I.

Theorie
der den kleinsten Fehlern unterworfenen
Combination der Beobachtungen.

Erster Theil.

(Der Königlichen Societät der Wissenschaften zu Göttingen überreicht 1821, Februar 15.)

1.

Beobachtungen, welche sich auf Grössenbestimmungen aus der Sinnenwelt beziehen, werden immer, so sorgfältig man auch verfahren mag, grösseren oder kleineren Fehlern unterworfen bleiben. Die Fehler der Beobachtungen sind im allgemeinen nicht einfache, sondern entspringen gleichzeitig mehreren Quellen, bei denen zwei Arten genau unterschieden werden müssen. Gewisse Fehlerursachen sind nämlich so beschaffen, dass ihr Einfluss auf jede Beobachtung von veränderlichen Umständen abhängt, die unter sich und mit der Beobachtung selbst in keinem wesentlichen Zusammenhang stehen; die so entstehenden Fehler werden unregelmässige oder zufällige genannt; und insoweit jene Umstände der Rechnung nicht unterworfen werden können, gilt dieses auch von den Fehlern selbst. Dahin gehören die von der Unvollkommenheit unserer Sinne herrührenden Fehler und solche, die von unregelmässigen äusseren Ursachen abhängen, z. B. von der durch das Wallen der Luft bewirkten Unsicherheit beim Sehen; auch rechnen wir hierher manche, selbst den besten Instrumenten anhaftende Unvollkommenheiten, z. B. Ungleichförmigkeiten der inneren Wandungen der Libellen, Mangel an absoluter Festigkeit u. s. w. Dagegen haben andere Fehlerursachen bei sämmtlichen Beobachtungen derselben Art ihrer Natur nach entweder einen vollkommen constanten Einfluss, oder doch einen solchen, dessen Grösse in gesetzmässig bestimmter Weise allein von Umständen abhängt, welche mit der Beobachtung wesentlich verknüpft sind. Fehler dieser Art werden constante oder regelmässige genannt.

Uebrigens ist es klar, dass diese Unterscheidung gewissermaassen nur relativ ist und von dem weiteren oder engeren Sinne abhängt, in welchem man den Begriff von Beobachtungen derselben Art fassen will. So bringen z. B. unregelmässige Fehler der Theilung der Instrumente bei Winkelmessungen einen constanten Fehler hervor, wenn es sich nur um eine beliebig oft zu wiederholende Beobachtung desselben Winkels handelt, und wenn dabei immer dieselben fehlerhaften Theilstriche benutzt werden; während der aus derselben Quelle stammende Fehler als ein zufälliger angesehen werden kann, wenn man irgendwie Winkel von beliebiger Grösse zu messen hat, und eine Tafel, die für jeden Theilstrich den zugehörigen Fehler angiebt, nicht zu Gebote steht.

2.

Die Betrachtung der regelmässigen Fehler soll von unseren Untersuchungen ausdrücklich ausgeschlossen bleiben. Es ist nämlich Sache des Beobachters, alle Ursachen, welche constante Fehler hervorzubringen vermögen, sorgfältig aufzusuchen und dieselben entweder abzustellen, oder wenigstens ihrer Wirkung und Grösse nach auf das genaueste zu erforschen, um ihren Einfluss auf jede einzelne Beobachtung bestimmen und diese von jenem befreien zu können, so dass ein Ergebniss erzielt wird, als ob der Fehler überhaupt nicht vorhanden gewesen wäre. Ganz verschieden hiervon ist aber das Wesen der unregelmässigen Fehler, welche ihrer Natur nach der Rechnung nicht unterworfen werden können. Diese wird man daher in den Beobachtungen zwar dulden, ihren Einfluss aber auf die aus den Beobachtungen abzuleitenden Grössen durch eine geschickte Combination der ersteren möglichst abschwächen müssen. Dieser wichtigen Aufgabe ist die folgende Untersuchung gewidmet.

3.

Die Fehler in den Beobachtungen gleicher Art, welche einer bestimmten einfachen Ursache entspringen, sind der Natur der Sache nach in bestimmte *Grenzen* eingeschlossen, welche man zweifelsohne genau angeben könnte, wenn die Natur dieser Ursache selbst *vollständig* erkannt wäre. Die meisten Ursachen zufälliger Fehler sind so beschaffen, dass nach dem Gesetz der Stetigkeit alle zwischen jenen Grenzen enthaltenen Fehler für möglich gehalten werden müssen, und dass die vollständige Erkenntniss einer solchen Ursache zugleich lehren würde, ob alle diese Fehler mit gleicher oder ungleicher Leichtigkeit begangen werden können, und, in letzterem Falle, eine wie grosse relative Wahrscheinlichkeit jedem Fehler beizulegen sei. Dasselbe gilt auch in Bezug auf den totalen Fehler, der sich aus mehreren einfachen Fehlern zusammensetzt, dass er nämlich zwischen bestimmten Grenzen eingeschlossen sein wird (von denen die eine der Summe aller oberen, die andere der Summe aller unteren Theilgrenzen gleich ist); alle Fehler zwischen diesen Grenzen werden zwar möglich sein, da sich indess jeder auf unendlich viele verschiedene Weisen durch Zusammensetzung der Theilfehler, welche selbst wieder mehr oder weniger wahrscheinlich sind, ergeben kann, so werden wir für den einen eine grössere, für den andern eine geringere Häufigkeit annehmen müssen, und es könnte unter der Voraussetzung, dass man die Gesetze der einfachen Fehler kennt, ein Gesetz der relativen Wahrscheinlichkeit aufgestellt werden, abgesehen von den analytischen Schwierigkeiten beim Zusammenfassen aller Combinationen.

Freilich giebt es auch gewisse Fehlerursachen, welche nicht nach dem Gesetz der Stetigkeit fortschreitende, sondern nur unstetige Fehler hervorbringen können, wie z. B. die Theilungsfehler der Instrumente (wenn man diese überhaupt zu den zufälligen Fehlern rechnen will); denn die Anzahl der Theilstriche an jedem bestimmten Instrument ist endlich. Dessen ungeachtet wird aber offenbar, wenn nur nicht alle Fehlerursachen unstetige Fehler erzeugen, die Gesammtheit aller möglichen Totalfehler eine nach dem Gesetz der Stetigkeit fortschreitende Reihe bilden, oder auch mehrere derartige getrennte Reihen, wenn es sich nämlich bei Anordnung aller möglichen unstetigen Fehler nach ihrer Grösse ergeben sollte, dass zufällig eine oder die andere Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern dieser Reihe grösser ist, als die Differenz zwischen den Grenzen derjenigen Totalfehler, welche den stetigen Fehlern allein entstammen. In der Praxis wird aber der letztere Fall kaum jemals eintreten, wenn nicht etwa die Theilung an groben Fehlern leidet.

4.

Bezeichnet man mit $\varphi(x)$ die relative Häufigkeit des Totalfehlers x bei einer bestimmten Gattung von Beobachtungen, so wird wegen der Stetigkeit der Fehler die Wahrscheinlichkeit eines zwischen den unendlich nahen Grenzen x und $x + dx$ liegenden Fehlers $= \varphi(x)\,dx$ zu setzen sein. Es wird in der Praxis wohl immer so gut wie unmöglich sein, diese Funktion a priori anzugeben; nichtsdestoweniger lassen sich mehrere allgemeine Eigenschaften derselben feststellen, welche hier folgen sollen. Offenbar ist die Funktion $\varphi(x)$ insofern zu den unstetigen Funktionen zu rechnen, als sie für alle Werthe des x, welche ausserhalb der Grenzen der möglichen Fehler liegen, $= 0$ sein muss; innerhalb dieser Grenzen wird sie aber überall einen positiven Werth annehmen (abgesehen von dem Fall, über den wir am Ende des vorigen Art. gesprochen haben). In den meisten Fällen wird man positive und negative Fehler von derselben Grösse als gleich häufig voraussetzen dürfen, so dass $\varphi(-x) = \varphi(x)$ sein wird. Da ferner kleinere Fehler leichter als grössere begangen werden, so wird im allgemeinen $\varphi(x)$ für $x = 0$ seinen grössten Werth erhalten und beständig abnehmen, wenn x wächst.

Allgemein giebt aber der Werth des von $x = a$ bis $x = b$ genommenen Integrals $\int \varphi(x)\,dx$ die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass irgend ein noch unbekannter Fehler zwischen den Grenzen a und b liegt. Der Werth dieses Integrals von der unteren Grenze aller möglichen Fehler bis zu ihrer oberen Grenze wird daher immer $= 1$ sein. Und da $\varphi(x)$ für alle ausserhalb dieser Grenzen liegenden Werthe des x immer $= 0$ ist, so ist offenbar auch

der Werth des von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ genommenen Integrals $\int \varphi(x)\,dx$ immer $= 1$.

5.

Wir betrachten ferner das Integral $\int x\,\varphi(x)\,dx$ zwischen denselben Grenzen, und setzen seinen Werth $= k$. Sind alle einfachen Fehlerursachen nun so beschaffen, dass kein Anlass vorhanden ist, zwei gleichen, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehenen Fehlern verschiedene Häufigkeit beizulegen, so wird dasselbe auch für den totalen Fehler gelten, es ist also $\varphi(-x) = \varphi(x)$, und deshalb nothwendig $k = 0$. Wir schliessen hieraus, dass, jedesmal wenn k nicht verschwindet, sondern etwa eine positive Grösse ist, nothwendig eine oder die andere Fehlerursache vorhanden sein müsse, welche entweder nur positive Fehler, oder wenigstens häufiger positive als negative zu erzeugen vermöge. Diese Grösse k, welche in der That das Mittel aller möglichen Fehler oder der mittlere Werth der Grösse x ist, kann passend der constante Theil des Fehlers genannt werden. Uebrigens ist leicht zu beweisen, dass der constante Theil des totalen Fehlers gleich der Summe der constanten Theile derjenigen Fehler ist, welche aus den einzelnen einfachen Ursachen hervorgehen. Setzt man jetzt die Grösse k als bekannt voraus, subtrahirt dieselbe von jeder Beobachtung und bezeichnet den Fehler der so verbesserten Beobachtung mit x', die entsprechende Wahrscheinlichkeit aber mit $\varphi'(x')$, so wird $x' = x - k$, $\varphi'(x') = \varphi(x)$ und folglich

$$\int x' \varphi'(x') dx' = \int x \varphi(x) dx - \int k \varphi(x) dx = k - k = 0,$$

d. h. die Fehler der verbesserten Beobachtungen werden keinen constanten Theil haben, was auch an sich klar ist.

6.

