Zweiter Theil.

(Der Königlichen Societät der Wissenschaften überreicht 1823, Februar 2.)

23.

Es erübrigen noch mehrere Untersuchungen, welche die vorhergehende Theorie sowohl erläutern als auch besonders erweitern sollen.

Vor allen muss man nachforschen, ob das Geschäft der Elimination, mittelst deren die Unbekannten x, y, z etc. durch die ξ, η, ζ etc. auszudrücken sind, immer ausführbar ist. Da die Anzahl jener der Anzahl dieser gleich ist, so wird, wie man aus der Theorie der Elimination bei linearen Gleichungen weiss, jene Elimination sicher möglich sein, wenn ξ, η, ζ etc. von einander unabhängig sind, im anderen Falle unmöglich. Nehmen wir für den Augenblick an, ξ, η, ζ etc. seien nicht von einander unabhängig, sondern es bestehe zwischen ihnen die identische Gleichung

$$0 = \mathrm{F}\xi + \mathrm{G}\eta + \mathrm{H}\zeta + \text{etc.} + \mathrm{K}\,.$$

Wir hätten dann

$$\begin{aligned}\mathrm{F}\Sigma a^2 + \mathrm{G}\Sigma ab + \mathrm{H}\Sigma ac + \text{etc.} &= 0\\ \mathrm{F}\Sigma ab + \mathrm{G}\Sigma b^2 + \mathrm{H}\Sigma bc + \text{etc.} &= 0\\ \mathrm{F}\Sigma ac + \mathrm{G}\Sigma bc + \mathrm{H}\Sigma c^2 + \text{etc.} &= 0\end{aligned}$$

etc., und ferner

$$\mathrm{F}\Sigma al + \mathrm{G}\Sigma bl + \mathrm{H}\Sigma cl + \text{etc.} = -\mathrm{K}\,.$$

Setzt man alsdann

$$\left.\begin{aligned}a\,\mathrm{F} + b\,\mathrm{G} + c\,\mathrm{H} + \text{etc.} &= \Theta\\ a'\mathrm{F} + b'\mathrm{G} + c'\mathrm{H} + \text{etc.} &= \Theta'\\ a''\mathrm{F} + b''\mathrm{G} + c''\mathrm{H} + \text{etc.} &= \Theta''\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

etc., so folgt

$$a\Theta + a'\Theta' + a''\Theta'' + \text{etc.} = 0$$
$$b\Theta + b'\Theta' + b''\Theta'' + \text{etc.} = 0$$
$$c\Theta + c'\Theta' + c''\Theta'' + \text{etc.} = 0$$

etc., und ausserdem

$$l\Theta + l'\Theta' + l''\Theta'' + \text{etc.} = -\mathrm{K}.$$

Multiplicirt man demnach die Gleichungen (1) bezw. mit Θ, Θ', Θ'' etc. und addirt, so erhält man

$$0 = \Theta^2 + \Theta'^2 + \Theta''^2 + \text{etc.},$$

eine Gleichung, welche offenbar nicht bestehen kann, wenn nicht gleichzeitig $\Theta = 0$, $\Theta' = 0$, $\Theta'' = 0$ etc. wäre. Hieraus schliessen wir erstens, dass nothwendig $\mathrm{K} = 0$ sein muss. Sodann zeigen die Gleichungen (1), dass die Funktionen v, v', v'' etc. so beschaffen sind, dass ihre Werthe sich nicht ändern, wenn die Werthe der Grössen x, y, z etc. um Grössen zu- oder abnehmen, welche bezw. den F, G, H etc. proportional sind. Dasselbe wird offenbar von den Funktionen V, V′, V″ etc. gelten. Die Voraussetzung kann also nicht statt haben, ausser in dem Falle, wenn es sogar schon unmöglich gewesen wäre, aus den genauen Werthen der Grössen V, V′, V″ etc. die Werthe der Unbekannten x, y, z etc. zu bestimmen, d. h. wenn die Aufgabe ihrer Natur nach unbestimmt gewesen wäre, einen Fall, den wir von unserer Untersuchung ausgeschlossen haben.

24.

Wir bezeichnen mit β, β', β'' etc. Multiplicatoren, welche der Unbekannten y gegenüber dieselbe Rolle spielen, wie die α, α' α'' etc. gegenüber dem x; es sei also

$$a\,[\beta\alpha] + b\,[\beta\beta] + c\,[\beta\gamma] + \text{etc.} = \beta$$
$$a'[\beta\alpha] + b'[\beta\beta] + c'[\beta\gamma] + \text{etc.} = \beta'$$
$$a''[\beta\alpha] + b''[\beta\beta] + c''[\beta\gamma] + \text{etc.} = \beta''$$

etc., so dass allgemein wird

$$\beta v + \beta' v' + \beta'' v'' + \text{etc.} = y - \mathrm{B}.$$

Ebenso seien γ, γ', γ'' etc. analoge Multiplicatoren in Bezug auf die Unbekannte z, demnach

$$a\,[\gamma\alpha] + b\,[\gamma\beta] + c\,[\gamma\gamma] + \text{etc.} = \gamma$$
$$a'[\gamma\alpha] + b'[\gamma\beta] + c'[\gamma\gamma] + \text{etc.} = \gamma'$$
$$a''[\gamma\alpha] + b''[\gamma\beta] + c''[\gamma\gamma] + \text{etc.} = \gamma''$$

etc., so dass allgemein wird

$$\gamma v + \gamma' v' + \gamma'' v'' + \text{etc.} = z - \mathrm{C}$$

und so weiter. Ebenso wie wir im Art. 20. bereits fanden, dass $\Sigma\alpha a = 1$, $\Sigma\alpha b = 0$, $\Sigma\alpha c = 0$ etc., und ausserdem $\Sigma\alpha l = -\mathrm{A}$, so erhalten wir hiernach auch

$$\begin{array}{llll} \Sigma\beta a = 0, & \Sigma\beta b = 1, & \Sigma\beta c = 0 \text{ etc. und} & \Sigma\beta l = -\mathrm{B} \\ \Sigma\gamma a = 0, & \Sigma\gamma b = 0, & \Sigma\gamma c = 1 \text{ etc. und} & \Sigma\gamma l = -\mathrm{C} \end{array}$$

u. s. w. Und gerade so, wie man im Art. 20. erhielt $\Sigma\alpha^2 = [\alpha\alpha]$, wird auch

$$\Sigma\beta^2 = [\beta\beta], \quad \Sigma\gamma^2 = [\gamma\gamma] \text{ etc.}$$

Wenn man ferner die Werthe der α, α', α'' etc. (Art. 20. (4)) bezw. mit β, β', β'' etc. multiplicirt und addirt, so erhält man

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \text{etc.} = [\alpha\beta] \text{ oder } \Sigma\alpha\beta = [\alpha\beta].$$

Multiplicirt man aber die Werthe von β, β', β'' etc. bezw. mit α, α', α'' etc. und addirt, so folgt ebenso

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \text{etc.} = [\beta\alpha], \text{ also } [\alpha\beta] = [\beta\alpha].$$

Es wird weiter auf analoge Weise gefunden

$$[\alpha\gamma] = [\gamma\alpha] = \Sigma\alpha\gamma, \quad [\beta\gamma] = [\gamma\beta] = \Sigma\beta\gamma \text{ etc.}$$

25.

Ferner bezeichnen wir mit λ, λ', λ'' etc. diejenigen Werthe der Funktionen v, v', v'' etc., welche erhalten werden, wenn wir für x, y, z etc. ihre plausibelsten Werthe A, B, C etc. einsetzen, also

$$\begin{aligned} a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C} + \text{etc.} + l &= \lambda \\ a'\mathrm{A} + b'\mathrm{B} + c'\mathrm{C} + \text{etc.} + l' &= \lambda' \\ a''\mathrm{A} + b''\mathrm{B} + c''\mathrm{C} + \text{etc.} + l'' &= \lambda'' \end{aligned}$$

etc.; wir setzen ausserdem

$$\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \text{etc.} = \mathrm{M},$$

so dass M der Werth der Funktion Ω ist, welcher den plausibelsten Werthen der Variabeln entspricht, mithin auch der kleinste Werth dieser Funktion, wie wir im Art. 20. gezeigt haben. Hiernach wird $a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'' + \text{etc.}$ der Werth von ξ, welcher den Werthen $x = \mathrm{A}$, $y = \mathrm{B}$, $z = \mathrm{C}$ etc. entspricht, und zugleich $= 0$ sein, d. h. wir erhalten

$$\Sigma a\lambda = 0,$$

und es wird ebenso

$\Sigma b\lambda = 0$, $\Sigma c\lambda = 0$ etc.; ausserdem $\Sigma \alpha\lambda = 0$, $\Sigma \beta\lambda = 0$, $\Sigma \gamma\lambda = 0$ etc. Multiplicirt man endlich die Ausdrücke von λ, λ', λ'' etc. bezw. mit λ, λ', λ'' etc. und addirt, so erhält man

$$l\lambda + l'\lambda' + l''\lambda'' + \text{etc.} = \lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \text{etc., oder}$$

$$\Sigma l\lambda = \mathrm{M}.$$

26.

