,}174\,M \\
(3) &= D - 16{,}993\,M
\end{aligned}
$$

etc., woraus wir die folgenden numerischen Werthe finden; zur Vergleichung setzen wir (mit entgegengesetzten Vorzeichen) die von *de Krayenhoff* an die Beobachtungen angebrachten Verbesserungen hinzu:

	de Kr.		*de Kr.*
(0) = — 3,108″	— 2,090″	(14) = + 0,795″	+ 2,400″
(1) = — 1,832	+ 0,116	(15) = + 0,061	+ 1,273
(2) = + 0,981	— 1,982	(16) = + 1,211	+ 5,945
(3) = + 1,952	+ 1,722	(17) = — 1,732	— 7,674
(4) = — 0,719	+ 2,848	(18) = + 1,265	+ 1,876
(5) = — 0,512	— 3,848	(19) = + 2,959	+ 6,251
(6) = + 3,648	— 0,137	(20) = — 1,628	— 5,530
(7) = — 3,221	+ 1,000	(21) = + 2,211	+ 3,486
(8) = — 1,180	— 1,614	(22) = + 0,322	— 3,454
(9) = — 1,116	0	(23) = — 2,489	0
(10) = + 2,376	+ 5,928	(24) = — 1,709	+ 0,400
(11) = + 1,096	— 3,570	(25) = + 2,701	+ 2,054
(12) = + 0,016	+ 2,414	(26) = — 1,606	— 3,077.
(13) = — 2,013	— 6,014		

Die Summe der Quadrate unserer Ausgleichungen findet man = 97,8845. Hieraus findet man den mittleren Fehler, insoweit er aus den 27 beobachteten Winkeln abgeleitet werden kann,

$$= \sqrt{\frac{97{,}8845}{13}} = 2{,}7440''.$$

Die Summe der Quadrate der Aenderungen, welche *de Krayenhoff* selbst an die beobachteten Winkel angebracht hat, wird = 341,4201 gefunden.

24.

Das zweite Beispiel liefern uns die Dreiecke zwischen den fünf Punkten Falkenberg, Breithorn, Hauselberg, Wulfsode und Wilsede der Triangulation von Hannover. Beobachtet sind die Richtungen*):

Auf der Station *Falkenberg*

0.	Wilsede	187°	47′	30,311″
1.	Wulfsode.	225	9	39,676
2.	Hauselberg	266	13	56,239
3.	Breithorn	274	14	43,634

Auf der Station *Breithorn*

4.	Falkenberg	94	33	40,755
5.	Hauselberg	122	51	23,054
6.	Wilsede	150	18	35,100

Auf der Station *Hauselberg*

7.	Falkenberg	86	29	6,872
8.	Wilsede	154	37	9,624
9.	Wulfsode.	189	2	56,376
10.	Breithorn	302	47	37,732

Auf der Station *Wulfsode*

11.	Hauselberg	9	5	36,593
12.	Falkenberg	45	27	33,556
13.	Wilsede	118	44	13,159

Auf der Station *Wilsede*

14.	Falkenberg	7	51	1,027
15.	Wulfsode.	298	29	49,519
16.	Breithorn	330	3	7,392
17.	Hauselberg	334	25	26,746.

*) Die Nullrichtungen, auf welche sich die einzelnen Richtungen beziehen, werden hier als willkürlich angesehen, obwohl sie thatsächlich mit den Meridianlinien der Stationen zusammenfallen. Die Beobachtungen werden seiner Zeit vollständig veröffentlicht werden; einstweilen findet man eine Figur in den „Astronomischen Nachrichten“, Bd. I, S. 441.

Aus diesen Beobachtungen lassen sich sieben Dreiecke bilden.

Dreieck I.

Falkenberg	8°	0′	47,395″
Breithorn	28	17	42,299
Hauselberg	143	41	29,140

Dreieck II.

Falkenberg	86	27	13,323
Breithorn	55	44	54,345
Wilsede	37	47	53,635

Dreieck III.

Falkenberg	41	4	16,563
Hauselberg	102	33	49,504
Wulfsode	36	21	56,963

Dreieck IV.

Falkenberg	78	26	25,928
Hauselberg	68	8	2,752
Wilsede	33	25	34,281

Dreieck V.

Falkenberg	37	22	9,365
Wulfsode	73	16	39,603
Wilsede	69	21	11,508

Dreieck VI.