Wie das Integral $\int x \varphi(x) dx$, oder der mittlere Werth von x, das Fehlen oder Vorhandensein und die Grösse eines constanten Fehlers anzeigt, ebenso erscheint das von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ ausgedehnte Integral

$$\int x^2 \varphi(x) dx$$

(oder der mittlere Werth des Quadrates x^2) am geeignetsten, die Unsicherheit von Beobachtungen allgemein zu definiren und zu messen, so dass bei zwei Beobachtungsgruppen, die sich hinsichtlich der Häufigkeit der Fehler unterscheiden, diejenigen Beobachtungen für die genaueren zu halten sind, für welche das Integral $\int x^2 \varphi(x) dx$ den kleineren Werth erhält. Wenn nun jemand einwenden würde, diese Festsetzung sei ohne zwingende Nothwendigkeit willkürlich getroffen, so stimmen wir gern zu. Enthält doch diese Frage der Natur der Sache nach etwas Unbestimmtes, welches nur durch ein in gewisser Hinsicht willkürliches Princip bestimmt begrenzt werden kann. Die Bestimmung einer Grösse durch eine einem grösseren oder kleineren Fehler unterworfene Beobachtung wird nicht unpassend mit einem Glücksspiel verglichen, in welchem man nur verlieren, aber nicht gewinnen kann, wobei also jeder zu befürchtende Fehler einem Verluste entspricht. Das Risiko eines solchen Spieles wird nach dem wahrscheinlichen Verlust geschätzt, d. h. nach der Summe der Produkte der einzelnen möglichen Verluste in die zugehörigen Wahrscheinlickeiten. Welchem Verluste man aber jeden einzelnen Beobachtungsfehler gleichsetzen soll, ist keineswegs an sich klar; hängt doch vielmehr diese Bestimmung zum Theil von unserem Ermessen ab. Den Verlust dem Fehler selbst gleichzusetzen, ist offenbar nicht erlaubt; würden nämlich positive Fehler wie Verluste behandelt, so müssten negative als Gewinne gelten. Die Grösse des Verlustes muss vielmehr durch eine solche Funktion des Fehlers ausgedrückt werden, die ihrer Natur nach immer positiv ist. Bei der unendlichen Mannigfaltigkeit derartiger Funktionen scheint die einfachste, welche diese Eigenschaft besitzt, vor den übrigen den Vorzug zu verdienen, und diese ist unstreitig das Quadrat. Somit ergiebt sich das oben aufgestellte Princip.

Laplace hat die Sache zwar auf eine ähnliche Weise betrachtet, er hat aber den immer positiv genommenen Fehler selbst als Maass des Verlustes gewählt. Wenn wir jedoch nicht irren, so ist diese Festsetzung sicherlich nicht weniger willkürlich, als die unsrige: ob nämlich der doppelte Fehler für ebenso erträglich zu halten ist, wie der einfache, zweimal wiederholte, oder für schlimmer, und ob es daher angemessener ist, dem doppelten Fehler nur das doppelte Moment, oder ein grösseres beizulegen, ist eine Frage, die weder an sich klar, noch durch mathematische Beweise zu entscheiden, sondern allein dem freien Ermessen zu überlassen ist. Ausserdem kann man nicht leugnen, dass die in Rede stehende Festsetzung gegen die Stetigkeit verstösst: und gerade deshalb widerstrebt dieses Verfahren in höherem Grade der analytischen Behandlung, während die Resultate, zu welchen unser Princip führt, sich sowohl durch Einfachheit als auch durch Allgemeinheit ganz besonders auszeichnen.

7.

Wir setzen den Werth des von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ genommenen Integrals $\int x^2 \varphi(x)\, dx = m^2$, und nennen die Grösse m *den mittleren zu befürchtenden Fehler*, oder einfach *den mittleren Fehler* der Beobachtungen, deren unbestimmte Fehler x die relative Wahrscheinlichkeit $\varphi(x)$ haben. Jene Bezeichnung werden wir nicht auf unmittelbare Beobachtungen beschränken, sondern auch auf alle aus Beobachtungen abgeleiteten Bestimmungen ausdehnen. Man muss sich indess sehr wohl davor hüten, den mittleren Fehler mit dem arithmetischen Mittel aller Fehler, von welchem im Art. 5. die Rede war, zu verwechseln.

Wo mehrere Gattungen von Beobachtungen oder mehrere aus Beobachtungen erhaltene Bestimmungen, denen nicht dieselbe Genauigkeit zukommt, zu vergleichen sind, verstehen wir unter dem relativen *Gewicht* derselben eine Grösse, die dem m^2 umgekehrt proportional ist, während die *Genauigkeit* einfach dem m umgekehrt proportional genommen wird. Um demnach das Gewicht durch eine Zahl ausdrücken zu können, muss man das Gewicht einer gewissen Gattung von Beobachtungen als Einheit annehmen.

8.

Enthalten die Beobachtungsfehler einen constanten Theil, so wird durch seine Elimination der mittlere Fehler verringert, das Gewicht und die Genauigkeit vermehrt. Unter Beibehaltung der Bezeichnungen des Art. 5. erhält man, wenn m' den mittleren Fehler der verbesserten Beobachtungen bedeutet,

$$m'^2 = \int x'^2 \varphi'(x')\,dx' = \int (x-k)^2 \varphi(x)\,dx = \int x^2 \varphi(x)\,dx$$
$$-2k\int x\,\varphi(x)\,dx + k^2 \int \varphi(x)\,dx = m^2 - 2k^2 + k^2 = m^2 - k^2.$$

Wenn man aber an Stelle des wahren constanten Theiles k eine andere Grösse l von den Beobachtungen abgezogen hätte, so würde das Quadrat des neuen mittleren Fehlers $= m^2 - 2kl + l^2$ $= m'^2 + (l-k)^2$ werden.

9.

Bezeichnet man mit λ einen bestimmten Coefficienten und mit μ den Werth des Integrals $\int \varphi(x)\,dx$ von $x = -\lambda m$ bis $x = +\lambda m$, so wird μ die Wahrscheinlichkeit dafür sein, dass der Fehler irgend einer Beobachtung (dem absoluten Werthe nach) kleiner als λm sei, dagegen $1 - \mu$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fehler grösser als λm sei. Wenn also der Werth $\mu = \frac{1}{2}$ dem Werth $\lambda m = \varrho$ entspricht, so wird der Fehler ebenso leicht unterhalb ϱ als oberhalb ϱ liegen können, so dass ϱ passend der *wahrscheinliche* Fehler genannt werden kann. Die Beziehung zwischen den Grössen λ und μ hängt offenbar von der Natur der Funktion $\varphi(x)$ ab, welche im allgemeinen unbekannt ist. Es wird deshalb die Mühe lohnen, jene Beziehung für einige besondere Fälle näher zu betrachten.

I. Sind die Grenzen aller möglichen Fehler $-a$ und $+a$, und sind alle Fehler in diesen Grenzen gleich wahrscheinlich, so wird $\varphi(x)$ in den Grenzen $x = -a$ und $x = +a$ constant und folglich $= \frac{1}{2a}$ sein. Hieraus ergiebt sich $m = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ und $\mu = \lambda\sqrt{\frac{1}{3}}$, so lange λ nicht grösser als $\sqrt{3}$ ist; endlich wird $\varrho = m\sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}8660254\,m$,

$k \int_{-a}^{+a} dx = 1;$ $k = \varphi(x)$

$m^2 = \int x^2 (\varphi(x))\,dx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a} x^2 dx = \frac{1}{3}a^2;$ $m = a\sqrt{\frac{1}{3}}$;

$\mu = \int_{-\lambda m}^{+\lambda m} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2a}\int_{-\lambda m}^{+\lambda m} dx = \frac{1}{2a} 2\lambda m = \lambda\left(\frac{m}{a}\right) = \lambda\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\varrho = \lambda m = m, \mu\sqrt{3} - m\sqrt{\frac{3}{4}}$ ...

und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler nicht grösser als der mittlere Fehler werde, $= \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,5773503$.

II. Sind die Grenzen der möglichen Fehler, wie vorher, $-a$ und $+a$, und nimmt man an, dass die Wahrscheinlichkeit dieser Fehler vom Fehler 0 ab nach beiden Seiten in arithmetischer Progression abnehme, so wird

$\varphi(x) = \frac{a-x}{a^2}$, für die Werthe von x zwischen 0 und $+a$,

$\varphi(x) = \frac{a+x}{a^2}$, für die Werthe von x zwischen 0 und $-a$,

sein. Es folgt hieraus $m = a\sqrt{\frac{1}{6}}$, $\mu = \lambda\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{6}\lambda^2$, so lange λ zwischen 0 und $\sqrt{6}$ liegt, und endlich $\lambda = \sqrt{6} - \sqrt{6 - 6\mu}$, so lange μ zwischen 0 und 1 liegt, und hieraus

$$\varrho = m(\sqrt{6} - \sqrt{3}) = 0,7174389\, m.$$

Die Wahrscheinlichkeit eines den mittleren nicht übersteigenden Fehlers wird in diesem Falle

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{6} = 0,6498299.$$

III. Nehmen wir die Funktion $\varphi(x)$ proportional zu $e^{-\frac{x^2}{h^2}}$ (was zwar in der Wirklichkeit nur sehr nahe richtig sein kann), so wird

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{h^2}}}{h\sqrt{\pi}}$$

sein müssen, wobei π den halben Kreisumfang für den Radius 1 bezeichnet, woraus wir ferner ableiten

$$m = h\sqrt{\frac{1}{2}}$$

(Siehe: Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc., art. 28.). Bezeichnet man ferner den Werth des von $z = 0$ an genommenen Integrals

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-z^2} dz$$

mit $\Theta(z)$, so wird

$$\mu = \Theta\left(\lambda\sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

Die folgende Tafel giebt einige Werthe dieser Grösse:

λ	μ
0,6744897	0,5
0,8416213	0,6
1,0000000	0,6826895
1,0364334	0,7
1,2815517	0,8
1,6448537	0,9
2,5758293	0,99
3,2918301	0,999
3,8905940	0,9999
∞	1

10.

Obgleich die Beziehung zwischen λ und μ von der Natur der Funktion $\varphi(x)$ abhängt, so kann man doch einige allgemeine Eigenschaften derselben feststellen. Wie nämlich diese Funktion auch beschaffen sei, so wird sicher, wenn sie nur die Eigenschaft hat, dass ihr Werth bei wachsendem absoluten Werthe von x immer abnimmt oder wenigstens nicht wächst,

λ kleiner oder wenigstens nicht grösser als $\mu\sqrt{3}$ sein, wenn μ kleiner als $\frac{2}{3}$,

λ nicht grösser als $\frac{2}{3\sqrt{1-\mu}}$ sein, wenn μ grösser als $\frac{2}{3}$ ist.

Für $\mu = \frac{2}{3}$ fallen beide Grenzen zusammen, und λ kann alsdann nicht grösser als $\sqrt{\frac{4}{3}}$ sein.