Ersetzen wir in der Gleichung $v = ax + by + cz + \text{etc.} + l$ die x, y, z etc. durch die Ausdrücke (7) des Art. 21., so folgt mit Hülfe von aus dem Vorhergehenden geläufigen Reduktionen

$$v = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \text{etc.} + \lambda$$

und ebenso wird allgemein

$$v' = \alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta + \text{etc.} + \lambda'$$
$$v'' = \alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta + \text{etc.} + \lambda''$$

etc. Multipliciren wir diese oder die Gleichungen (1) des Art. 20. bezw. mit λ, λ', λ'' etc. und addiren, so sehen wir, dass allgemein ist

$$\lambda v + \lambda' v' + \lambda'' v'' + \text{etc.} = \mathrm{M}.$$

27.

Die Funktion Ω kann im allgemeinen in mehreren Formen dargestellt werden, welche zu entwickeln die Mühe lohnen wird. Und zwar erhält man zunächst aus den Gleichungen (1) des Art. 20. durch Quadriren und Addiren unmittelbar

$$\Omega = x^2\Sigma a^2 + y^2\Sigma b^2 + z^2\Sigma c^2 + \text{etc.} + 2xy\Sigma ab + 2xz\Sigma ac + 2yz\Sigma bc$$
$$+ \text{etc.} + 2x\Sigma al + 2y\Sigma bl + 2z\Sigma cl + \text{etc.} + \Sigma l^2$$

als *erste* Form.

Multiplicirt man dieselben Gleichungen bezw. mit v, v', v'' etc. und addirt, so erhält man

$$\Omega = \xi x + \eta y + \zeta z + \text{etc.} + lv + l'v' + l''v'' + \text{etc.}$$

und hieraus, indem man für v, v', v'' etc. die im vorhergehenden Art. gegebenen Ausdrücke einsetzt,

$$\Omega = \xi x + \eta y + \zeta z + \text{etc.} - \mathrm{A}\xi - \mathrm{B}\eta - \mathrm{C}\zeta - \text{etc.} + \mathrm{M}$$

oder

$$\Omega = \xi(x - \mathrm{A}) + \eta(y - \mathrm{B}) + \zeta(z - \mathrm{C}) + \text{etc.} + \mathrm{M}$$

als *zweite* Form.

Setzen wir in der zweiten Form für $x - A$, $y - B$, $z - C$ etc. die Ausdrücke (7) des Art. 21., so erhalten wir die *dritte* Form

$$\begin{aligned}\Omega = [\alpha\alpha]\,\xi^2 + [\beta\beta]\,\eta^2 + [\gamma\gamma]\,\zeta^2 + \text{etc.} + 2[\alpha\beta]\,\xi\eta \\ + 2[\alpha\gamma]\,\xi\zeta + 2[\beta\gamma]\,\eta\zeta + \text{etc.} + M.\end{aligned}$$

Diesen kann als *vierte* Form die folgende hinzugefügt werden, welche sich aus der dritten und aus den Formeln des vorhergehenden Art. von selbst ergiebt,

$$\begin{aligned}\Omega &= (v - \lambda)^2 + (v' - \lambda')^2 + (v'' - \lambda'')^2 + \text{etc.} + M, \text{ oder}\\ \Omega &= M + \Sigma(v - \lambda)^2,\end{aligned}$$

welche Form die Bedingung des Minimums unmittelbar vor Augen führt.

28.

Es seien e, e', e'' etc. die Fehler, welche bei den Beobachtungen, die $V = L$, $V' = L'$, $V'' = L''$ etc. ergeben haben, begangen sind; d. h. die wahren Werthe der Funktionen V, V', V'' etc. seien bezw. $L - e$, $L' - e'$, $L'' - e''$ etc., und folglich die wahren Werthe von v, v', v'' etc. bezw. $-e\sqrt{p}$, $-e'\sqrt{p'}$, $-e''\sqrt{p''}$ etc. Hiermit wird der wahre Werth des x

$$= A - \alpha e\sqrt{p} - \alpha' e'\sqrt{p'} - \alpha'' e''\sqrt{p''} \text{ etc.},$$

oder der bei der zweckmässigsten Bestimmung des Werthes von x begangene Fehler, den wir mit $E(x)$ bezeichnen wollen, ist

$$= \alpha e\sqrt{p} + \alpha' e'\sqrt{p'} + \alpha'' e''\sqrt{p''} + \text{etc.}$$

Analog wird der bei der zweckmässigsten Bestimmung des Werthes von y begangene Fehler, den wir mit $E(y)$ bezeichnen werden,

$$= \beta e\sqrt{p} + \beta' e'\sqrt{p'} + \beta'' e''\sqrt{p''} + \text{etc.}$$

Den mittleren Werth des Quadrates $[E(x)]^2$ findet man

$$= m^2 p\,(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \text{etc.}) = m^2 p\,[\alpha\alpha],$$

den mittleren Werth des Quadrates $[E(y)]^2$ ebenso $= m^2 p\,[\beta\beta]$ etc., wie wir schon oben zeigten. Nun kann man auch den mittleren Werth des *Produktes* $E(x)\,E(y)$ angeben; derselbe wird nämlich

$$= m^2 p\,(\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \text{etc.}) = m^2 p\,[\alpha\beta]$$

gefunden. Man kann dieses kurz auch so ausdrücken: Die mittleren Werthe der Quadrate $[E(x)]^2$, $[E(y)]^2$ etc. sind bezw. den Produkten aus $\frac{1}{2} m^2 p$ in die partiellen Differentialquotienten zweiter Ordnung

$$\frac{d^2\Omega}{d\xi^2},\ \frac{d^2\Omega}{d\eta^2} \text{ etc.}$$

gleich, und der mittlere Werth eines solchen Produktes, wie $E(x)\,E(y)$, ist gleich dem Produkte aus $\frac{1}{2}m^2p$ in den Differentialquotienten $\frac{d^2\Omega}{d\xi\,d\eta}$, wenn man nämlich Ω als Funktion der Variabeln ξ, η, ζ etc. betrachtet.

29.

Es bezeichne t eine gegebene lineare Funktion der Grössen x, y, z etc., es sei also

$$t = fx + gy + hz + \text{etc.} + k.$$

Der aus den plausibelsten Werthen von x, y, z etc. hervorgehende Werth von t wird demnach $= f\mathrm{A} + g\mathrm{B} + h\mathrm{C} + \text{etc.} + k$ sein, den wir mit K bezeichnen wollen. Nimmt man diesen als wahren Werth von t an, so wird ein Fehler begangen

$$= f\mathrm{E}(x) + g\mathrm{E}(y) + h\mathrm{E}(z) + \text{etc.},$$

der mit $\mathrm{E}(t)$ bezeichnet werden möge. Der mittlere Werth dieses Fehlers wird offenbar $= 0$, d. h. der Fehler wird von einem constanten Theil frei sein. Der mittlere Werth des Quadrates $[\mathrm{E}(t)]^2$, d. h. der mittlere Werth der Summe

$$\begin{aligned} f^2[\mathrm{E}(x)]^2 &+ 2fg\,\mathrm{E}(x)\,\mathrm{E}(y) + 2fh\,\mathrm{E}(x)\,\mathrm{E}(z) + \text{etc.} \\ &+ g^2[\mathrm{E}(y)]^2 + 2gh\,\mathrm{E}(y)\,\mathrm{E}(z) + \text{etc.} \\ &\qquad\qquad + h^2[\mathrm{E}(z)]^2 + \text{etc. etc.}, \end{aligned}$$

wird aber nach den Ergebnissen des vorigen Art. gleich dem Produkte aus m^2p in die Summe

$$\begin{aligned} f^2[\alpha\alpha] &+ 2fg\,[\alpha\beta] + 2fh\,[\alpha\gamma] + \text{etc.} \\ &+ g^2\,[\beta\beta] + 2gh\,[\beta\gamma] + \text{etc.} \\ &\qquad\qquad + h^2\,[\gamma\gamma] + \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

oder gleich dem Produkte aus m^2p in den Werth der Funktion $\Omega - \mathrm{M}$ sein, welcher durch die Substitutionen

$$\xi = f,\quad \eta = g,\quad \zeta = h \text{ etc.}$$

entsteht. Bezeichnen wir also diesen bestimmten Werth der Funktion $\Omega - \mathrm{M}$ mit ω, so wird der mittlere zu befürchtende Fehler, wenn wir an der Bestimmung $t = \mathrm{K}$ festhalten, $= m\sqrt{p\omega}$, oder das Gewicht dieser Bestimmung $= \frac{1}{\omega}$ sein.

Da allgemein

$$\Omega - \mathrm{M} = (x - \mathrm{A})\,\xi + (y - \mathrm{B})\,\eta + (z - \mathrm{C})\,\zeta + \text{etc.}$$

ist, so muss ω auch dem bestimmten Werthe des Ausdrucks

$$(x - \mathrm{A})f + (y - \mathrm{B})\,g + (z - \mathrm{C})\,h + \text{etc.},$$

d. h. dem bestimmten Werth von $t - \mathrm{K}$ gleich sein, welcher sich ergiebt, wenn man den Variabeln x, y, z etc. diejenigen Werthe beilegt, welche den Werthen f, g, h etc. der ξ, η, ζ etc. entsprechen.