Breithorn	27	27	12,046
Hauselberg	148	10	28,108
Wilsede	4	22	19,354

Dreieck VII.

Hauselberg	34	25	46,752
Wulfsode	109	38	36,566
Wilsede	35	55	37,227.

Es sind also sieben Bedingungsgleichungen zweiter Art vorhanden (die Bedingungsgleichungen erster Art fallen offenbar fort), zu deren Aufstellung vor allem die sphäroidischen Excesse der sieben Dreiecke zu ermitteln sind. Hierzu ist die Kenntniss der absoluten Grösse wenigstens einer Seite erforderlich; die Seite zwischen den

Punkten Wilsede und Wulfsode ist 22877,94 Meter lang. Hieraus ergeben sich die sphäroidischen Excesse der Dreiecke I . . . 0,202″; II. . . 2,442″; III. . . 1,257″; IV. . . 1,919″; V. . . 1,957″; VI. . . 0,321″; VII . . . 1,295″.

Wenn wir jetzt die Richtungen in der Reihenfolge, wie sie oben angeführt und durch Indices unterschieden sind, mit $v^{(0)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ etc. bezeichnen, so werden die Winkel des ersten Dreiecks

$$v^{(3)} - v^{(2)}, \quad v^{(5)} - v^{(4)}, \quad 360^0 + v^{(7)} - v^{(10)},$$

und deshalb die erste Bedingungsgleichung

$$- v^{(2)} + v^{(3)} - v^{(4)} + v^{(5)} + v^{(7)} - v^{(10)} + 179^0 \; 59' \; 59{,}798'' = 0\,.$$

Ebenso liefern die übrigen Dreiecke die sechs anderen; eine geringe Achtsamkeit wird aber zeigen, dass diese sieben Gleichungen nicht von einander unabhängig sind, sondern dass die zweite identisch mit der Summe der ersten, vierten und sechsten, die Summe der dritten und fünften aber identisch mit der Summe der vierten und siebenten ist; deshalb lassen wir die zweite und fünfte unberücksichtigt. An Stelle der übrigbleibenden Bedingungsgleichungen in geschlossener Form schreiben wir die entsprechenden Gleichungen des Systems (13), indem wir für die Zeichen ε, ε' etc. hier (0), (1), (2) etc. benutzen,

$$\begin{aligned}
-1{,}368'' &= -(2) + (3) - (4) + (5) + (7) - (10)\\
+1{,}773 &= -(1) + (2) - (7) + (9) - (11) + (12)\\
+1{,}042 &= -(0) + (2) - (7) + (8) + (14) - (17)\\
-0{,}813 &= -(5) + (6) - (8) + (10) - (16) + (17)\\
-0{,}750 &= -(8) + (9) - (11) + (13) - (15) + (17)\,.
\end{aligned}$$

Von Bedingungsgleichungen der dritten Art würden sich *acht* aus dem System der Dreiecke finden lassen, da man je drei der vier Dreiecke I, II, IV, VI und je drei von III, IV, V, VII zu diesem Zweck combiniren kann; eine geringe Aufmerksamkeit lehrt indess, dass *zwei* ausreichen, eine von jenen und eine von diesen, da die übrigen in ihnen und den früheren Bedingungsgleichungen schon enthalten sein müssen. Unsere sechste Bedingungsgleichung wird daher sein

$$\begin{aligned}
&\log\sin(v^{(3)} - v^{(2)} - 0{,}067'') - \log\sin(v^{(5)} - v^{(4)} - 0{,}067'')\\
+&\log\sin(v^{(14)} - v^{(17)} - 0{,}640'') - \log\sin(v^{(2)} - v^{(0)} - 0{,}640'')\\
+&\log\sin(v^{(6)} - v^{(5)} - 0{,}107'') - \log\sin(v^{(17)} - v^{(16)} - 0{,}107'') = 0
\end{aligned}$$

und die siebente

$$\log\sin(v^{(2)} - v^{(1)} - 0{,}419'') - \log\sin(v^{(12)} - v^{(11)} - 0{,}419'')$$
$$+ \log\sin(v^{(14)} - v^{(17)} - 0{,}640'') - \log\sin(v^{(2)} - v^{(0)} - 0{,}640'')$$
$$+ \log\sin(v^{(13)} - v^{(11)} - 0{,}432'') - \log\sin(v^{(17)} - v^{(15)} - 0{,}432'') = 0,$$