Um diesen merkwürdigen Lehrsatz zu beweisen, bezeichnen wir mit y den Werth des von $z = -x$ bis $z = +x$ genommenen Integrals $\int \varphi(z)\,dz$; y wird alsdann die Wahrscheinlichkeit dafür sein, dass irgend ein Fehler in den Grenzen $-x$ und $+x$ enthalten ist. Ferner setzen wir

$$x = \psi(y), \qquad d\,\psi(y) = \psi'(y)\,dy, \qquad d\psi'(y) = \psi''(y)\,dy.$$

Es wird demnach $\psi(0) = 0$ sein, und

$$\psi'(y) = \frac{1}{\varphi(x) + \varphi(-x)},$$

woraus mit Rücksicht auf die Voraussetzung folgt, dass $\psi'(y)$ von $y = 0$ bis $y = 1$ beständig wächst oder wenigstens nirgends abnimmt; oder, was dasselbe ist, dass der Werth von $\psi''(y)$ immer positiv oder wenigstens nicht negativ ist. Ferner haben wir $d(y\psi'(y)) = \psi'(y)\,dy + y\,\psi''(y)\,dy$, und folglich

$$y\,\psi'(y) - \psi(y) = \int y\,\psi''(y)\,dy,$$

wenn man die Integration mit $y = 0$ beginnen lässt. Der Werth des Ausdrucks $y\,\psi'(y) - \psi(y)$ wird deshalb immer eine positive oder wenigstens keine negative Grösse, und folglich

$$1 - \frac{\psi(y)}{y\,\psi'(y)}$$

eine positive Grösse kleiner als 1 sein. Es sei f ihr Werth für $y = \mu$, also es sei, da man $\psi(\mu) = \lambda m$ hat,

$$f = 1 - \frac{\lambda m}{\mu\,\psi'(\mu)} \quad \text{oder} \quad \psi'(\mu) = \frac{\lambda m}{(1-f)\mu}.$$

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir folgende Funktion des y

$$\frac{\lambda m}{(1-f)\,\mu}(y - \mu f),$$

welche wir $=$ F(y) setzen, wobei $d\,\mathrm{F}(y) = \mathrm{F}'(y)\,dy$. Offenbar wird dann

$$\mathrm{F}(\mu) = \lambda m = \psi(\mu)$$
$$\mathrm{F}'(\mu) = \frac{\lambda m}{(1-f)\,\mu} = \psi'(\mu).$$

Da nun $\psi'(y)$ mit wachsendem y immer wächst (oder wenigstens nicht abnimmt, was stets hinzuzudenken ist), und da $\mathrm{F}'(y)$ andererseits constant ist, so wird die Differenz $\psi'(y) - \mathrm{F}'(y) = \frac{d(\psi(y) - \mathrm{F}(y))}{dy}$ für Werthe von y, welche grösser als μ sind, positiv, für kleinere negativ sein. Hieraus ist leicht zu ersehen, dass $\psi(y) - \mathrm{F}(y)$ immer eine positive Grösse, und dass ferner $\psi(y)$ immer absolut grösser oder wenigstens nicht kleiner als F(y) ist, wenigstens so lange als der Werth von F(y) positiv ist, d. h. von $y = \mu f$ bis $y = 1$. Deshalb wird der Werth des Integrals $\int[\mathrm{F}(y)]^2\,dy$ von $y = \mu f$ bis $y = 1$ kleiner sein als der Werth des Integrals $\int[\psi(y)]^2\,dy$ in denselben Grenzen, und um so mehr auch kleiner als der Werth dieses Integrals von $y = 0$ bis $y = 1$, welches $= m^2$ ist. Der Werth des ersteren Integrals ergiebt sich aber

$$= \frac{\lambda^2 m^2 (1-\mu f)^3}{3\mu^2 (1-f)^2},$$

woraus man entnimmt, dass λ^2 kleiner sei als $\frac{3\mu^2(1-f)^2}{(1-\mu f)^3}$, wo die Grösse f zwischen 0 und 1 liegt. Der Werth des Bruches $\frac{3\mu^2(1-f)^2}{(1-\mu f)^3}$, dessen Differential, wenn f als Variable betrachtet wird,

$$= -\frac{3\mu^2(1-f)}{(1-\mu f)^4}(2-3\mu+\mu f)\,df$$

ist, nimmt ferner beständig ab, wenn f vom Werthe 0 bis zum Werthe 1 steigt, sobald μ kleiner ist als $\frac{2}{3}$; der grösstmögliche Werth wird deshalb dem Werthe $f = 0$ entsprechen und folglich $= 3\mu^2$ werden, so dass in diesem Fall λ sicher kleiner oder doch nicht grösser als $\mu\sqrt{3}$ wird. W. z. b. w. Wenn hingegen μ grösser als $\frac{2}{3}$ ist, so wird der grösste Werth jenes Bruches für $2 - 3\mu + \mu f = 0$ eintreten, d. h. für $f = 3 - \frac{2}{\mu}$, und zwar wird derselbe $= \frac{4}{9(1-\mu)}$, und λ kann also in diesem Falle nicht grösser als $\frac{2}{3\sqrt{1-\mu}}$ sein. W. z. b. w.

So kann z. B. für $\mu = \frac{1}{2}$ sicher λ nicht grösser als $\sqrt{\frac{3}{4}}$ werden, d. h. der wahrscheinliche Fehler kann die Grenze $0{,}8660254\,m$ nicht übersteigen, welcher Werth für ihn im ersten Beispiel des Art. 9. gefunden wurde. Ferner schliesst man aus unserem Satze leicht, dass μ nicht kleiner als $\lambda\sqrt{\frac{1}{3}}$ sei, so lange λ kleiner als $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ist, dass hingegen μ nicht kleiner als $1 - \frac{4}{9\lambda^2}$ sein könne, wenn der Werth von λ grösser als $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ist.

11.

Da mehrere der später zu behandelnden Aufgaben auch mit dem Werth des Integrals $\int x^4 \varphi(x)\,dx$ im Zusammenhang stehen, so wird es die Mühe lohnen, denselben für einige specielle Fälle zu ermitteln. Wir bezeichnen den Werth dieses von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ genommenen Integrals mit n^4.

I. Für $\varphi(x) = \frac{1}{2a}$ wird, wenn x zwischen $-a$ und $+a$ eingeschlossen ist, $n^4 = \frac{1}{5} a^4 = \frac{9}{5} m^4$.

II. Für den zweiten Fall des Art. 9., wenn $\varphi(x) = \frac{a \mp x}{a^2}$ für Werthe von x zwischen 0 und $\pm a$ ist, hat man $n^4 = \frac{1}{15} a^4 = \frac{12}{5} m^4$.

III. Im dritten Fall, wenn

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{h^2}}}{h\sqrt{\pi}},$$

findet man, nach den in der oben angeführten Abhandlung erhaltenen Resultaten, $n^4 = \frac{3}{4} h^4 = 3m^4$.

Ausserdem lässt sich zeigen, dass der Werth von $\frac{n^4}{m^4}$ nicht kleiner als $\frac{9}{5}$ sein kann, wenn nur die Voraussetzung des vorigen Art. erfüllt ist.

12.

Bezeichnen x, x', x'' etc. allgemein Fehler von Beobachtungen derselben Art, die unabhängig von einander seien, und drückt ein vorgesetztes Zeichen φ ihre relativen Wahrscheinlichkeiten aus, ist ferner y eine gegebene rationale Funktion der Variabeln x, x', x'' etc., dann wird das vielfache Integral

$$\int \varphi(x)\, \varphi(x')\, \varphi(x'') \ldots .\, dx\, dx'\, dx'' \ldots ., \tag{I}$$

erstreckt über alle Werthe der Variabeln x, x', x'' etc., für welche der Werth des y zwischen die gegebenen Grenzen 0 und η fällt, die Wahrscheinlichkeit dafür ausdrücken, dass der Werth des y irgendwo zwischen 0 und η liegt. Offenbar wird dieses Integral eine Funktion von η sein, deren Differential wir $= \psi(\eta)\, d\eta$ setzen, so dass das Integral selbst dem Integral $\int \psi(\eta)\, d\eta$, von $\eta = 0$ angefangen, gleich ist. Alsdann wird das Zeichen $\psi(\eta)$ die relative Wahrscheinlichkeit eines jeden Werthes von y ausdrücken müssen. Da man x nun als eine Funktion der Variabeln y, x', x'' etc. ansehen kann, die mit $f(y, x', x'' \ldots)$ bezeichnet werden möge, so verwandelt sich das Integral (I) in

$$\int \varphi[f(y, x', x'' \ldots)] \frac{df(y, x', x'' \ldots)}{dy}\, \varphi(x')\, \varphi(x'') \ldots dy\, dx'\, dx'' \ldots,$$

wo y von $y = 0$ bis $y = \eta$ genommen werden muss, die übrigen Variablen aber über alle Werthe zu erstrecken sind, denen ein reeller Werth von $f(y, x', x'' \ldots)$ entspricht. Hieraus schliesst man, dass

$$\psi(y) = \int \varphi\,[f(y, x', x'' \ldots)] \frac{df(y, x', x'' \ldots)}{dy} \varphi(x')\,\varphi(x'') \ldots dx'\,dx'' \ldots,$$

wo die Integration, bei welcher y als constant betrachtet werden muss, über alle Werthe der Variabeln x', x'' etc. zu erstrecken ist, die für $f(y, x', x'' \ldots)$ einen reellen Werth ergeben.

13.

Um obige Integration wirklich auszuführen, müsste man die Funktion φ kennen, welche im allgemeinen unbekannt ist. Selbst wenn aber auch die Funktion bekannt wäre, würde die Integration meistens die Kräfte der Analysis übersteigen. Deshalb werden wir zwar die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Werthe des y nicht angeben können; anders aber wird es sich verhalten, wenn man nur den mittleren Werth des y verlangt; derselbe ergiebt sich nämlich durch Integration von $\int y\,\psi(y)\,dy$ über alle möglichen Werthe des y. Und da man offenbar für alle Werthe, welche y nicht annehmen kann — sei es der Natur der mit y bezeichneten Funktion wegen (z. B. bei $y = x^2 + x'^2 + x''^2 +$ etc. für die negativen Werthe), sei es um der den Fehlern x, x', x'' etc. gesetzten bestimmten Grenzen willen —, $\psi(y) = 0$ setzen muss, so darf man mit demselben Rechte offenbar jene Integration über alle reellen Werthe von y erstrecken, also von $y = -\infty$ bis $y = +\infty$. Nun ist aber das in den bestimmten Grenzen von $y = \eta$ bis $y = \eta'$ genommene Integral $\int y\,\psi(y)\,dy$ gleich dem Integral

$$\int y\,\varphi\,[f(y, x', x'' \ldots)] \frac{df(y, x', x'' \ldots)}{dy} \varphi(x')\,\varphi(x'') \ldots dy\,dx'\,dx'' \ldots,$$

welches gleichfalls von $y = \eta$ bis $y = \eta'$ und über alle Werthe der Variabeln x', x'' etc., denen ein reeller Werth von $f(y, x', x'' \ldots)$ entspricht, zu erstrecken ist; oder, was dasselbe ist, auch gleich dem Werthe des Integrals

$$\int y\,\varphi(x)\,\varphi(x')\,\varphi(x'') \ldots dx\,dx'\,dx'' \ldots,$$

wenn bei dieser Integration für y sein Werth als Funktion von x, x', x'' etc. eingesetzt, und dieselbe über alle Werthe dieser Variabeln, welchen ein zwischen η und η' liegender Werth des y entspricht, ausgedehnt wird. Hieraus folgern wir, dass das über alle Werthe des y, von $y = -\infty$ bis $y = +\infty$ ausgedehnte Integral $\int y\, \psi(y)\, dy$ aus der Integration von

$$\int y\, \varphi(x)\, \varphi(x')\, \varphi(x'') \ldots dx\, dx'\, dx'' \ldots$$

erhalten wird, wenn man dieselbe über alle reellen Werthe von x, x', x'' etc. erstreckt, demnach von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$, von $x' = -\infty$ bis $x' = +\infty$ etc.