Endlich merken wir noch an, dass, wenn t in der Form einer Funktion der ξ, η, ζ etc. allgemein dargestellt wird, der constante Theil derselben nothwendig $= \mathrm{K}$ wird. Wenn also allgemein

$$t = \mathrm{F}\xi + \mathrm{G}\eta + \mathrm{H}\zeta + \text{etc.} + \mathrm{K}$$

ist, so wird $\omega = f\mathrm{F} + g\mathrm{G} + h\mathrm{H} + \text{etc.}$

30.

Die Funktion Ω erlangt, wie wir oben gesehen haben, ihren *absolut kleinsten* Werth M, wenn man $x = \mathrm{A}$, $y = \mathrm{B}$, $z = \mathrm{C}$ etc., oder $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. setzt. Ist aber irgend einer dieser Grössen schon ein *anderer* Werth beigelegt, z. B. $x = \mathrm{A} + \Delta$, so kann Ω durch Aenderungen der Uebrigen einen relativ kleinsten Werth erlangen, welcher offenbar mit Hülfe der Gleichungen

$$x = \mathrm{A} + \Delta, \quad \frac{d\Omega}{dy} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dz} = 0 \text{ etc.}$$

erhalten wird. Es muss deshalb $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. werden, und ferner, da ja

$$x = \mathrm{A} + [\alpha\alpha]\,\xi + [\alpha\beta]\,\eta + [\alpha\gamma]\,\zeta + \text{etc. ist, } \xi = \frac{\Delta}{[\alpha\alpha]}.$$

Zugleich wird man haben:

$$y = \mathrm{B} + \frac{[\alpha\beta]}{[\alpha\alpha]}\Delta, \quad z = \mathrm{C} + \frac{[\alpha\gamma]}{[\alpha\alpha]}\Delta \text{ etc.}$$

Der relativ kleinste Werth des Ω wird aber

$$= [\alpha\alpha]\,\xi^2 + \mathrm{M} = \mathrm{M} + \frac{\Delta^2}{[\alpha\alpha]}.$$

Umgekehrt schliessen wir hieraus, dass, wenn der Werth des Ω eine vorgeschriebene Grenze $\mathrm{M} + \mu^2$ nicht überschreiten soll, alsdann auch der Werth des x nothwendig in den Grenzen $\mathrm{A} - \mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ und $\mathrm{A} + \mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ liegen muss. Es verdient angemerkt zu werden, dass $\mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ dem mittleren zu befürchtenden Fehler des plausibelsten Werthes von x gleich wird, wenn man $\mu = m\sqrt{p}$ setzt, d. h. wenn μ gleich dem mittleren Fehler solcher Beobachtungen ist, welche das Gewicht 1 besitzen.

Allgemeiner wollen wir den kleinsten Werth von Ω aufsuchen, welcher für einen gegebenen Werth von t eintreten kann, wenn t wie im vorigen Art. die lineare Funktion $fx + gy + hz +$ etc. $+ k$ bezeichnet, und ihr plausibelster Werth $=$ K ist; jener vorgeschriebene Werth des t sei $\mathrm{K} + \varkappa$. Aus der Theorie der Maxima und Minima ist bekannt, dass die Lösung der Aufgabe aus den Gleichungen

$$\frac{d\Omega}{dx} = \Theta\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d\Omega}{dy} = \Theta\frac{dt}{dy}$$

$$\frac{d\Omega}{dz} = \Theta\frac{dt}{dz} \text{ etc.}$$

erhalten wird, d. h. aus $\xi = \Theta f$, $\eta = \Theta g$, $\zeta = \Theta h$ etc., wenn man mit Θ einen zunächst unbestimmten Faktor bezeichnet. Wenn wir also, wie in dem vorhergehenden Art., *allgemein*

$$t = \mathrm{F}\xi + \mathrm{G}\eta + \mathrm{H}\zeta + \text{etc.} + \mathrm{K}$$

setzen, so haben wir

$$\mathrm{K} + \varkappa = \Theta(f\mathrm{F} + g\mathrm{G} + h\mathrm{H} + \text{etc.}) + \mathrm{K}, \text{ oder}$$

$$\Theta = \frac{\varkappa}{\omega},$$

wo ω in derselben Bedeutung wie im vorigen Art. zu nehmen ist. Und da $\Omega - \mathrm{M}$ im allgemeinen eine homogene Funktion zweiter Ordnung der Variabeln ξ, η, ζ etc. ist, so wird augenscheinlich ihr Werth für $\xi = \Theta f$, $\eta = \Theta g$, $\zeta = \Theta h$ etc. $= \Theta^2\omega$, und folglich der kleinste Werth, den Ω für $t = \mathrm{K} + \varkappa$ erhalten kann, gleich $\mathrm{M} + \Theta^2\omega = \mathrm{M} + \frac{\varkappa^2}{\omega}$ werden. Umgekehrt, wenn Ω irgend einen vorgeschriebenen Werth $\mathrm{M} + \mu^2$ nicht überschreiten soll, so muss der Werth von t nothwendig in den Grenzen $\mathrm{K} - \mu\sqrt{\omega}$ und $\mathrm{K} + \mu\sqrt{\omega}$ enthalten sein, wo $\mu\sqrt{\omega}$ dem mittleren bei der plausibelsten Bestimmung von t zu befürchtenden Fehler gleich ist, wenn man μ als den mittleren Fehler der Beobachtungen annimmt, deren Gewicht $= 1$ ist.

31.

Wenn die Anzahl der Grössen x, y, z etc. etwas grösser ist, wird die numerische Bestimmung der Werthe A, B, C etc. aus den Gleichungen $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. vermittelst der gewöhnlichen Elimination ziemlich lästig sein. Deshalb haben wir in der *Theorie der Bewegung der Himmelskörper,* Art. 182., auf einen eigenthümlichen Algorithmus hingewiesen, und denselben in der *Untersuchung über die elliptischen Elemente der Pallas* (Comment. recent. Soc. Gotting. Vol. I) des weiteren entwickelt, durch welchen jene Arbeit, soweit es der Gegenstand erlaubt, thunlichst vereinfacht wird.

Die Funktion Ω ist nämlich auf folgende Form

$$\frac{u^{0\,2}}{\mathfrak{A}^0} + \frac{u'^2}{\mathfrak{B}'} + \frac{u''^2}{\mathfrak{C}''} + \frac{u'''^2}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.} + \text{M}$$

zu bringen, wo die Divisoren $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$, $\mathfrak{D}'''$ etc. bestimmte Grössen, u^0, u', u'', u''' etc. aber lineare Funktionen von x, y, z etc. sind, von denen indess die zweite u' kein x, die dritte u'' kein x und kein y, die vierte u''' kein x, y und z, und so weiter, enthält, wonach die letzte $u^{(\pi-1)}$ nur noch von der letzten der Unbekannten x, y, z etc. abhängt; endlich sind die Coefficienten, mit denen x, y, z etc. bezw. in u^0, u', u'' etc. multiplicirt sind, bezw. den $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$ etc. gleich. Alsdann hat man $u^0 = 0$, $u' = 0$, $u'' = 0$, $u''' = 0$ etc. zu setzen, um die Werthe der Unbekannten x, y, z etc. in umgekehrter Reihenfolge so bequem wie möglich abzuleiten. Es erscheint unnöthig, den Algorithmus selbst, durch welchen diese Transformation der Funktion Ω bewirkt wird, hier noch einmal zu wiederholen.

Aber eine noch viel weitläufigere Rechnung erfordert die unbestimmte Elimination, mit deren Hülfe man die Gewichte jener Bestimmungen aufzusuchen hat. Zwar das Gewicht der Bestimmung der letzten Unbekannten (welche allein in dem letzten $u^{(\pi-1)}$ vorkommt) wird nach dem, was in der „Theorie der Bewegung der Himmelskörper“ gelehrt ist, leicht gleich dem letzten Gliede in der Reihe der Divisoren $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$ etc. gefunden; deshalb haben sich einige Rechner, um jene lästige Elimination zu umgehen, in Ermangelung anderer Hülfsmittel, dazu entschlossen, den öfter erwähnten Algorithmus mit veränderter Reihenfolge der Grössen x, y, z etc. zu wiederholen, indem sie nach und nach den einzelnen Unbekannten den letzten Platz anwiesen. Wir hoffen deshalb auf den Dank der Mathematiker, wenn wir zur Berechnung der Gewichte der Bestimmungen eine neue, aus einer tieferen Analyse der Beweisführung geschöpfte Methode, welche nichts mehr zu wünschen übrig zu lassen scheint, hier auseinander setzen.

32.