und es entsprechen ihnen als Gleichungen des Systems (13)

$$\begin{aligned} +25 = {} & + 4{,}31\,(0) - 153{,}88\,(2) + 149{,}57\,(3) + 39{,}11\,(4) \\ & - 79{,}64\,(5) + 40{,}53\,(6) + 31{,}90\,(14) + 275{,}39\,(16) \\ & - 307{,}29\,(17) \\ -3 = {} & + 4{,}31\,(0) - 24{,}16\,(1) + 19{,}85\,(2) + 36{,}11\,(11) \\ & - 28{,}59\,(12) - 7{,}52\,(13) + 31{,}90\,(14) + 29{,}06\,(15) \\ & - 60{,}96\,(17). \end{aligned}$$

Wenn wir nun den einzelnen Richtungen dieselbe Genauigkeit beilegen, indem wir $p^{(0)} = p^{(1)} = p^{(2)}$ etc. $= 1$ setzen, und die Correlaten der sieben Bedingungsgleichungen in der obigen Reihenfolge mit A, B, C, D, E, F, G bezeichnen, so werden dieselben aus den folgenden Gleichungen zu bestimmen sein:

$$\begin{aligned} -1{,}368 &= +6A - 2B - 2C - 2D + 184{,}72F - 19{,}85G \\ +1{,}773 &= -2A + 6B + 2C + 2E - 153{,}88F - 20{,}69G \\ +1{,}042 &= -2A + 2B + 6C - 2D - 2E + 181{,}00F + 108{,}40G \\ -0{,}813 &= -2A - 2C + 6D + 2E - 462{,}51F - 60{,}96G \\ -0{,}750 &= +2B - 2C + 2D + 6E - 307{,}29F - 133{,}65G \\ +25 &= +184{,}72A - 153{,}88B + 181{,}00C - 462{,}51D \\ &\quad - 307{,}29E + 224868F + 16694{,}1G \\ -3 &= -19{,}85A - 20{,}69B + 108{,}40C - 60{,}96D - 133{,}65E \\ &\quad + 16694{,}1F + 8752{,}39G. \end{aligned}$$

Hieraus leiten wir durch Elimination ab

$$\begin{aligned} A &= -0{,}225 \\ B &= +0{,}344 \\ C &= -0{,}088 \\ D &= -0{,}171 \\ E &= -0{,}323 \\ F &= +0{,}000215915 \\ G &= -0{,}00547462. \end{aligned}$$

Die plausibelsten Fehler erhält man nunmehr aus den Formeln

$$\begin{aligned} (0) &= -C + 4{,}31F + 4{,}31G \\ (1) &= -B - 24{,}16G \\ (2) &= -A + B + C - 153{,}88F + 19{,}85G \end{aligned}$$

etc., woraus sich die numerischen Werthe ergeben

$(0) = +\,0{,}065''$	$(9) = +\,0{,}021''$
$(1) = -\,0{,}212$	$(10) = +\,0{,}054$
$(2) = +\,0{,}339$	$(11) = -\,0{,}219$
$(3) = -\,0{,}193$	$(12) = +\,0{,}501$
$(4) = +\,0{,}233$	$(13) = -\,0{,}282$
$(5) = -\,0{,}071$	$(14) = -\,0{,}256$
$(6) = -\,0{,}162$	$(15) = +\,0{,}164$
$(7) = -\,0{,}481$	$(16) = +\,0{,}230$
$(8) = +\,0{,}406$	$(17) = -\,0{,}139$.

Die Summe der Quadrate dieser Fehler wird $= 1{,}2288$ gefunden; hieraus folgt der mittlere Fehler einer einzelnen Richtung, insoweit er aus den beobachteten 18 Richtungen abgeleitet werden kann,

$$= \sqrt{\frac{1{,}2288}{7}} = 0{,}4190''.$$

25.