14.

Besteht daher die Funktion y nur aus einer Summe von Gliedern von der Form

$$\mathrm{A}\, x^{\alpha}\, x'^{\beta}\, x''^{\gamma} \ldots,$$

so wird der Werth des über alle Werthe von y erstreckten Integrals $\int y\, \psi(y)\, dy$, oder der mittlere Werth von y, einer Summe von Gliedern

$$\mathrm{A} \times \int x^{\alpha}\, \varphi(x)\, dx \times \int x'^{\beta}\, \varphi(x')\, dx' \times \int x''^{\gamma}\, \varphi(x'')\, dx'' \ldots$$

gleich sein, bei welchen die Integrationen von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$, von $x' = -\infty$ bis $x' = +\infty$ etc. zu nehmen sind; oder, was dasselbe ist, gleich einer Summe von Gliedern, welche entstehen, wenn man für die einzelnen Potenzen x^{α}, x'^{β}, x''^{γ} etc. ihre mittleren Werthe einsetzt. Die Richtigkeit dieses so wichtigen Lehrsatzes hätte auch leicht aus anderen Ueberlegungen gefolgert werden können.

15.

Wir wollen den im vorigen Art. aufgestellten Lehrsatz auf den speciellen Fall anwenden, dass

$$y = \frac{x^2 + x'^2 + x''^2 + \text{etc.}}{\sigma},$$

wo σ die Anzahl der Glieder im Zähler bezeichnet. Den mittleren Werth des y finden wir hier ohne Weiteres $= m^2$, indem wir dem Buchstaben m dieselbe Bedeutung wie oben geben. Der wahre Werth des y kann sich zwar in einem bestimmten Fall grösser oder kleiner als dieser mittlere ergeben, ebenso wie der wahre Werth eines einzelnen Gliedes x^2; die Wahrscheinlichkeit aber, dass ein gelegentlicher Werth des y von dem mittleren m^2 nicht wesentlich abweiche, wird sich stetig um so mehr der Gewissheit nähern, je mehr die Zahl σ wächst. Um dieses noch klarer zu zeigen, werden wir, da wir die Wahrscheinlichkeit selbst nicht genau zu bestimmen im Stande sind, den mittleren bei der Annahme $y = m^2$ zu befürchtenden Fehler suchen. Nach den im Art. 6. aufgestellten Principien wird dieser Fehler offenbar gleich der Quadratwurzel aus dem mittleren Werthe der Funktion

$$\left(\frac{x^2 + x'^2 + x''^2 + \text{etc.}}{\sigma} - m^2\right)^2$$

sein; zur Auffindung desselben genügt die Bemerkung, dass der mittlere Werth eines Gliedes von der Form $\frac{x^4}{\sigma^2}$ gleich $\frac{n^4}{\sigma^2}$ ist (wo der Buchstabe n dieselbe Bedeutung wie im Art. 11. hat), dass dagegen der mittlere Werth eines Gliedes von der Form $\frac{2\,x^2\,x'^2}{\sigma^2}$ gleich $\frac{2m^4}{\sigma^2}$ ist; woraus unmittelbar der mittlere Werth jener Funktion

$$= \frac{n^4 - m^4}{\sigma}$$

folgt.

Hieraus ersehen wir, dass, wenn nur eine hinlänglich grosse Anzahl von einander unabhängiger, zufälliger Fehler x, x', x'' etc. vorhanden ist, aus ihnen ein angenäherter Werth des m mit grosser Sicherheit mittelst der Formel

$$m = \sqrt{\frac{x^2 + x'^2 + x''^2 + \text{etc.}}{\sigma}}$$

gefunden werden könne, und dass der mittlere bei dieser Bestimmung zu befürchtende Fehler des Quadrates m^2

$$= \sqrt{\frac{n^4 - m^4}{\sigma}}$$

sei. Da indess diese letzte Formel die Grösse n enthält, so wird es genügen, falls es sich nur um die Erlangung einer ungefähren Vorstellung von dem Genauigkeitsgrade jener Bestimmung handelt, irgend eine specielle Form der Funktion φ anzunehmen. Z. B. wird bei der dritten Annahme der Art. 9. und 11. dieser Fehler $= m^2\sqrt{\frac{2}{\sigma}}$. Wenn dies weniger befriedigt, so kann ein angenäherter Werth von n^4 aus den Fehlern selbst mit Hülfe der Formel

$$\frac{x^4 + x'^4 + x''^4 + \text{etc.}}{\sigma}$$

abgeleitet werden. Im allgemeinen können wir aber versichern, dass für eine zweimal grössere Genauigkeit jener Bestimmung eine vierfache Anzahl von Fehlern erforderlich ist, oder dass das Gewicht der Bestimmung der Anzahl σ selbst proportional ist.

Auf ähnliche Weise wird man ferner, wenn die Beobachtungsfehler einen constanten Theil besitzen, einen angenäherten Werth dieses Theils um so sicherer aus dem arithmetischen Mittel vieler Fehler ableiten können, je grösser deren Anzahl war. Und zwar wird der mittlere zu befürchtende Fehler dieser Bestimmung durch

$$\sqrt{\frac{m^2 - k^2}{\sigma}}$$

ausgedrückt, wenn k den constanten Theil selbst und m den mittleren Fehler der von dem constanten Theil noch nicht befreiten Beobachtungen ausdrückt; oder einfach durch $\frac{m}{\sqrt{\sigma}}$, wenn m den mittleren Fehler der von dem constanten Theil freien Beobachtungen bezeichnet. (Siehe Art. 8.)

16.

In den Art. 12. bis 15. haben wir vorausgesetzt, dass die Fehler x, x', x'' etc. sich auf dieselbe Gattung von Beobachtungen beziehen, so dass die Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen durch dieselbe Funktion ausgedrückt werde. Augenscheinlich kann aber die allgemeine Untersuchung der Art. 12. bis 14. ebenso leicht auf den allgemeineren Fall ausgedehnt werden, wo die Wahrscheinlichkeiten der Fehler x, x', x'' etc. durch verschiedene Funktionen $\varphi(x)$, $\varphi'(x')$, $\varphi''(x'')$ etc. ausgedrückt werden, d. h. wo sich jene Fehler auf Beobachtungen verschiedener Schärfe oder Unsicherheit beziehen. Nehmen wir an, x sei der Fehler einer Beobachtung, deren mittlerer zu befürchtender Fehler $= m$ ist; ebenso seien x', x'' etc. die Fehler anderer Beobachtungen, deren mittlere zu befürchtende Fehler bezw. m', m'' etc. sind. Dann wird der mittlere Werth der Summe $x^2 + x'^2 + x''^2 +$ etc. gleich $m^2 + m'^2 + m''^2 +$ etc. sein. Ist nun anderweit schon bekannt, dass die Grössen m, m', m'' etc. in gegebenem Verhältniss zueinander stehen, also den Zahlen 1, μ', μ'' etc. bezw. proportional sind, so wird der mittlere Werth des Ausdrucks

$$\frac{x^2 + x'^2 + x''^2 + \text{etc.}}{1 + \mu'^2 + \mu''^2 + \text{etc.}}$$

$= m^2$ sein. Setzen wir aber einen bestimmten Werth dieses Ausdrucks, jenachdem der Zufall Fehler x, x', x'' etc. liefert, dem m^2 gleich, so wird der mittlere Fehler, welcher dieser Bestimmung noch anhaftet, auf ähnliche Weise wie im vorhergehenden Art.

$$= \frac{\sqrt{n^4 + n'^4 + n''^4 + \text{etc.} - m^4 - m'^4 - m''^4 - \text{etc.}}}{1 + \mu'^2 + \mu''^2 + \text{etc.}}$$

gefunden, wo n', n'' etc. in Bezug auf die Beobachtungen, zu welchen die Fehler x', x'' etc. gehören, dieselbe Bedeutung haben sollen, wie n in Bezug auf die erste Beobachtung. Wenn man nun die Zahlen n, n', n'' etc. den m, m', m'' etc. proportional annehmen darf, so wird jener mittlere zu befürchtende Fehler

$$= \frac{\sqrt{n^4 - m^4}\ \sqrt{1 + \mu'^4 + \mu''^4 + \text{etc.}}}{1 + \mu'^2 + \mu''^2 + \text{etc.}}.$$

Diese Methode, einen angenäherten Werth von m zu bestimmen, ist aber nicht die zweckmässigste. Um dies desto deutlicher zu machen, betrachten wir den allgemeineren Ausdruck

$$y = \frac{x^2 + \alpha' x'^2 + \alpha'' x''^2 + \text{etc.}}{1 + \alpha'\mu'^2 + \alpha''\mu''^2 + \text{etc.}},$$

dessen mittlerer Werth ebenfalls $= m^2$ wird, wie man auch die Coefficienten α', α'' etc. wählen möge. Der mittlere zu befürchtende Fehler aber wird, wenn man einen bestimmten Werth von y, jenachdem der Zufall Fehler x, x', x'' etc. liefert, gleich m^2 annimmt, mit Hülfe der oben vorgetragenen Principien

$$= \frac{\sqrt{(n^4 - m^4) + \alpha'^2 (n'^4 - m'^4) + \alpha''^2 (n''^4 - m''^4) + \text{etc.}}}{1 + \alpha'\mu'^2 + \alpha''\mu''^2 + \text{etc.}}$$

gefunden. Damit dieser mittlere Fehler so klein als möglich wird, ist zu setzen:

$$\alpha' = \frac{n^4 - m^4}{n'^4 - m'^4}\mu'^2$$

$$\alpha'' = \frac{n^4 - m^4}{n''^4 - m''^4}\mu''^2 \quad \text{etc.}$$

Offenbar können diese Werthe nur dann berechnet werden, wenn überdies die Beziehung der Grössen n, n', n'' etc. zu m, m', m'' etc. anderweit bekannt ist; fehlt aber diese genaue Kenntniss, so erscheint es wenigstens am sichersten*), sie zu einander proportional anzunehmen (siehe Art. 11.), woraus man die Werthe erhält

$$\alpha' = \frac{1}{\mu'^2}, \quad \alpha'' = \frac{1}{\mu''^2} \text{ etc.},$$

d. h. die Coefficienten α', α'' etc. müssen den relativen Gewichten der Beobachtungen, zu welchen die Fehler x', x'' etc. gehören, gleich gesetzt werden, nachdem man das Gewicht der Beobachtung, zu welcher der Fehler x gehört, als Einheit angenommen hat. Wenn hiernach, wie oben, σ die Anzahl der vorhandenen Fehler bezeichnet, so wird der mittlere Werth des Ausdrucks

$$\frac{x^2 + \alpha' x'^2 + \alpha'' x''^2 + \text{etc.}}{\sigma}$$

$= m^2$, und der mittlere zu befürchtende Fehler, wenn wir einen zufällig bestimmten Werth dieses Ausdrucks als wahren Werth von m^2 annehmen, ergiebt sich

$$= \frac{\sqrt{n^4 + \alpha'^2 n'^4 + \alpha''^2 n''^4 + \text{etc.} - \sigma m^4}}{\sigma},$$

und folglich, wenn wir nur die n, n', n'' etc. den m, m', m'' etc. proportional annehmen dürfen,

$$= \sqrt{\frac{n^4 - m^4}{\sigma}},$$

welche Formel mit der oben für den Fall von Beobachtungen derselben Art gefundenen übereinstimmt.