Nehmen wir also an, es sei

$$\begin{aligned} u^0 &= \mathfrak{A}^0 x + \mathfrak{B}^0 y + \mathfrak{C}^0 z + \text{etc.} + \mathfrak{L}^0 \\ u' &= \mathfrak{B}' y + \mathfrak{C}' z + \text{etc.} + \mathfrak{L}' \\ u'' &= \mathfrak{C}'' z + \text{etc.} + \mathfrak{L}'' \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{1}$$

Hieraus folgt im allgemeinen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} d\Omega &= \xi dx + \eta dy + \zeta dz + \text{etc.} \\ &= \frac{u^0\, du^0}{\mathfrak{A}^0} + \frac{u'\, du'}{\mathfrak{B}'} + \frac{u''\, du''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} \\ &= u^0 \left(dx + \frac{\mathfrak{B}^0}{\mathfrak{A}^0} dy + \frac{\mathfrak{C}^0}{\mathfrak{A}^0} dz + \text{etc.}\right) \\ &\quad + u' \left(dy + \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} dz + \text{etc.}\right) + u'' (dz + \text{etc.}) + \text{etc.}, \end{aligned}$$

woraus zu erschliessen

$$\begin{aligned} \xi &= u^0 \\ \eta &= \frac{\mathfrak{B}^0}{\mathfrak{A}^0} u^0 + u' \\ \zeta &= \frac{\mathfrak{C}^0}{\mathfrak{A}^0} u^0 + \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} u' + u'' \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{2}$$

Nehmen wir an, es ergäben sich hieraus die folgenden Formeln

$$\begin{aligned} u^0 &= \xi \\ u' &= \mathrm{A}'\xi + \eta \\ u'' &= \mathrm{A}''\xi + \mathrm{B}''\eta + \zeta \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{3}$$

Von dem vollständigen Differential der Gleichung

$$\Omega = \xi(x - \mathrm{A}) + \eta(y - \mathrm{B}) + \zeta(z - \mathrm{C}) + \text{etc.} + \mathrm{M}$$

ziehen wir nunmehr die Gleichung

$$\frac{1}{2} d\Omega = \xi dx + \eta dy + \zeta dz + \text{etc.}$$

ab, und erhalten

$$\frac{1}{2}\,d\Omega = (x - \mathrm{A})\,d\xi + (y - \mathrm{B})\,d\eta + (z - \mathrm{C})\,d\zeta + \text{etc.},$$

welcher Ausdruck mit dem übereinstimmen muss, der sich aus (3) ergiebt, nämlich mit

$$\frac{u^0}{\mathfrak{A}^0}\,d\xi + \frac{u'}{\mathfrak{B}'}(\mathrm{A}'d\xi + d\eta) + \frac{u''}{\mathfrak{C}''}(\mathrm{A}''d\xi + \mathrm{B}''d\eta + d\zeta) + \text{etc.}$$

Hieraus folgern wir

$$\begin{aligned}
x &= \frac{u^0}{\mathfrak{A}^0} + \mathrm{A}'\frac{u'}{\mathfrak{B}'} + \mathrm{A}''\frac{u''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} + \mathrm{A}\\
y &= \frac{u'}{\mathfrak{B}'} + \mathrm{B}''\frac{u''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} + \mathrm{B}\\
z &= \frac{u''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} + \mathrm{C}\\
&\text{etc.}
\end{aligned} \tag{4}$$

Wenn man in diese Ausdrücke für u^0, u', u'' etc. ihre aus (3) entnommenen Werthe einsetzt, so wird die unbestimmte Elimination erledigt sein. Und zwar erhält man zur Bestimmung der Gewichte

$$\begin{aligned}
[\alpha\alpha] &= \frac{1}{\mathfrak{A}^0} + \frac{\mathrm{A}'^2}{\mathfrak{B}'} + \frac{\mathrm{A}''^2}{\mathfrak{C}''} + \frac{\mathrm{A}'''^2}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.}\\
[\beta\beta] &= \frac{1}{\mathfrak{B}'} + \frac{\mathrm{B}''^2}{\mathfrak{C}''} + \frac{\mathrm{B}'''^2}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.}\\
[\gamma\gamma] &= \frac{1}{\mathfrak{C}''} + \frac{\mathrm{C}'''^2}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.}\\
&\text{etc.,}
\end{aligned} \tag{5}$$

Formeln, deren Einfachheit nichts zu wünschen übrig lässt. Uebrigens ergeben sich auch für die anderen Coefficienten $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$, $[\beta\gamma]$ etc. gleich einfache Formeln, welche wir indessen, da sie seltener gebraucht werden, hier beizufügen unterlassen.

33.

Wegen der Bedeutung des Gegenstandes, und um Alles für die Rechnung bereit zu stellen, wollen wir auch die expliciten Formeln zur Bestimmung der Coefficienten A′, A″, A‴ etc., B″, B‴ etc. etc. hierherschreiben. Diese Rechnung kann auf eine doppelte Weise geführt werden, da dieselben Gleichungen sich ergeben müssen, ob man nun die aus (3) entnommenen Werthe der u^0, u', u'' etc. in (2) einsetzt, oder die Werthe der ξ, η, ζ etc. aus (2) in (3). Die erste Rechnungsart liefert folgendes Formelsystem:

$$\frac{\mathfrak{B}^0}{\mathfrak{A}^0} + A' = 0$$

$$\frac{\mathfrak{C}^0}{\mathfrak{A}^0} + \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} A' + A'' = 0$$

$$\frac{\mathfrak{D}^0}{\mathfrak{A}^0} + \frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{B}'} A' + \frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{C}''} A'' + A''' = 0$$

etc., woraus A', A'', A''' etc. gefunden werden,

$$\frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} + B'' = 0$$

$$\frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{B}'} + \frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{C}''} B'' + B''' = 0$$

etc., woraus B'', B''' etc. gefunden werden,

$$\frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{C}''} + C''' = 0$$

etc., woraus C''' etc. gefunden werden. U. s. w.

Die andere Rechnungsart ergiebt folgende Formeln:

$$\mathfrak{A}^0 A' + \mathfrak{B}^0 = 0,$$

woraus A' erhalten wird,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^0 A'' + \mathfrak{B}^0 B'' + \mathfrak{C}^0 &= 0 \\ \mathfrak{B}' B'' + \mathfrak{C}' &= 0, \end{aligned}$$

woraus B'' und A'' erhalten werden,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^0 A''' + \mathfrak{B}^0 B''' + \mathfrak{C}^0 C''' + \mathfrak{D}^0 &= 0 \\ \mathfrak{B}^0 B''' + \mathfrak{C}' C''' + \mathfrak{D}' &= 0 \\ \mathfrak{C}'' C''' + \mathfrak{D}'' &= 0, \end{aligned}$$

woraus C''', B''', A''' erhalten werden. U. s. w.

Beide Rechnungsarten sind ungefähr gleich bequem, wenn die Gewichte sämmtlicher Bestimmungen x, y, z etc. verlangt werden; wird aber nur eine oder die andere der Grössen $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$, $[\gamma\gamma]$ etc. gesucht, so ist offenbar das erstere System weit vorzuziehen.

Uebrigens führt eine Combination der Gleichungen (1) mit (4) zu denselben Formeln und verhilft uns ausserdem zu einer doppelten Berechnung der plausibelsten Werthe von A, B, C etc. selbst, nämlich *erstens*

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{A} = & -\frac{\mathfrak{L}^0}{\mathfrak{A}^0} - \mathrm{A}'\frac{\mathfrak{L}'}{\mathfrak{B}'} - \mathrm{A}''\frac{\mathfrak{L}''}{\mathfrak{C}''} - \mathrm{A}'''\frac{\mathfrak{L}'''}{\mathfrak{D}'''} - \text{etc.} \\
\mathrm{B} = & \qquad\qquad -\frac{\mathfrak{L}'}{\mathfrak{B}'} - \mathrm{B}''\frac{\mathfrak{L}''}{\mathfrak{C}''} - \mathrm{B}'''\frac{\mathfrak{L}'''}{\mathfrak{D}'''} - \text{etc.} \\
\mathrm{C} = & \qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{\mathfrak{L}''}{\mathfrak{C}''} - \mathrm{C}'''\frac{\mathfrak{L}'''}{\mathfrak{D}'''} - \text{etc.} \\
\text{etc.} &
\end{array}$$

Die andere Rechnung ist mit der gewöhnlichen identisch, bei der $u^0 = 0$, $u' = 0$, $u'' = 0$ etc. gesetzt wird.

34.

Die Entwickelungen des Art. 32. sind indessen nur specielle Fälle eines allgemeineren Lehrsatzes, der folgendermaassen lautet:

Lehrsatz. Es bezeichne t folgende lineare Funktion der Variabeln x, y, z etc.

$$t = fx + gy + hz + \text{etc.} + k,$$

welche sich als Funktion der Variabeln u^0, u', u'' etc. in der Form

$$t = k^0u^0 + k'u' + k''u'' + \text{etc.} + \mathrm{K}$$

darstellt. Alsdann wird K der plausibelste Werth des t sein, und das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \frac{1}{\mathfrak{A}^0 k^{02} + \mathfrak{B}'k'^2 + \mathfrak{C}''k''^2 + \text{etc.}}$$

Beweis. Der erste Theil des Lehrsatzes folgt aus dem Umstande, dass der plausibelste Werth von t den Werthen $u^0 = 0$, $u' = 0$, $u'' = 0$ etc. entsprechen muss. Zum Beweis des zweiten Theils bemerken wir, da

$$\frac{1}{2}d\Omega = \xi dx + \eta dy + \zeta dz + \text{etc. und } dt = fdx + gdy + hdz + \text{etc.}$$

ist, dass für $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$ etc., unabhängig von den Werthen der Differentiale dx, dy, dz etc.,

$$d\Omega = 2dt$$

sein muss. Daraus folgt aber, dass für dieselben Werthe $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$ etc:

$$\frac{u^0}{\mathfrak{A}^0}du^0 + \frac{u'}{\mathfrak{B}'}du' + \frac{u''}{\mathfrak{C}''}du'' + \text{etc.} = k^0du^0 + k'du' + k''du'' + \text{etc.}$$

wird. Auch erkennt man leicht, wenn dx, dy, dz etc. von einander unabhängig sind, dass auch du^0, du', du'' etc. von einander unabhängig sein müssen; woraus wir entnehmen, dass für $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$ etc.

$$u^0 = \mathfrak{A}^0 k^0, \quad u' = \mathfrak{B}' k', \quad u'' = \mathfrak{C}'' k'' \text{ etc.}$$

ist. Folglich wird der Werth von Ω, welcher zu denselben Werthen gehört,

$$= \mathfrak{A}^0 k^{0\,2} + \mathfrak{B}' k'^2 + \mathfrak{C}'' k''^2 + \text{etc.} + \mathrm{M},$$

woraus nach Art. 29. sofort die Richtigkeit unseres Lehrsatzes folgt.