Um auch den zweiten Theil unserer Theorie durch ein Beispiel zu erläutern, suchen wir die Genauigkeit auf, mit welcher die Seite Falkenberg—Breithorn aus der Seite Wilsede—Wulfsode mit Hülfe der ausgeglichenen Beobachtungen bestimmt wird. Die Funktion u, durch welche dieselbe in diesem Fall ausgedrückt wird, ist

$$u = 22877{,}94^{\mathrm{m}} \times \frac{\sin(v^{(13)} - v^{(12)} - 0{,}652'')\,\sin(v^{(14)} - v^{(16)} - 0{,}814'')}{\sin(v^{(1)} - v^{(0)} - 0{,}652'')\,\sin(v^{(6)} - v^{(4)} - 0{,}814'')}.$$

Der Werth derselben wird mit den verbesserten Werthen der Richtungen $v^{(0)}$, $v^{(1)}$ etc. gefunden

$$= 26766{,}68^{\mathrm{m}}.$$

Die Differentiation jenes Ausdrucks liefert aber, wenn man sich die Differentiale $dv^{(0)}$, $dv^{(1)}$ etc. in Secunden ausgedrückt denkt,

$$\begin{aligned} du = {} & 0{,}16991^{\mathrm{m}}(dv^{(0)} - dv^{(1)}) + 0{,}08836^{\mathrm{m}}(dv^{(4)} - dv^{(6)}) \\ & - 0{,}03899^{\mathrm{m}}(dv^{(12)} - dv^{(13)}) + 0{,}16731^{\mathrm{m}}(dv^{(14)} - dv^{(16)}). \end{aligned}$$

Hieraus findet man weiter

$$\begin{aligned} [al] &= -\ 0{,}08836 \\ [bl] &= +\ 0{,}13092 \\ [cl] &= -\ 0{,}00260 \\ [dl] &= +\ 0{,}07895 \end{aligned}$$

$$[el] = +\ \ 0{,}03899$$
$$[fl] = -40{,}1315$$
$$[gl] = +10{,}9957$$
$$[ll] = +\ \ 0{,}13238.$$

Man findet hiernach endlich mit Hülfe der oben entwickelten Methoden, wenn wir das Meter als lineare Längeneinheit annehmen,

$$\frac{1}{\mathrm{P}} = 0{,}08329\,,\quad \text{oder}\quad \mathrm{P} = 12{,}006\,,$$

woraus der mittlere im Werthe der Seite Falkenberg—Breithorn zu befürchtende Fehler $= 0{,}2886\,m$ Meter ist (wo m der mittlere zu befürchtende Fehler der beobachteten Richtungen, und zwar in Sekunden ausgedrückt, ist), und folglich, wenn wir den oben ermittelten Werth des m nehmen,

$$= 0{,}1209^{\mathrm{m}}.$$

Uebrigens lehrt der Anblick des Systems der Dreiecke unmittelbar, dass der Punkt Hauselberg darin ganz weggelassen werden kann, ohne dass der Zusammenhang zwischen den Seiten Wilsede—Wulfsode und Falkenberg—Breithorn gestört würde. Aber es wäre aus methodischen Grundsätzen nicht zu billigen, wollte man deshalb die auf den Punkt Hauselberg bezüglichen Bebachtungen *unterdrücken**), da sie doch sicher zur Erhöhung der Genauigkeit beitragen. Um deutlicher zu zeigen, wie gross die Zunahme der Genauigkeit hierdurch wird, wiederholen wir die Berechnung, indem wir Alles, was sich auf den Punkt Hauselberg bezieht, weglassen, wodurch von den oben gegebenen 18 Richtungen 8 fortfallen, und die plausibelsten Fehler der übrigen folgendermaassen gefunden werden:

$(0) = +0{,}327''$	$(12) = +0{,}206''$
$(1) = -0{,}206$	$(13) = -0{,}206$
$(3) = -0{,}121$	$(14) = +0{,}327$
$(4) = +0{,}121$	$(15) = +0{,}206$
$(6) = -0{,}121$	$(16) = +0{,}121.$

Der Werth der Seite Falkenberg—Breithorn ergiebt sich dann

*) Der grössere Theil dieser Beobachtungen war schon angestellt, ehe der Punkt Breithorn aufgefunden und in das System aufgenommen ward.

$= 26766{,}63^m$, zwar wenig von dem oben gefundenen abweichend, die Berechnung des Gewichts liefert aber

$$\frac{1}{P} = 0{,}13082, \quad \text{oder} \quad P = 7{,}644$$

und deshalb den mittleren zu befürchtenden Fehler $= 0{,}36169\,m$ Meter $= 0{,}1515^m$. Es erhellt daher, dass durch Hinzunahme der auf Hauselberg bezüglichen Beobachtungen das Gewicht der Bestimmung der Seite Falkenberg—Breithorn im Verhältniss der Zahl 7,644 zu 12,006, oder der Einheit zu 1,571 vermehrt ist.