17.

Wenn der Werth einer Grösse, die von einer anderen unbekannten Grösse abhängt, durch eine nicht völlig genaue Beobachtung bestimmt ist, so wird der hieraus berechnete Werth der Unbekannten auch einem Fehler unterworfen sein; es bleibt aber bei dieser Bestimmungsweise nichts der Willkür überlassen. Wenn aber *mehrere* von derselben Unbekannten abhängige Grössen durch nicht völlig genaue Beobachtungen bestimmt sind, so kann man den

*) Wir können uns nämlich die Kenntniss der Grössen μ', μ'' etc. nur in dem einen Falle erlangt denken, wo der Natur der Sache nach Fehler x, x', x'' etc., welche zu 1, μ', μ'' etc. proportional sind, als gleich wahrscheinlich anzunehmen sind, oder vielmehr, wo

$$\varphi(x) = \mu'\varphi'(\mu'x) = \mu''\varphi''(\mu''x) \text{ etc.}$$

Werth der Unbekannten entweder aus irgend einer dieser Beobachtungen ableiten, oder auch aus irgend einer Combination mehrerer Beobachtungen, was auf unendlich verschiedene Weisen geschehen kann. Wenn nun auch der auf eine solche Weise erhaltene Werth der Unbekannten immer einem Fehler unterworfen bleibt, so wird doch bei der einen Combination ein grösserer, bei einer anderen ein kleinerer Fehler zu befürchten sein. Aehnlich wird es sich verhalten, wenn mehrere Grössen, die von mehreren Unbekannten zugleich abhängen, beobachtet sind: jenachdem die Anzahl der Beobachtungen entweder der Anzahl der Unbekannten gleich, oder kleiner oder grösser als diese ist, wird die Aufgabe entweder bestimmt oder unbestimmt oder überbestimmt sein (wenigstens im allgemeinen), und im dritten Fall wird man zur Bestimmung der Unbekannten die Beobachtungen auf unendlich verschiedene Weisen combiniren können. Aus dieser Mannigfaltigkeit der Combinationen diejenigen auszuwählen, welche der Sache am besten dienen, d. h. welche die mit den kleinsten Fehlern behafteten Werthe der Unbekannten liefern, ist unstreitig bei der Anwendung der Mathematik auf die Naturwissenschaften eine der wichtigsten Aufgaben.

In der „Theorie der Bewegung der Himmelskörper“ haben wir gezeigt, wie die *wahrscheinlichsten* Werthe der Unbekannten abzuleiten sind, wenn das Gesetz für die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler bekannt ist; und da dieses Gesetz seiner Natur nach in beinahe allen Fällen hypothetisch bleibt, so haben wir jene Theorie auf das plausibelste Gesetz angewendet, wobei die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers x der Exponentialgrösse $e^{-h^2x^2}$ proportional genommen wird; und hieraus ist das Verfahren entstanden, welches von uns schon lange und zwar besonders bei astronomischen Rechnungen gebraucht wurde, und jetzt unter dem Namen der Methode der kleinsten Quadrate von den meisten Rechnern angewandt wird.

Später zeigte *Laplace*, indem er die Sache anders angriff, dass gerade dieses Princip, wie auch das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Fehler beschaffen sei, allen anderen immer noch vorzuziehen sei, wenn nur die Anzahl der Beobachtungen eine sehr grosse ist. Ist jedoch die Anzahl der Beobachtungen eine mässige, so bleibt die Frage unentschieden, so dass bei Verwerfung unseres hypothetischen Gesetzes die Methode der kleinsten Quadrate nur deshalb vor anderen empfohlen zu werden verdiente, weil sie zur Vereinfachung der Rechnungen am besten geeignet ist.

Wir hoffen deshalb, den Mathematikern einen Dienst zu erweisen, indem wir bei dieser neuen Behandlung des Gegenstandes zeigten, dass die Methode der kleinsten Quadrate die beste von allen Combinationen liefere, und zwar nicht angenähert, sondern unbedingt, welches auch das Wahrscheinlichkeitsgesetz für die Fehler, und welches auch die Anzahl der Beobachtungen sei, wenn man nur die Definition des mittleren Fehlers nicht im Sinne von *Laplace*, sondern so, wie es von uns in den Art. 5. und 6. geschehen ist, feststellt.

Uebrigens muss hier ausdrücklich hervorgehoben werden, dass es sich in allen folgenden Untersuchungen nur um die unregelmässigen und vom constanten Theil freien Fehler handelt, da es im Grunde zu einer vollkommenen Beobachtungskunst gehört, alle Ursachen constanter Fehler möglichst fernzuhalten. Was für Vortheile aber ein Rechner, welcher solche Beobachtungen zu discutiren unternimmt, von denen man mit Recht argwöhnt, dass sie von constanten Fehlern nicht frei seien, aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung selbst erlangen kann, darüber behalten wir uns vor, eine besondere Untersuchung bei einer anderen Gelegenheit zu veröffentlichen.

18.

Aufgabe. Es bezeichne U eine gegebene Funktion der unbekannten Grössen V, V′, V″ etc.; man sucht den mittleren bei der Bestimmung des Werthes von U zu befürchtenden Fehler M, wenn für V, V′, V″ etc. nicht ihre wahren Werthe, sondern diejenigen genommen werden, welche aus von einander unabhängigen und bezw. mit den mittleren Fehlern m, m', m'' etc. behafteten Beobachtungen hervorgehen.

Lösung. Es seien e, e', e'' etc. die Fehler der beobachteten Werthe von V, V′, V″ etc.; alsdann kann der aus ihnen folgende Fehler des Werthes von U durch die lineare Funktion

$$\lambda e + \lambda' e' + \lambda'' e'' + \text{etc.} = \mathrm{E}$$

ausgedrückt werden, wo λ, λ', λ'' etc. die Werthe der Differentialquotienten $\frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{V}}, \frac{d\mathrm{U}'}{d\mathrm{V}'}, \frac{d\mathrm{U}''}{d\mathrm{V}''}$ etc. für die wahren Werthe der V, V′, V″ etc. sind, wenn nur die Beobachtungen hinlänglich genau sind, um die Quadrate und Produkte der Fehler vernachlässigen zu dürfen. Hieraus folgt erstens, da ja die Beobachtungsfehler als von constanten Theilen frei angenommen werden, dass der mittlere Werth von E gleich 0 sein müsse. Ferner wird der mittlere zu befürchtende Fehler des Werthes von U gleich der Quadratwurzel aus dem mittleren Werthe von E^2 sein, oder M^2 wird der mittlere Werth der Summe

$$\lambda^2 e^2 + \lambda'^2 e'^2 + \lambda''^2 e''^2 + \text{etc.} + 2\lambda\lambda' ee' + 2\lambda\lambda'' ee'' + 2\lambda'\lambda'' e'e'' + \text{etc.}$$

sein. Der mittlere Werth von $\lambda^2 e^2$ ist aber $\lambda^2 m^2$, der mittlere Werth von $\lambda'^2 e'^2$ ist $= \lambda'^2 m'^2$ etc., endlich sind die mittleren Werthe der Produkte $2\lambda\lambda' ee'$ etc. sämmtlich $= 0$. Hieraus schliessen wir also:

$$M = \sqrt{\lambda^2 m^2 + \lambda'^2 m'^2 + \lambda''^2 m''^2 + \text{etc.}}$$

Dieser Lösung wollen wir einige Anmerkungen beifügen.

I. Insoweit man die Beobachtungsfehler als Grössen erster Ordnung ansieht und Grössen höherer Ordnung vernachlässigt, darf man in unserer Formel für λ, λ', λ'' etc. auch diejenigen Werthe der Quotienten $\frac{dU}{dV}$ etc. nehmen, welche aus den beobachteten Werthen der Grössen V, V′, V″ etc. hervorgehen. Wenn U eine lineare Funktion ist, so ist hierbei offenbar kein Unterschied vorhanden.

II. Will man an Stelle der mittleren Fehler der Beobachtungen lieber deren Gewichte einführen, so seien diese, auf eine willkürliche Einheit bezogen, bezw. p, p', p'' etc., und P sei das Gewicht der Bestimmung des sich aus den beobachteten Werthen der Grössen V, V′, V″ etc. ergebenden Werthes von U. Wir erhalten dann

$$P = \frac{1}{\frac{\lambda^2}{p} + \frac{\lambda'^2}{p'} + \frac{\lambda''^2}{p''} + \text{etc.}}.$$

III. Ist T eine andere gegebene Funktion der Grössen V, V′, V″ etc., und ist für deren wahre Werthe

$$\frac{dT}{dV} = \varkappa, \quad \frac{dT}{dV'} = \varkappa', \quad \frac{dT}{dV''} = \varkappa'' \text{ etc.},$$

so wird der Fehler in der aus den beobachteten Werthen von V, V′, V″ etc. erhaltenen Bestimmung des Werthes von T

$$= \varkappa e + \varkappa' e' + \varkappa'' e'' + \text{etc.} = E',$$

und der mittlere bei jener Bestimmung zu befürchtende Fehler

$$= \sqrt{\varkappa^2 m^2 + \varkappa'^2 m'^2 + \varkappa''^2 m''^2 + \text{etc.}}$$

sein. Die Fehler E, E′ werden aber offenbar nicht mehr von einander unabhängig sein, und der mittlere Werth des Produktes EE′ wird, im Gegensatz zum mittleren Werthe des Produktes ee', nicht $= 0$, sondern $= \varkappa\lambda m^2 + \varkappa'\lambda' m'^2 + \varkappa''\lambda'' m''^2 +$ etc. sein.

IV. Man kann unsere Aufgabe auch auf den Fall ausdehnen, wo die Werthe der Grössen V, V′, V″ etc. nicht unmittelbar aus den Beobachtungen gefunden, sondern irgendwie aus Combinationen der Beobachtungen abgeleitet werden, wenn nur die Bestimmungen der einzelnen von einander unabhängig sind, d. h. auf verschiedenen Beobachtungen beruhen: sobald aber diese Bedingung nicht erfüllt ist, würde die Formel für M falsch werden. Wäre z. B. eine oder die andere zur Bestimmung des Werthes von V verwendete Beobachtung auch zur Bestimmung des Werthes von V′ benutzt worden, so würden die Fehler e und e' nicht mehr von einander unabhängig, und der mittlere Werth des Produkts ee' deshalb auch nicht mehr $= 0$ sein. Wenn aber in einem solchen Fall der Zusammenhang der Grössen V und V′ mit den einfachen Beobachtungen, aus denen sie abgeleitet sind, genau bekannt ist, so wird man den mittleren Werth des Produktes ee' nach der Anmerkung III. bestimmen, und so die Formel für M vervollständigen können.