Wenn wir übrigens die Transformation der Funktion t unmittelbar, d. h. ohne Kenntniss der Substitutionen (4) des Art. 32., ausführen wollen, so stehen die Formeln zur Verfügung:

$$\begin{aligned} f &= \mathfrak{A}^0 k^0 \\ g &= \mathfrak{B}^0 k^0 + \mathfrak{B}' k' \\ h &= \mathfrak{C}^0 k^0 + \mathfrak{C}' k' + \mathfrak{C}'' k'' \text{ etc.,} \end{aligned}$$

woraus nach und nach die Coefficienten k^0, k', k'' etc. bestimmt werden, und sich endlich ergiebt:

$$\mathrm{K} = k - \mathfrak{L}^0 k^0 - \mathfrak{L}' k' - \mathfrak{L}'' k'' - \text{etc.}$$

35.

Einer besonderen Behandlung werth ist das folgende Problem, sowohl seiner praktischen Nützlichkeit, als seiner eleganten Lösung wegen:

Die Aenderungen in den plausibelsten Werthen der Unbekannten, welche durch Hinzufügung einer neuen Gleichung bewirkt werden, ebenso wie die Gewichte der neuen Bestimmungen zu finden.

Wir behalten die oben benutzten Bezeichnungen bei, so dass die auf das Gewicht $= 1$ zurückgeführten, ursprünglichen Gleichungen die folgenden sind: $v = 0$, $v' = 0$, $v'' = 0$ etc., und die allgemeine Summe $v^2 + v'^2 + v''^2 + \text{etc.} = \Omega$ ist; ferner seien ξ, η, ζ etc. die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{d\Omega}{2dx}, \quad \frac{d\Omega}{2dy}, \quad \frac{d\Omega}{2dz} \text{ etc.,}$$

und endlich möge aus der unbestimmten Elimination folgen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathrm{A} + [\alpha\alpha]\,\xi + [\alpha\beta]\,\eta + [\alpha\gamma]\,\zeta + \text{etc.} \\ y &= \mathrm{B} + [\alpha\beta]\,\xi + [\beta\beta]\,\eta + [\beta\gamma]\,\zeta + \text{etc.} \\ z &= \mathrm{C} + [\alpha\gamma]\,\xi + [\beta\gamma]\,\eta + [\gamma\gamma]\,\zeta + \text{etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Wir nehmen nun an, eine (sehr nahe richtige, auf die Gewichtseinheit bezogene) neue Gleichung $v^* = 0$ trete hinzu, und wir wollen nachforschen, wie gross die hieraus hervorgehenden Aenderungen sowohl in den plausibelsten Werthen der Unbekannten A, B, C etc., als auch in den Coefficienten $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ etc. seien.

Wir setzen

$$\Omega + v^{*2} = \Omega^*, \quad \frac{d\Omega^*}{2dx} = \xi^*, \quad \frac{d\Omega^*}{2dy} = \eta^*, \quad \frac{d\Omega^*}{2dz} = \zeta^* \text{ etc.}$$

und nehmen an, durch Elimination folge hieraus

$$x = \mathrm{A}^* + [\alpha\alpha^*]\,\xi^* + [\alpha\beta^*]\,\eta^* + [\alpha\gamma^*]\,\zeta^* + \text{etc.}$$

Endlich sei

$$v^* = fx + gy + hz + \text{etc.} + k,$$

und durch Einsetzung der Werthe für x, y, z etc. nach (1) folge hieraus

$$v^* = \mathrm{F}\xi + \mathrm{G}\eta + \mathrm{H}\zeta + \text{etc.} + \mathrm{K};$$

sodann setze man

$$\mathrm{F}f + \mathrm{G}g + \mathrm{H}h + \text{etc.} = \omega.$$

Offenbar wird K der plausibelste Werth der Funktion v^* sein, wie er sich aus den ursprünglichen Gleichungen ergiebt, ohne Rücksicht auf den Werth 0, welchen die hinzutretende Beobachtung geliefert hat, und $\frac{1}{\omega}$ wird das Gewicht dieser Bestimmung sein.

Wir haben nun

$$\xi^* = \xi + fv^*, \quad \eta^* = \eta + gv^*, \quad \zeta^* = \zeta + hv^* \text{ etc.}$$

und deshalb

$$\mathrm{F}\xi^* + \mathrm{G}\eta^* + \mathrm{H}\zeta^* + \text{etc.} + \mathrm{K} = v^*(1 + \mathrm{F}f + \mathrm{G}g + \mathrm{H}h + \text{etc.})$$

oder

$$v^* = \frac{\mathrm{F}\xi^* + \mathrm{G}\eta^* + \mathrm{H}\zeta^* + \text{etc.} + \mathrm{K}}{1 + \omega}.$$

Ebenso wird

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{A} + [\alpha\alpha]\,\xi^* + [\alpha\beta]\,\eta^* + [\alpha\gamma]\,\zeta^* + \text{etc.} \\ &\qquad - v^*(f[\alpha\alpha] + g[\alpha\beta] + h[\alpha\gamma] + \text{etc.}) \\ &= \mathrm{A} + [\alpha\alpha]\,\xi^* + [\alpha\beta]\,\eta^* + [\alpha\gamma]\,\zeta^* + \text{etc.} - \mathrm{F}v^* \\ &= \mathrm{A} + [\alpha\alpha]\,\xi^* + [\alpha\beta]\,\eta^* + [\alpha\gamma]\,\zeta^* + \text{etc.} \\ &\qquad - \frac{\mathrm{F}}{1+\omega}(\mathrm{F}\xi^* + \mathrm{G}\eta^* + \mathrm{H}\zeta^* + \text{etc.} + \mathrm{K}). \end{aligned}$$

Hieraus schliessen wir demnach, dass

$$A^* = A - \frac{FK}{1+\omega}$$

der plausibelste Werth des x aus *allen* Beobachtungen sein wird; und da ferner

$$[\alpha\alpha^*] = [\alpha\alpha] - \frac{F^2}{1+\omega},$$

so ist das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \frac{1}{[\alpha\alpha] - \frac{F^2}{1+\omega}}.$$

Auf dieselbe Weise wird ferner der auf *allen* Beobachtungen beruhende plausibelste Werth des y gefunden

$$B^* = B - \frac{GK}{1+\omega},$$

und das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \frac{1}{[\beta\beta] - \frac{G^2}{1+\omega}}$$

und so weiter. W. z. f. w.

Dieser Lösung mögen einige Bemerkungen beigefügt werden.

I. Durch Einsetzung dieser neuen Werthe A^*, B^*, C^* etc. erhält die Funktion v^* den plausibelsten Werth

$$K - \frac{K}{1+\omega}(Ff + Gg + Hh + \text{etc.}) = \frac{K}{1+\omega}.$$

Und da allgemein

$$v^* = \frac{F}{1+\omega}\xi^* + \frac{G}{1+\omega}\eta^* + \frac{H}{1+\omega}\zeta^* + \text{etc.} + \frac{K}{1+\omega}$$

ist, so ergiebt sich nach den Principien des Art. 29. das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \frac{1+\omega}{Ff + Gg + Hh + \text{etc.}} = \frac{1}{\omega} + 1.$$

Dasselbe folgt unmittelbar aus der Anwendung der am Ende des Art. 22. gegebenen Regel; die Gruppe der ursprünglichen

Gleichungen würde nämlich die Bestimmung $v^* = \mathrm{K}$ mit dem Gewicht $\frac{1}{\omega}$ geliefert haben, sodann hätte die neue Beobachtung eine andere, von jener unabhängige Bestimmung $v^* = 0$ mit dem Gewichte $= 1$ gegeben, und durch Combinirung beider würde die Bestimmung $v^* = \frac{\mathrm{K}}{1+\omega}$ mit dem Gewichte $= \frac{1}{\omega} + 1$ folgen.

II. Hieraus folgt weiter, da für $x = \mathrm{A}^*$, $y = \mathrm{B}^*$, $z = \mathrm{C}^*$ etc. auch $\xi^* = 0$, $\eta^* = 0$, $\zeta^* = 0$ etc. sein muss, dass für dieselben Werthe

$$\xi = -\frac{f\mathrm{K}}{1+\omega},\ \eta = -\frac{g\mathrm{K}}{1+\omega},\ \zeta = -\frac{h\mathrm{K}}{1+\omega} \text{ etc.}$$

wird, und ferner, da allgemein

$$\Omega = \xi(x - \mathrm{A}) + \eta(y - \mathrm{B}) + \zeta(z - \mathrm{C}) + \text{etc.} + \mathrm{M}$$

ist,

$$\Omega = \frac{\mathrm{K}^2}{(1+\omega)^2}(\mathrm{F}f + \mathrm{G}g + \mathrm{H}h + \text{etc.}) + \mathrm{M} = \mathrm{M} + \frac{\omega\mathrm{K}^2}{(1+\omega)^2},$$

und endlich, weil ja allgemein $\Omega^* = \Omega + v^{*2}$ ist,

$$\Omega^* = \mathrm{M} + \frac{\omega\mathrm{K}^2}{(1+\omega)^2} + \frac{\mathrm{K}^2}{(1+\omega)^2} = \mathrm{M} + \frac{\mathrm{K}^2}{1+\omega}.$$

III. Vergleichen wir diese Ergebnisse mit den im Art. 30. vorgetragenen, so bemerken wir, dass hier der kleinste Werth der Funktion Ω derjenige ist, welchen sie für den bestimmten Werth der Funktion $v^* = \frac{\mathrm{K}}{1+\omega}$ annehmen kann.

36.

Für das folgende, dem vorhergehenden ähnliche Problem:

Die Aenderungen in den plausibelsten Werthen der Unbekannten, welche durch die Aenderung des Gewichts irgend einer der ursprünglichen Beobachtungen bewirkt werden, und ebenso die Gewichte der neuen Bestimmungen aufzusuchen.

soll hier nur die Lösung Platz finden, während wir den Beweis, welcher nach Analogie des vorigen Art. leicht geführt wird, der Kürze halber unterdrücken.

Nehmen wir an, es werde erst nach Vollendung der Rechnung bemerkt, dass man einer gewissen Beobachtung ein zu kleines oder zu grosses Gewicht beigelegt habe; z. B. habe man etwa der ersten, welche V = L gegeben hat, an Stelle des in der Rechnung angewandten Gewichtes p richtiger das Gewicht p^* beizulegen. Alsdann wird es nicht nöthig sein, die ganze Rechnung zu wiederholen, sondern es lassen sich bequemer aus nachfolgenden Formeln Correctionen berechnen.

Die verbesserten plausibelsten Werthe der Unbekannten werden folgende sein

$$x = \mathrm{A} - \frac{(p^* - p)\,\alpha\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

$$y = \mathrm{B} - \frac{(p^* - p)\,\beta\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

$$z = \mathrm{C} - \frac{(p^* - p)\,\gamma\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

etc., und die Gewichte dieser Bestimmungen werden gefunden, wenn man die Einheit bezw. durch

$$[\alpha\alpha] - \frac{(p^* - p)\,\alpha^2}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

$$[\beta\beta] - \frac{(p^* - p)\,\beta^2}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

$$[\gamma\gamma] - \frac{(p^* - p)\,\gamma^2}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})} \quad \text{etc.}$$

dividirt. Diese Lösung begreift auch den Fall in sich, wo man nach vollendeter Rechnung bemerkt, dass eine der Beobachtungen gänzlich zu verwerfen sei, da dies dasselbe ist, als wenn man $p^* = 0$ setzt; und ebenso entspricht der Werth $p^* = \infty$ dem Fall, wo die Gleichung V = L, welche in der Rechnung als angenähert behandelt worden war, in der That absolut genau ist.

Wenn übrigens zu den Gleichungen, welche der Rechnung zu Grunde gelegt sind, *mehrere* neue hinzukommen, oder wenn man bemerkt, dass *mehreren* von ihnen irrige Gewichte beigelegt sind, so würde die Berechnung der Correctionen zu verwickelt werden; deshalb wird man in diesem Fall es vorziehen, die Rechnung von neuem zu beginnen.

37.

In den Art. 15., 16. haben wir eine Methode zu einer möglichst angenäherten Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen gegeben*). Diese Methode setzt aber voraus, es seien die wirklich

*) Eine Untersuchung über denselben Gegenstand, welchen wir in einer

begangenen Fehler hinlänglich zahlreich und genau bekannt, eine Voraussetzung, welche streng genommen sehr selten, oder sagen wir lieber nie, zutreffen wird. Wenn aber wenigstens die Grössen, deren angenäherte Werthe durch Beobachtungen ermittelt wurden, nach einem bekannten Gesetz von einer oder mehreren unbekannten Grössen abhängen, so lassen sich die plausibelsten Werthe der letzteren durch die Methode der kleinsten Quadrate bestimmen; und von den hieraus berechneten Werthen der Grössen, welche den Beobachtungen unterworfen waren, wird vorausgesetzt, da sie nunmehr sehr wenig von den wahren Werthen abweichen, so dass ihre Unterschiede gegen die beobachteten Werthe mit um so grösserem Rechte als wahre Beobachtungsfehler behandelt werden dürften, je grösser ihre Anzahl gewesen ist. Dieses Verfahren haben alle Rechner befolgt, welche a posteriori die Genauigkeit von Beobachtungen in bestimmt vorliegenden Fällen zu schätzen unternahmen: offenbar ist dasselbe aber theoretisch fehlerhaft, und obwohl es in vielen Fällen für den praktischen Gebrauch genügen mag, kann es gleichwohl in anderen stark irre führen. Deshalb ist dieser Gegenstand im höchsten Grade einer schärferen Analyse werth.

Wir werden bei dieser Untersuchung die vom Art. 19. ab angewandten Bezeichnungen beibehalten. Das eben erwähnte Verfahren behandelt die Grössen A, B, C etc. als wahre Werthe der x, y, z etc., und demnach die λ, λ', λ'' etc. als wahre Werthe der Funktionen v, v', v'' etc. Wenn alle Beobachtungen gleiche Genauigkeit besitzen, und ihr Gewicht $p = p' = p''$ etc. als Einheit angenommen wird, so bedeuten die Grössen λ, λ', λ'' etc. mit entgegengesetzten Vorzeichen bei jener Voraussetzung die Beobachtungsfehler selbst, welche nach den Vorschriften des Art. 15. den mittleren Fehler m der Beobachtungen

$$= \sqrt{\frac{\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \text{etc.}}{\pi}} = \sqrt{\frac{\mathrm{M}}{\pi}}$$

ergeben. Ist die Genauigkeit der Beobachtungen verschieden, so würden die Grössen $-\lambda$, $-\lambda'$, $-\lambda''$ etc. die Beobachtungsfehler multiplicirt mit den Quadratwurzeln aus den Gewichten darstellen,

---

früheren Abhandlung (*Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen. Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften.* Bd. I, S. 185) veröffentlicht haben, war auf dieselbe Hypothese in Betreff des Charakters der Funktion, welche die Fehlerwahrscheinlichkeit ausdrückt, begründet, auf welcher wir auch in der „Theorie der Bewegung der Himmelskörper" die Methode der kleinsten Quadrate aufgebaut hatten (s. Art. 9., III).

und die Vorschriften des Art. 16. würden zu der nämlichen Formel $\sqrt{\frac{M}{\pi}}$ führen, welche schon den mittleren Fehler solcher Beobachtungen ausdrückt, denen das Gewicht $= 1$ beigelegt wird. Offenbar würde aber eine strenge Rechnung erfordern, dass an Stelle der Grössen λ, λ', λ'' etc. die aus den wahren Werthen von x, y, z etc. sich ergebenden Werthe der Funktionen v, v', v'' etc. gebraucht werden, d. h. an Stelle von M der den wahren Werthen von x, y, z etc. entsprechende Werth der Funktion Ω. Obgleich dieser nun nicht angegeben werden kann, sind wir dennoch sicher, dass er grösser als M sei (da M der kleinste mögliche Werth ist), den höchst unwahrscheinlichen Fall ausgenommen, dass die plausibelsten Werthe der Unbekannten mit den wahren genau übereinstimmen. Im allgemeinen können wir also versichern, dass das gewöhnliche Verfahren einen gewiss zu kleinen mittleren Fehler ergiebt, oder dass den Beobachtungen eine allzugrosse Genauigkeit beigelegt wird. Wir wollen jetzt zusehen, was die strenge Theorie lehrt.

38.