19.

Es seien V, V′, V″ etc. Funktionen der Unbekannten x, y, z etc.; die Anzahl jener sei $= \pi$, die Anzahl der Unbekannten $= \varrho$; wir nehmen an, durch Beobachtungen seien unmittelbar oder mittelbar die Werthe der Funktionen $V = L$, $V' = L'$, $V'' = L''$ etc. gefunden, jedoch so, dass diese Bestimmungen unabhängig von einander sind. Ist ϱ grösser als π, so ist die Aufsuchung der Unbekannten offenbar eine unbestimmte Aufgabe; ist ϱ gleich π, so können die einzelnen x, y, z etc. als Funktionen von V, V′, V″ etc. entweder dargestellt oder in dieser Form gedacht werden, so dass aus den beobachteten Werthen von diesen die Werthe von jenen gefunden werden können, worauf man mit Hülfe des vorigen Art. die diesen einzelnen Bestimmungen zukommende relative Genauigkeit berechnen kann; ist endlich ϱ kleiner als π, so lassen sich die einzelnen x, y, z etc. auf unendlich verschiedene Weisen als Funktionen von V, V′, V″ etc. darstellen, und man kann deshalb für jene auf unendlich verschiedene Weisen Werthe ableiten. Diese Bestimmungen müssten nun völlig identisch sein, wenn den Beobachtungen absolute Genauigkeit zukäme; da dies indess nicht der Fall ist, so werden andere Weisen andere Werthe ergeben, und ebenso werden die aus verschiedenen Combinationen erhaltenen Bestimmungen mit verschiedener Genauigkeit begabt sein.

Wenn übrigens im zweiten oder dritten Fall die Funktionen V, V′, V″ etc. so beschaffen wären, dass $\pi - \varrho + 1$ oder mehrere unter ihnen als Funktionen der übrigen betrachtet werden könnten, so würde die Aufgabe in Bezug auf die letzteren Funktionen immer noch überbestimmt sein, in Bezug auf die Unbekannten x, y, z etc. aber unbestimmt; und man könnte die Werthe der letzteren selbst dann nicht einmal bestimmen, wenn die Werthe der Funktionen V, V′, V″ etc. völlig genau gegeben wären; diesen Fall werden wir aber von unseren Untersuchungen ausschliessen.

Sobald V, V′, V″ etc. nicht von vorn herein *lineare* Funktionen ihrer Variabeln sind, so kann man ihnen diese Form geben, indem man an Stelle der ursprünglichen Unbekannten deren Unterschiede gegen angenäherte Werthe, welche man als anderweit bekannt voraussetzen darf, einsetzt. Die mittleren in den Bestimmungen V = L, V′ = L′, V″ = L″ etc. zu befürchtenden Fehler bezeichnen wir bezw. mit m, m', m'' etc., und die Gewichte der Bestimmungen mit p, p', p'' etc., so dass $pm^2 = p'm'^2 = p''m''^2 =$ etc. ist. Wir setzen das Verhältniss der mittleren Fehler zu einander als bekannt voraus, so dass die Gewichte, von denen man eines beliebig annehmen kann, ebenfalls bekannt sind. Endlich setzen wir

$$(V - L)\sqrt{p} = v, \quad (V' - L')\sqrt{p'} = v', \quad (V'' - L'')\sqrt{p''} = v'' \text{ etc.}$$

Dann wird sich die Sache offenbar ebenso verhalten, als wenn unmittelbare Beobachtungen von gleicher Genauigkeit, deren mittlerer Fehler also $= m\sqrt{p} = m'\sqrt{p'} = m''\sqrt{p''}$ etc. ist, oder denen das Gewicht = 1 beigelegt wird, auf

$$v = 0, \quad v' = 0, \quad v'' = 0 \text{ etc.}$$

geführt hätten.

20.

Aufgabe. Wir bezeichnen mit v, v', v'' etc. die folgenden linearen Funktionen der Variabeln x, y, z etc.:

$$\left.\begin{aligned} v &= ax + by + cz + \text{etc.} + l \\ v' &= a'x + b'y + c'z + \text{etc.} + l' \\ v'' &= a''x + b''y + c''z + \text{etc.} + l'' \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Es soll aus allen Systemen von Coefficienten $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ etc., welche allgemein

$$\varkappa v + \varkappa' v' + \varkappa'' v'' + \text{etc.} = x - k$$

geben, wo k eine bestimmte, d. h. von x, y, z etc. unabhängige Grösse ist, das System ermittelt werden, für welches $\varkappa^2 + \varkappa'^2 + \varkappa''^2 +$ etc. den kleinsten Werth erhält.

Lösung. Wir setzen

$$\left.\begin{aligned} av + a'v' + a''v'' + \text{etc.} &= \xi \\ bv + b'v' + b''v'' + \text{etc.} &= \eta \\ cv + c'v' + c''v'' + \text{etc.} &= \zeta \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

etc. Dann sind auch ξ, η, ζ etc. lineare Funktionen von x, y, z etc., nämlich

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\Sigma a^2 + y\Sigma ab + z\Sigma ac + \text{etc.} + \Sigma al \\ \eta &= x\Sigma ab + y\Sigma b^2 + z\Sigma bc + \text{etc.} + \Sigma bl \\ \zeta &= x\Sigma ac + y\Sigma bc + z\Sigma c^2 + \text{etc.} + \Sigma cl \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(wo Σa^2 die Summe $a^2 + a'^2 + a''^2 +$ etc. bezeichnet, und analog bei den übrigen); die Anzahl der ξ, η, ζ etc. ist hierbei der Anzahl der Variabeln x, y, z etc. gleich, nämlich $= \varrho$. Man kann deshalb durch Elimination eine Gleichung folgender Art ableiten*):

$$x = \text{A} + [\alpha\alpha]\,\xi + [\alpha\beta]\,\eta + [\alpha\gamma]\,\zeta + \text{etc.},$$

aus welcher durch Substitution der Werthe von ξ, η, ζ etc. nach (3) eine identische Gleichung hervorgehen muss. Wenn man folglich

$$\left.\begin{aligned} a\,[\alpha\alpha] + b\,[\alpha\beta] + c\,[\alpha\gamma] + \text{etc.} &= \alpha \\ a'\,[\alpha\alpha] + b'\,[\alpha\beta] + c'\,[\alpha\gamma] + \text{etc.} &= \alpha' \\ a''\,[\alpha\alpha] + b''\,[\alpha\beta] + c''\,[\alpha\gamma] + \text{etc.} &= \alpha'' \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

setzt, so wird nothwendig allgemein

$$\alpha v + \alpha' v' + \alpha'' v'' + \text{etc.} = x - \text{A}. \qquad (5)$$

Diese Gleichung zeigt, dass unter die Werthsysteme der Coefficienten $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ etc. sicher auch dieses: $\varkappa = \alpha$, $\varkappa' = \alpha'$, $\varkappa'' = \alpha''$ etc. zu rechnen ist, ebenso dass für ein beliebiges System allgemein

$$(\varkappa - \alpha)\,v + (\varkappa' - \alpha')\,v' + (\varkappa'' - \alpha'')\,v'' + \text{etc.} = \text{A} - k$$

werden muss; eine Gleichung, welche die folgenden einschliesst:

*) Der Grund, weshalb wir für die aus einer solchen Elimination hervorgehenden Coefficienten gerade diese Bezeichnung ausgewählt haben, wird später einleuchten.

Aus 2) folgt: $x - A = (a[\alpha\alpha] + b[\alpha\beta] + c[\alpha\gamma])\,v + (a'[\alpha\alpha] + b'[\alpha\beta] + c'[\alpha\gamma])\,v' + \ldots$
$= \alpha v + \alpha' v' \ldots$

$$(\varkappa-\alpha)\,a+(\varkappa'-\alpha')\,a'+(\varkappa''-\alpha'')\,a''+\text{etc.}=0$$
$$(\varkappa-\alpha)\,b+(\varkappa'-\alpha')\,b'+(\varkappa''-\alpha'')\,b''+\text{etc.}=0$$
$$(\varkappa-\alpha)\,c+(\varkappa'-\alpha')\,c'+(\varkappa''-\alpha'')\,c''+\text{etc.}=0\ \text{etc.}$$

Multipliciren wir diese Gleichungen bezw. mit $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$ etc. und addiren, so erhalten wir wegen (4):

$$(\varkappa-\alpha)\,\alpha+(\varkappa'-\alpha')\,\alpha'+(\varkappa''-\alpha'')\,\alpha''+\text{etc.}=0$$

oder, was dasselbe ist,

$$\varkappa^2+\varkappa'^2+\varkappa''^2+\text{etc.}$$
$$=\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2+\text{etc.}+(\varkappa-\alpha)^2+(\varkappa'-\alpha')^2+(\varkappa''-\alpha'')^2+\text{etc.},$$

woraus folgt, dass die Summe $\varkappa^2+\varkappa'^2+\varkappa''^2+$ etc. den kleinsten Werth erhält, wenn man $\varkappa=\alpha$, $\varkappa'=\alpha'$, $\varkappa''=\alpha''$ etc. setzt. Was zu finden war.

Dieser kleinste Werth selbst wird übrigens auf folgende Weise ermittelt. Die Gleichung (5) zeigt, dass

$$\alpha a+\alpha' a'+\alpha'' a''+\text{etc.}=1$$
$$\alpha b+\alpha' b'+\alpha'' b''+\text{etc.}=0$$
$$\alpha c+\alpha' c'+\alpha'' c''+\text{etc.}=0\ \text{etc.}$$

ist. Multiplicirt man diese Gleichungen bezw. mit $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$ etc. und addirt, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichungen (4) sofort

$$\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2+\text{etc.}=[\alpha\alpha].$$

21.

Wenn die Beobachtungen die (der Wahrheit sehr nahe kommenden) Gleichungen $v=0$, $v'=0$, $v''=0$ etc. geliefert haben, so muss man, um aus ihnen den Werth der Unbekannten x zu finden, eine solche Combination

$$\varkappa v+\varkappa' v'+\varkappa'' v''+\text{etc.}=0$$

dieser Gleichungen aufsuchen, dass der Coefficient von x gleich 1 wird, und die übrigen Unbekannten y, z etc. eliminirt werden; dieser Bestimmung wird nach Art. 18. das Gewicht

$$=\frac{1}{\varkappa^2+\varkappa'^2+\varkappa''^2+\text{etc.}}$$

zu geben sein. Aus dem vorigen Art. folgt daher, die zweckmässigste Bestimmung werde die sein, wenn man $\varkappa=\alpha$, $\varkappa'=\alpha'$, $\varkappa''=\alpha''$ etc. setzt. Alsdann erhält x den Werth A; offenbar kann man denselben Werth (ohne Kenntniss der Multiplicatoren α, α', α'' etc.) auch direkt durch Elimination aus den Gleichungen $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. ableiten. Das dieser Bestimmung zu ertheilende Gewicht wird $= \frac{1}{[\alpha\alpha]}$, oder der mittlere bei ihr zu befürchtende Fehler wird

$$= m\sqrt{p\,[\alpha\alpha]} = m'\sqrt{p'\,[\alpha\alpha]} = m''\sqrt{p''\,[\alpha\alpha]} \text{ etc.}$$

sein.