Vor allem muss man untersuchen, wie M von den wahren Beobachtungsfehlern abhängt. Diese bezeichnen wir, wie im Art. 28., mit e, e', e'' etc., und setzen der grösseren Einfachheit wegen

$$e\sqrt{p} = \varepsilon, \quad e'\sqrt{p'} = \varepsilon', \quad e''\sqrt{p''} = \varepsilon'' \text{ etc.}$$

und ebenso

$$m\sqrt{p} = m'\sqrt{p'} = m''\sqrt{p''} = \text{etc.} = \mu.$$

Es seien ferner die wahren Werthe der x, y, z etc. bezw. $A - x^0$, $B - y^0$, $C - z^0$ etc., und diesen mögen als Werthe der ξ, η, ζ etc. bezw. entsprechen $-\xi^0$, $-\eta^0$, $-\zeta^0$ etc. Offenbar entsprechen denselben als Werthe der v, v', v'' etc. bezw. $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc., so dass man hat

$$\begin{aligned} \xi^0 &= a\varepsilon + a'\varepsilon' + a''\varepsilon'' + \text{etc.} \\ \eta^0 &= b\varepsilon + b'\varepsilon' + b''\varepsilon'' + \text{etc.} \\ \zeta^0 &= c\varepsilon + c'\varepsilon' + c''\varepsilon'' + \text{etc.} \end{aligned}$$

etc., sowie

$$\begin{aligned} x^0 &= \alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \text{etc.} \\ y^0 &= \beta\varepsilon + \beta'\varepsilon' + \beta''\varepsilon'' + \text{etc.} \\ z^0 &= \gamma\varepsilon + \gamma'\varepsilon' + \gamma''\varepsilon'' + \text{etc.} \end{aligned}$$

etc.

Endlich setzen wir

$$\Omega^0 = \varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \text{etc.},$$

so dass Ω^0 der Werth der Funktion Ω ist, welcher den wahren Werthen der x, y, z etc. entspricht. Da man allgemein hat

$$\Omega = \text{M} + (x - \text{A})\,\xi + (y - \text{B})\,\eta + (z - \text{C})\,\zeta + \text{etc.},$$

so wird hiernach

$$\text{M} = \Omega^0 - x^0\xi^0 - y^0\eta^0 - z^0\zeta^0 - \text{etc.}$$

sein. Hieraus folgt offenbar, dass M sich als homogene Funktion zweiten Grades der Fehler e, e', e'' etc. entwickeln lässt, welche für verschiedene Werthe der Fehler grösser oder kleiner werden kann. So lange uns aber die Grösse der Fehler unbekannt bleibt, wird man diese Funktion bei der Untersuchung unbestimmt lassen, und vor allem ihren mittleren Werth nach den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu bestimmen suchen. Diesen werden wir finden, wenn wir an Stelle der Quadrate e^2, e'^2, e''^2 etc. bezw. m^2, m'^2, m''^2 etc. setzen, die Produkte ee', ee'', $e'e''$ etc. aber überhaupt weglassen, oder, was dasselbe ist, wenn wir an Stelle eines jeden Quadrates ε^2, ε'^2, ε''^2 etc. μ^2 schreiben und die Produkte $\varepsilon\varepsilon'$, $\varepsilon\varepsilon''$, $\varepsilon'\varepsilon''$ etc. vernachlässigen. Auf diese Weise entsteht aus dem Gliede Ω^0 offenbar $\pi\mu^2$; das Glied $-x^0\xi^0$ geht in

$$-(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \text{etc.})\,\mu^2 = -\mu^2$$

über, und analog geben die übrigen einzelnen Theile $-\mu^2$, so dass der mittlere totale Werth $= (\pi - \varrho)\,\mu^2$ wird, wenn π die Anzahl der Beobachtungen und ϱ die Anzahl der Unbekannten bezeichnet. Der wahre Werth des M kann zwar, je nach den zufälligen Fehlern, grösser oder kleiner als der mittlere werden, der Unterschied aber wird von um so geringerer Bedeutung sein, je grösser die Anzahl der Beobachtungen gewesen ist, so dass man als angenäherten Werth des μ

$$\sqrt{\frac{\text{M}}{\pi - \varrho}}$$

nehmen darf. Der Werth für μ, welcher sich aus der im vorigen Art. besprochenen irrthümlichen Praxis ergiebt, muss deshalb im Verhältniss der Grösse $\sqrt{\pi - \varrho}$ zu $\sqrt{\pi}$ vergrössert werden.

39.

Um noch deutlicher zu zeigen, mit wie grossem Rechte man einen zufälligen Werth des M dem mittleren gleich setzen darf, muss man den mittleren zu befürchtenden Fehler suchen, wenn $\frac{M}{\pi - \varrho} = \mu^2$ gesetzt wird. Jener mittlere Fehler ist gleich der Quadratwurzel aus dem mittleren Werthe der Grösse

$$\left(\frac{\Omega^0 - x^0 \xi^0 - y^0 \eta^0 - z^0 \zeta^0 - \text{etc.} - (\pi - \varrho)\mu^2}{\pi - \varrho}\right)^2,$$

der wir die Gestalt geben wollen

$$\left(\frac{\Omega^0 - x^0 \xi^0 - y^0 \eta^0 - z^0 \zeta^0 - \text{etc.}}{\pi - \varrho}\right)^2$$

$$- \frac{2\mu^2}{\pi - \varrho}\left[\Omega^0 - x^0 \xi^0 - y^0 \eta^0 - z^0 \zeta^0 - \text{etc.} - (\pi - \varrho)\mu^2\right] - \mu^4;$$

da offenbar der mittlere Werth des zweiten Gliedes $= 0$ wird, so verwandelt sich unsere Frage in die nach dem mittleren Werthe der Funktion

$$\Psi = (\Omega^0 - x^0 \xi^0 - y^0 \eta^0 - z^0 \zeta^0 - \text{etc.})^2.$$

Ist dieser gefunden, und bezeichnet man ihn mit N, so wird der gesuchte mittlere Fehler

$$= \sqrt{\frac{N}{(\pi - \varrho)^2} - \mu^4}.$$

Der Ausdruck Ψ lässt sich offenbar als homogene Funktion entweder der Fehler e, e', e'' etc. oder auch der Grössen ε, ε', ε'' etc. entwickeln, und sein mittlerer Werth wird gefunden, wenn

1. für die Biquadrate e^4, e'^4, e''^4 etc. ihre mittleren Werthe gesetzt werden,

2. für die einzelnen Produkte aus je zwei Quadraten, wie $e^2 e'^2$, $e^2 e''^2$, $e'^2 e''^2$ etc. die Produkte aus ihren mittleren Werthen, nämlich $m^2 m'^2$, $m^2 m''^2$, $m'^2 m''^2$ etc. gesetzt werden,

3. die übrigen Glieder aber, welche entweder einen Faktor von der Form $e^3 e'$, oder von der Form $e^2 e' e''$ enthalten, ganz fortgelassen werden. Die mittleren Werthe der Biquadrate e^4, e'^4, e''^4 etc. nehmen wir proportional den Biquadraten m^4, m'^4, m''^4 etc. an (siehe Art. 16.), so dass sich jene zu diesen wie ν^4 zu μ^4 verhalten, wo ν^4 also den mittleren Werth der Biquadrate solcher Beobachtungen bezeichnet, deren Gewicht $= 1$ ist. Demnach können die obigen Vorschriften auch so ausgedrückt werden: An Stelle der

einzelnen Biquadrate ε^4, ε'^4, ε''^4 etc. ist ν^4 zu schreiben, an Stelle der einzelnen Produkte aus je zwei Quadraten wie $\varepsilon^2\varepsilon'^2$, $\varepsilon^2\varepsilon''^2$, $\varepsilon'^2\varepsilon''^2$ etc. ist μ^4 zu schreiben, alle übrigen Glieder aber, die Faktoren wie $\varepsilon^3\varepsilon'$ oder $\varepsilon^2\varepsilon'\varepsilon''$ oder $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon'''$ enthalten, sind wegzulassen.

Hat man dieses genau begriffen, so findet man leicht:

I. Der mittlere Werth des Quadrates $\Omega^{0\,2}$ ist $\pi\nu^4 + (\pi^2 - \pi)\,\mu^4$.

II. Der mittlere Werth des Produktes $\varepsilon^2 x^0 \xi^0$ wird

$$= a\alpha\nu^4 + (a'\alpha' + a''\alpha'' + \text{etc.})\,\mu^4$$

oder, da $a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \text{etc.} = 1$ ist,

$$= a\alpha\,(\nu^4 - \mu^4) + \mu^4.$$

Und da der mittlere Werth des Produktes $\varepsilon'^2 x^0 \xi^0$ ebenso

$$= a'\alpha'\,(\nu^4 - \mu^4) + \mu^4$$

wird, der mittlere Werth des Produktes $\varepsilon''^2 x^0 \xi^0$ aber

$$= a''\alpha''\,(\nu^4 - \mu^4) + \mu^4$$

ist u. s. w., so wird offenbar der mittlere Werth des Produktes $(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \text{etc.})\, x^0\xi^0$ oder von $\Omega^0 x^0 \xi^0$

$$= \nu^4 - \mu^4 + \pi\mu^4$$

sein. Denselben mittleren Werth haben die Produkte $\Omega^0 y^0 \eta^0$, $\Omega^0 z^0 \zeta^0$ etc. Folglich wird der mittlere Werth des Produktes $\Omega^0\,(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})$

$$= \varrho\nu^4 + \varrho\,(\pi - 1)\,\mu^4.$$

III. Damit die noch übrigen Entwickelungen nicht zu verwickelt werden, soll eine zweckmässige Bezeichnung eingeführt werden. Wir gebrauchen zu dem Zweck das Zeichen Σ in einem etwas weiteren Sinne, als dies oben vorübergehend geschehen ist, so dass es eine Summe bezeichnet, bestehend aus dem Gliede, dem es vorgesetzt, und allen ähnlichen aber nicht identischen Gliedern, welche aus ihm durch alle Permutationen der Beobachtungen entspringen. Hiernach ist z. B. $x^0 = \Sigma\alpha\varepsilon$, $x^{0\,2} = \Sigma\alpha^2\varepsilon^2 + 2\,\Sigma\alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon'$. Setzt man dann den mittleren Werth des Produktes $x^{0\,2}\xi^{0\,2}$ gliedweise zusammen, so erhält man erstens den mittleren Werth des Produktes $\alpha^2\varepsilon^2\xi^{0\,2}$

$$= a^2\alpha^2\nu^4 + \alpha^2\,(a'^2 + a''^2 + \text{etc.})\,\mu^4$$
$$= a^2\alpha^2\,(\nu^4 - \mu^4) + \alpha^2\mu^4\Sigma a^2.$$

Der mittlere Werth des Produktes $\alpha'^2\varepsilon'^2\xi^{0\,2}$ wird ebenso

$= a'^2\alpha'^2(\nu^4 - \mu^4) + \alpha'^2\mu^4\Sigma a^2$ u. s. w., und deshalb der mittlere Werth des Produktes $\xi^{02}\Sigma\alpha^2\varepsilon^2$

$$= (\nu^4 - \mu^4)\,\Sigma a^2\alpha^2 + \mu^4\Sigma a^2\Sigma\alpha^2.$$

Der mittlere Werth des Produktes $\alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon'\xi^{02}$ wird weiter

$$= 2\,\alpha\alpha' a a'\mu^4,$$

und der mittlere Werth des Produktes $\alpha\alpha''\varepsilon\varepsilon''\xi^{02}$ ebenso

$$= 2\,\alpha\alpha'' a a''\mu^4 \text{ etc.},$$

woraus leicht zu schliessen ist, dass der mittlere Werth des Produktes $\xi^{02}\Sigma\alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon'$ sich

$$= 2\,\mu^4\,\Sigma a a \alpha' a' = \mu^4\left[(\Sigma a\alpha)^2 - \Sigma a^2\alpha^2\right] = \mu^4(1 - \Sigma a^2\alpha^2)$$

ergiebt. Wenn wir dies zusammenfassen, so erhalten wir den mittleren Werth des Produktes $x^{02}\,\xi^{02}$

$$= (\nu^4 - 3\,\mu^4)\,\Sigma a^2\alpha^2 + 2\,\mu^4 + \mu^4\,\Sigma a^2\,\Sigma\alpha^2.$$

IV. Ganz ähnlich findet man den mittleren Werth des Produktes $x^0 y^0 \xi^0 \eta^0$

$$= \nu^4\,\Sigma ab\alpha\beta + \mu^4\,\Sigma a\alpha\,b'\beta' + \mu^4\,\Sigma ab\,\alpha'\beta' + \mu^4\,\Sigma a\beta\,b'\alpha'.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}
\Sigma a\alpha b'\beta' &= \Sigma a\alpha\,\Sigma b\beta - \Sigma a\alpha b\beta\\
\Sigma ab\alpha'\beta' &= \Sigma ab\,\Sigma\alpha\beta - \Sigma ab\alpha\beta\\
\Sigma a\beta b'\alpha' &= \Sigma a\beta\,\Sigma b\alpha - \Sigma a\beta b\alpha,
\end{aligned}$$

woraus sich jener mittlere Werth, weil $\Sigma a\alpha = 1$, $\Sigma b\beta = 1$, $\Sigma a\beta = 0$, $\Sigma b\alpha = 0$ ist,

$$= (\nu^4 - 3\,\mu^4)\,\Sigma ab\alpha\beta + \mu^4\,(1 + \Sigma ab\,\Sigma\alpha\beta)$$

ergiebt.

V. Da ferner der mittlere Werth des Produktes $x^0\,z^0\,\xi^0\,\zeta^0$ auf dieselbe Weise

$$= (\nu^4 - 3\,\mu^4)\,\Sigma ac\alpha\gamma + \mu^4\,(1 + \Sigma ac\,\Sigma\alpha\gamma)$$

wird, u. s. w., so ergiebt sich durch Summirung der mittlere Werth des Produktes $x^0\xi^0\,(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})$

$$\begin{aligned}
&= (\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma\left[a\alpha\,(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})\right] + (\varrho + 1)\,\mu^4\\
&\quad + \mu^4\,(\Sigma a^2\,\Sigma\alpha^2 + \Sigma ab\,\Sigma\alpha\beta + \Sigma ac\,\Sigma\alpha\gamma + \text{etc.})\\
&= (\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma\left[a\alpha\,(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})\right] + (\varrho + 2)\,\mu^4.
\end{aligned}$$

VI. Ferner wird auf dieselbe Weise der mittlere Werth des Produktes $y^0\eta^0(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})$ gefunden

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma[b\beta(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})] + (\varrho + 2)\,\mu^4,$$

sodann der mittlere Werth des Produktes $z^0\zeta^0(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})$

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma[c\gamma(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})] + (\varrho + 2)\,\mu^4$$

u. s. w. Hieraus folgt durch Addition der mittlere Werth des Quadrates $(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})^2$

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2] + (\varrho^2 + 2\varrho)\,\mu^4.$$

VII. Durch sorgfältige Addition aller Glieder ergiebt sich endlich

$$\begin{aligned} \mathrm{N} &= (\pi - 2\varrho)\,\nu^4 + (\pi^2 - \pi - 2\pi\varrho + 4\varrho + \varrho^2)\,\mu^4 \\ &\quad + (\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2] \\ &= (\pi - \varrho)(\nu^4 - \mu^4) + (\pi - \varrho)^2\,\mu^4 \\ &\quad - (\nu^4 - 3\mu^4)\,\{\varrho - \Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2]\}. \end{aligned}$$

Daher wird der mittlere zu befürchtende Fehler von μ^2, wenn die Formel

$$\mu^2 = \frac{\mathrm{M}}{\pi - \varrho}$$

angewendet wird,

$$= \sqrt{\frac{\nu^4 - \mu^4}{\pi - \varrho} - \frac{\nu^4 - 3\mu^4}{(\pi - \varrho)^2}\left\{\varrho - \Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2]\right\}}.$$

40.

Die Grösse $\Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2]$, welche in den soeben gefundenen Ausdruck eingeht, kann zwar im allgemeinen nicht auf eine einfachere Form gebracht werden; nichtsdestoweniger lassen sich zwei Grenzen angeben, zwischen denen ihr Werth nothwendig liegen muss. *Erstens* nämlich lässt sich aus den oben entwickelten Relationen leicht zeigen, dass

$$\begin{aligned} &(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2 + (a\alpha' + b\beta' + c\gamma' + \text{etc.})^2 \\ &+ (a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' + \text{etc.})^2 + \text{etc.} = a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.}, \end{aligned}$$

woraus wir schliessen, dass $a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.}$ eine positive Grösse und kleiner (wenigstens nicht grösser) als die Einheit ist. Dasselbe gilt von der Grösse $a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \text{etc.}$, welche ja der Summe $(a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + \text{etc.})^2 + (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \text{etc.})^2 + (a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' + \text{etc.})^2 + \text{etc.}$ gleich gefunden wird; ebenso wird $a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' + \text{etc.}$ kleiner als Eins sein, u. s. w. Hiernach ist $\Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2]$ nothwendig kleiner als π. *Zweitens* hat man $\Sigma(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.}) = \varrho$, da ja $\Sigma a\alpha = 1$, $\Sigma b\beta = 1$, $\Sigma c\gamma = 1$ etc., woraus leicht geschlossen wird, dass die Summe der Quadrate $\Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2]$ grösser als $\frac{\varrho^2}{\pi}$, oder wenigstens nicht kleiner sei. Daher liegt das Glied

$$\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{(\pi - \varrho)^2}\left\{\varrho - \Sigma\,[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2]\right\}$$

nothwendig zwischen den Grenzen $-\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \varrho}$ und $\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \varrho}\frac{\varrho}{\pi}$, oder, wenn wir weitere Grenzen vorziehen, zwischen $-\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \varrho}$ und $+\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \varrho}$, und hiernach das Quadrat des mittleren zu befürchtenden Fehlers für den Werth von $\mu^2 = \frac{\text{M}}{\pi - \varrho}$ in den Grenzen $\frac{2\nu^4 - 4\mu^4}{\pi - \varrho}$ und $\frac{2\mu^4}{\pi - \varrho}$, so dass man jedwede Genauigkeit erreichen kann, wenn nur die Anzahl der Beobachtungen hinreichend gross gewesen ist.

Es ist sehr bemerkenswerth, dass bei derjenigen Hypothese (Art. 9., III), auf welche die Theorie der kleinsten Quadrate früher begründet worden war, jenes Glied ganz wegfällt, und dass, ebenso wie man zur Ermittelung eines angenäherten Werthes μ des mittleren Fehlers der Beobachtungen in allen Fällen die Summe

$$\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \text{etc.} = \text{M}$$

so behandeln muss, als wenn sie die Summe von $\pi - \varrho$ zufälligen Fehlern wäre, gerade so bei jener Hypothese auch die Genauigkeit selbst dieser Bestimmung derjenigen gleich wird, welche nach den Ergebnissen des Art. 15. der Bestimmung aus $\pi - \varrho$ wahren Fehlern zukommt.