Auf analoge Weise wird ferner die zweckmässigste Bestimmung der übrigen Unbekannten y, z etc. für sie dieselben Werthe ergeben, welche durch Elimination aus den nämlichen Gleichungen $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. hervorgehen.

Bezeichnen wir die allgemeine Summe $v^2 + v'^2 + v''^2 +$ etc. oder, was dasselbe ist,

$$p\,(V - L)^2 + p'\,(V' - L')^2 + p''\,(V'' - L'')^2 + \text{etc.}$$

mit Ω, so sind offenbar 2ξ, 2η, 2ζ etc. die partiellen Differentialquotienten der Funktion Ω, nämlich

$$2\xi = \frac{d\Omega}{dx},\quad 2\eta = \frac{d\Omega}{dy},\quad 2\zeta = \frac{d\Omega}{dz} \text{ etc.}$$

Demnach werden die Werthe der Unbekannten, welche aus der zweckmässigsten Combination der Beobachtungen hervorgehen, und welche man passend die *plausibelsten Werthe* nennen kann, mit denen identisch sein, die Ω zu einem Minimum machen. Nun drückt $V - L$ allgemein die Differenz des berechneten und des beobachteten Werthes aus. Die plausibelsten Werthe der Unbekannten werden deshalb dieselben sein, welche die Summe der mit den Gewichten der Beobachtungen multiplicirten Quadrate der Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Werthen der Grössen V, V', V'' etc. zu einem Minimum machen, ein Princip, welches wir in der „Theoria Motus Corporum Coelestium" von einem ganz anderen Gesichtspunkte aus festgestellt hatten. Und wenn ausserdem die relative Genauigkeit der einzelnen Bestimmungen angegeben werden soll, so muss man die x, y, z etc. durch unbestimmte Elimination aus den Gleichungen (3) in folgender Form ableiten:

$$\left.\begin{aligned} x &= A + [\alpha\alpha]\,\xi + [\alpha\beta]\,\eta + [\alpha\gamma]\,\zeta + \text{etc.} \\ y &= B + [\beta\alpha]\,\xi + [\beta\beta]\,\eta + [\beta\gamma]\,\zeta + \text{etc.} \\ z &= C + [\gamma\alpha]\,\xi + [\gamma\beta]\,\eta + [\gamma\gamma]\,\zeta + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

etc.,

wonach die plausibelsten Werthe der Unbekannten x, y, z etc.

bezw. A, B, C etc., und die diesen Bestimmungen zukommenden Gewichte $\frac{1}{[\alpha\alpha]}$, $\frac{1}{[\beta\beta]}$, $\frac{1}{[\gamma\gamma]}$ etc., oder die mittleren bei denselben zu befürchtenden Fehler

$$\text{für } x \ldots\ldots m\sqrt{p\,[\alpha\alpha]} = m'\sqrt{p'\,[\alpha\alpha]} = m''\sqrt{p''\,[\alpha\alpha]} \text{ etc.}$$
$$\text{für } y \ldots\ldots m\sqrt{p\,[\beta\beta]} = m'\sqrt{p'\,[\beta\beta]} = m''\sqrt{p''\,[\beta\beta]} \text{ etc.}$$
$$\text{für } z \ldots\ldots m\sqrt{p\,[\gamma\gamma]} = m'\sqrt{p'\,[\gamma\gamma]} = m''\sqrt{p''\,[\gamma\gamma]} \text{ etc.}$$
etc.

sein werden, ein Resultat, welches mit dem in der „Theoria Motus Corporum Coelestium" abgeleiteten übereinstimmt.

22.

Wir wollen den allereinfachsten, zugleich aber auch häufigsten Fall, dass nur eine einzige Unbekannte vorhanden ist, und $V = x$, $V' = x$, $V'' = x$ etc. wird, in Kürze besonders behandeln. Es wird nämlich $a = \sqrt{p}$, $a' = \sqrt{p'}$, $a'' = \sqrt{p''}$ etc., $l = -L\sqrt{p}$, $l' = -L'\sqrt{p'}$, $l'' = -L''\sqrt{p''}$ etc., und folglich

$$\xi = (p + p' + p'' + \text{ etc.})\,x - (pL + p'L' + p''L'' + \text{etc.}) .$$

Hieraus weiter

$$[\alpha\alpha] = \frac{1}{p + p' + p'' + \text{etc.}}$$

$$A = \frac{pL + p'L' + p''L'' + \text{etc.}}{p + p' + p'' + \text{etc.}} .$$

Wenn man demnach aus mehreren Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit, deren Gewichte bezw. p, p', p'' etc. sind, den Werth einer und derselben Grösse ermittelt hat, und zwar aus der ersten $= L$, aus der zweiten $= L'$, aus der dritten $= L''$ etc., so wird der plausibelste Werth derselben

$$= \frac{pL + p'L' + p''L'' + \text{etc.}}{p + p' + p'' + \text{etc.}} ,$$

und das Gewicht dieser Bestimmung $= p + p' + p'' +$ etc. sein. Sind alle Beobachtungen von gleicher Genauigkeit, so wird der plausibelste Werth

$$= \frac{L + L' + L'' + \text{etc.}}{\pi}$$

sein, d. h. gleich dem arithmetischen Mittel der beobachteten Werthe, und das Gewicht dieser Bestimmung $= \pi$, wenn man das Gewicht der Beobachtungen als Einheit annimmt.

Zweiter Theil.

(Der Königlichen Societät der Wissenschaften überreicht 1823, Februar 2.)

23.

Es erübrigen noch mehrere Untersuchungen, welche die vorhergehende Theorie sowohl erläutern als auch besonders erweitern sollen.

Vor allen muss man nachforschen, ob das Geschäft der Elimination, mittelst deren die Unbekannten x, y, z etc. durch die ξ, η, ζ etc. auszudrücken sind, immer ausführbar ist. Da die Anzahl jener der Anzahl dieser gleich ist, so wird, wie man aus der Theorie der Elimination bei linearen Gleichungen weiss, jene Elimination sicher möglich sein, wenn ξ, η, ζ etc. von einander unabhängig sind, im anderen Falle unmöglich. Nehmen wir für den Augenblick an, ξ, η, ζ etc. seien nicht von einander unabhängig, sondern es bestehe zwischen ihnen die identische Gleichung

$$0 = \mathrm{F}\xi + \mathrm{G}\eta + \mathrm{H}\zeta + \text{etc.} + \mathrm{K}.$$

Wir hätten dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}\Sigma a^2 + \mathrm{G}\Sigma ab + \mathrm{H}\Sigma ac + \text{etc.} &= 0\\
\mathrm{F}\Sigma ab + \mathrm{G}\Sigma b^2 + \mathrm{H}\Sigma bc + \text{etc.} &= 0\\
\mathrm{F}\Sigma ac + \mathrm{G}\Sigma bc + \mathrm{H}\Sigma c^2 + \text{etc.} &= 0
\end{aligned}$$

etc., und ferner

$$\mathrm{F}\Sigma al + \mathrm{G}\Sigma bl + \mathrm{H}\Sigma cl + \text{etc.} = -\mathrm{K}.$$

Setzt man alsdann

$$\left.\begin{aligned}
a\,\mathrm{F} + b\,\mathrm{G} + c\,\mathrm{H} + \text{etc.} &= \Theta\\
a'\mathrm{F} + b'\mathrm{G} + c'\mathrm{H} + \text{etc.} &= \Theta'\\
a''\mathrm{F} + b''\mathrm{G} + c''\mathrm{H} + \text{etc.} &= \Theta''
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

etc., so folgt

$$a\Theta + a'\Theta' + a''\Theta'' + \text{etc.} = 0$$
$$b\Theta + b'\Theta' + b''\Theta'' + \text{etc.} = 0$$
$$c\Theta + c'\Theta' + c''\Theta'' + \text{etc.} = 0$$

etc., und ausserdem

$$l\Theta + l'\Theta' + l''\Theta'' + \text{etc.} = -\mathrm{K}.$$

Multiplicirt man demnach die Gleichungen (1) bezw. mit Θ, Θ', Θ'' etc. und addirt, so erhält man

$$0 = \Theta^2 + \Theta'^2 + \Theta''^2 + \text{etc.},$$

eine Gleichung, welche offenbar nicht bestehen kann, wenn nicht gleichzeitig $\Theta = 0$, $\Theta' = 0$, $\Theta'' = 0$ etc. wäre. Hieraus schliessen wir erstens, dass nothwendig $\mathrm{K} = 0$ sein muss. Sodann zeigen die Gleichungen (1), dass die Funktionen v, v', v'' etc. so beschaffen sind, dass ihre Werthe sich nicht ändern, wenn die Werthe der Grössen x, y, z etc. um Grössen zu- oder abnehmen, welche bezw. den F, G, H etc. proportional sind. Dasselbe wird offenbar von den Funktionen V, V′, V″ etc. gelten. Die Voraussetzung kann also nicht statt haben, ausser in dem Falle, wenn es sogar schon unmöglich gewesen wäre, aus den genauen Werthen der Grössen V, V′, V″ etc. die Werthe der Unbekannten x, y, z etc. zu bestimmen, d. h. wenn die Aufgabe ihrer Natur nach unbestimmt gewesen wäre, einen Fall, den wir von unserer Untersuchung ausgeschlossen haben.

24.

Wir bezeichnen mit β, β', β'' etc. Multiplicatoren, welche der Unbekannten y gegenüber dieselbe Rolle spielen, wie die α, α' α'' etc. gegenüber dem x; es sei also

$$a\,[\beta\alpha] + b\,[\beta\beta] + c\,[\beta\gamma] + \text{etc.} = \beta$$
$$a'[\beta\alpha] + b'[\beta\beta] + c'[\beta\gamma] + \text{etc.} = \beta'$$
$$a''[\beta\alpha] + b''[\beta\beta] + c''[\beta\gamma] + \text{etc.} = \beta''$$

etc., so dass allgemein wird

$$\beta v + \beta' v' + \beta'' v'' + \text{etc.} = y - \mathrm{B}\,.$$

Ebenso seien γ, γ', γ'' etc. analoge Multiplicatoren in Bezug auf die Unbekannte z, demnach

$$a\,[\gamma\alpha] + b\,[\gamma\beta] + c\,[\gamma\gamma] + \text{etc.} = \gamma$$
$$a'[\gamma\alpha] + b'[\gamma\beta] + c'[\gamma\gamma] + \text{etc.} = \gamma'$$
$$a''[\gamma\alpha] + b''[\gamma\beta] + c''[\gamma\gamma] + \text{etc.} = \gamma''$$

etc., so dass allgemein wird

$$\gamma v + \gamma' v' + \gamma'' v'' + \text{etc.} = z - \mathrm{C}$$

und so weiter. Ebenso wie wir im Art. 20. bereits fanden, dass $\Sigma \alpha a = 1$, $\Sigma \alpha b = 0$, $\Sigma \alpha c = 0$ etc., und ausserdem $\Sigma \alpha l = -\mathrm{A}$, so erhalten wir hiernach auch

$$\begin{array}{llll} \Sigma \beta a = 0, & \Sigma \beta b = 1, & \Sigma \beta c = 0 \text{ etc. und} & \Sigma \beta l = -\mathrm{B} \\ \Sigma \gamma a = 0, & \Sigma \gamma b = 0, & \Sigma \gamma c = 1 \text{ etc. und} & \Sigma \gamma l = -\mathrm{C} \end{array}$$

u. s. w. Und gerade so, wie man im Art. 20. erhielt $\Sigma \alpha^2 = [\alpha\alpha]$, wird auch

$$\Sigma \beta^2 = [\beta\beta], \quad \Sigma \gamma^2 = [\gamma\gamma] \text{ etc.}$$

Wenn man ferner die Werthe der α, α', α'' etc. (Art. 20. (4)) bezw. mit β, β', β'' etc. multiplicirt und addirt, so erhält man

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \text{etc.} = [\alpha\beta] \text{ oder } \Sigma \alpha\beta = [\alpha\beta].$$

Multiplicirt man aber die Werthe von β, β', β'' etc. bezw. mit α, α', α'' etc. und addirt, so folgt ebenso

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \text{etc.} = [\beta\alpha], \text{ also } [\alpha\beta] = [\beta\alpha].$$

Es wird weiter auf analoge Weise gefunden

$$[\alpha\gamma] = [\gamma\alpha] = \Sigma \alpha\gamma, \quad [\beta\gamma] = [\gamma\beta] = \Sigma \beta\gamma \text{ etc.}$$

25.

Ferner bezeichnen wir mit λ, λ', λ'' etc. diejenigen Werthe der Funktionen v, v', v'' etc., welche erhalten werden, wenn wir für x, y, z etc. ihre plausibelsten Werthe A, B, C etc. einsetzen, also

$$\begin{aligned} a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C} + \text{etc.} + l &= \lambda \\ a'\mathrm{A} + b'\mathrm{B} + c'\mathrm{C} + \text{etc.} + l' &= \lambda' \\ a''\mathrm{A} + b''\mathrm{B} + c''\mathrm{C} + \text{etc.} + l'' &= \lambda'' \end{aligned}$$

etc.; wir setzen ausserdem

$$\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \text{etc.} = \mathrm{M},$$

so dass M der Werth der Funktion Ω ist, welcher den plausibelsten Werthen der Variabeln entspricht, mithin auch der kleinste Werth dieser Funktion, wie wir im Art. 20. gezeigt haben. Hiernach wird $a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'' + \text{etc.}$ der Werth von ξ, welcher den Werthen $x = \mathrm{A}$, $y = \mathrm{B}$, $z = \mathrm{C}$ etc. entspricht, und zugleich $= 0$ sein, d. h. wir erhalten

$$\Sigma a\lambda = 0,$$

und es wird ebenso

$\Sigma b\lambda = 0$, $\Sigma c\lambda = 0$ etc.; ausserdem $\Sigma\alpha\lambda = 0$, $\Sigma\beta\lambda = 0$, $\Sigma\gamma\lambda = 0$ etc. Multiplicirt man endlich die Ausdrücke von λ, λ', λ'' etc. bezw. mit λ, λ', λ'' etc. und addirt, so erhält man

$$l\lambda + l'\lambda' + l''\lambda'' + \text{etc.} = \lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \text{etc., oder}$$

$$\Sigma l\lambda = \mathrm{M}.$$

26.

Ersetzen wir in der Gleichung $v = ax + by + cz + \text{etc.} + l$ die x, y, z etc. durch die Ausdrücke (7) des Art. 21., so folgt mit Hülfe von aus dem Vorhergehenden geläufigen Reduktionen

$$v = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \text{etc.} + \lambda$$

und ebenso wird allgemein

$$v' = \alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta + \text{etc.} + \lambda'$$
$$v'' = \alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta + \text{etc.} + \lambda''$$

etc. Multipliciren wir diese oder die Gleichungen (1) des Art. 20. bezw. mit λ, λ', λ'' etc. und addiren, so sehen wir, dass allgemein ist

$$\lambda v + \lambda' v' + \lambda'' v'' + \text{etc.} = \mathrm{M}.$$

27.

Die Funktion Ω kann im allgemeinen in mehreren Formen dargestellt werden, welche zu entwickeln die Mühe lohnen wird. Und zwar erhält man zunächst aus den Gleichungen (1) des Art. 20. durch Quadriren und Addiren unmittelbar

$$\Omega = x^2\Sigma a^2 + y^2\Sigma b^2 + z^2\Sigma c^2 + \text{etc.} + 2xy\Sigma ab + 2xz\Sigma ac + 2yz\Sigma bc$$
$$+ \text{etc.} + 2x\Sigma al + 2y\Sigma bl + 2z\Sigma cl + \text{etc.} + \Sigma l^2$$

als *erste* Form.

Multiplicirt man dieselben Gleichungen bezw. mit v, v', v'' etc. und addirt, so erhält man

$$\Omega = \xi x + \eta y + \zeta z + \text{etc.} + lv + l'v' + l''v'' + \text{etc.}$$

und hieraus, indem man für v, v', v'' etc. die im vorhergehenden Art. gegebenen Ausdrücke einsetzt,

$$\Omega = \xi x + \eta y + \zeta z + \text{etc.} - \mathrm{A}\xi - \mathrm{B}\eta - \mathrm{C}\zeta - \text{etc.} + \mathrm{M}$$

oder

$$\Omega = \xi(x - \mathrm{A}) + \eta(y - \mathrm{B}) + \zeta(z - \mathrm{C}) + \text{etc.} + \mathrm{M}$$

als *zweite* Form.

Setzen wir in der zweiten Form für $x - A$, $y - B$, $z - C$ etc. die Ausdrücke (7) des Art. 21., so erhalten wir die *dritte* Form

$$\begin{aligned}\Omega = [\alpha\alpha]\,\xi^2 + [\beta\beta]\,\eta^2 + [\gamma\gamma]\,\zeta^2 + \text{etc.} + 2[\alpha\beta]\,\xi\eta \\ + 2[\alpha\gamma]\,\xi\zeta + 2[\beta\gamma]\,\eta\zeta + \text{etc.} + M.\end{aligned}$$

Diesen kann als *vierte* Form die folgende hinzugefügt werden, welche sich aus der dritten und aus den Formeln des vorhergehenden Art. von selbst ergiebt,

$$\begin{aligned}\Omega &= (v - \lambda)^2 + (v' - \lambda')^2 + (v'' - \lambda'')^2 + \text{etc.} + M, \text{ oder} \\ \Omega &= M + \Sigma(v - \lambda)^2,\end{aligned}$$

welche Form die Bedingung des Minimums unmittelbar vor Augen führt.

28.

Es seien e, e', e'' etc. die Fehler, welche bei den Beobachtungen, die $V = L$, $V' = L'$, $V'' = L''$ etc. ergeben haben, begangen sind; d. h. die wahren Werthe der Funktionen V, V', V'' etc. seien bezw. $L - e$, $L' - e'$, $L'' - e''$ etc., und folglich die wahren Werthe von v, v', v'' etc. bezw. $-e\sqrt{p}$, $-e'\sqrt{p'}$, $-e''\sqrt{p''}$ etc. Hiermit wird der wahre Werth des x

$$= A - \alpha e\sqrt{p} - \alpha' e'\sqrt{p'} - \alpha'' e''\sqrt{p''} \text{ etc.},$$

oder der bei der zweckmässigsten Bestimmung des Werthes von x begangene Fehler, den wir mit $E(x)$ bezeichnen wollen, ist

$$= \alpha e\sqrt{p} + \alpha' e'\sqrt{p'} + \alpha'' e''\sqrt{p''} + \text{etc.}$$

Analog wird der bei der zweckmässigsten Bestimmung des Werthes von y begangene Fehler, den wir mit $E(y)$ bezeichnen werden,

$$= \beta e\sqrt{p} + \beta' e'\sqrt{p'} + \beta'' e''\sqrt{p''} + \text{etc.}$$

Den mittleren Werth des Quadrates $[E(x)]^2$ findet man

$$= m^2 p\,(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \text{etc.}) = m^2 p\,[\alpha\alpha],$$

den mittleren Werth des Quadrates $[E(y)]^2$ ebenso $= m^2 p\,[\beta\beta]$ etc., wie wir schon oben zeigten. Nun kann man auch den mittleren Werth des *Produktes* $E(x)\,E(y)$ angeben; derselbe wird nämlich

$$= m^2 p\,(\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \text{etc.}) = m^2 p\,[\alpha\beta]$$

gefunden. Man kann dieses kurz auch so ausdrücken: Die mittleren Werthe der Quadrate $[E(x)]^2$, $[E(y)]^2$ etc. sind bezw. den Produkten aus $\frac{1}{2}m^2 p$ in die partiellen Differentialquotienten zweiter Ordnung

$$\frac{d^2\Omega}{d\xi^2},\quad \frac{d^2\Omega}{d\eta^2}\ \text{etc.}$$

gleich, und der mittlere Werth eines solchen Produktes, wie $\mathrm{E}(x)\,\mathrm{E}(y)$, ist gleich dem Produkte aus $\frac{1}{2}m^2p$ in den Differentialquotienten $\frac{d^2\Omega}{d\xi\,d\eta}$, wenn man nämlich Ω als Funktion der Variabeln ξ, η, ζ etc. betrachtet.

29.

Es bezeichne t eine gegebene lineare Funktion der Grössen x, y, z etc., es sei also

$$t = fx + gy + hz + \text{etc.} + k.$$

Der aus den plausibelsten Werthen von x, y, z etc. hervorgehende Werth von t wird demnach $= f\mathrm{A} + g\mathrm{B} + h\mathrm{C} + \text{etc.} + k$ sein, den wir mit K bezeichnen wollen. Nimmt man diesen als wahren Werth von t an, so wird ein Fehler begangen

$$= f\mathrm{E}(x) + g\mathrm{E}(y) + h\mathrm{E}(z) + \text{etc.},$$

der mit $\mathrm{E}(t)$ bezeichnet werden möge. Der mittlere Werth dieses Fehlers wird offenbar $= 0$, d. h. der Fehler wird von einem constanten Theil frei sein. Der mittlere Werth des Quadrates $[\mathrm{E}(t)]^2$, d. h. der mittlere Werth der Summe

$$\begin{aligned}
f^2[\mathrm{E}(x)]^2 &+ 2fg\,\mathrm{E}(x)\,\mathrm{E}(y) + 2fh\,\mathrm{E}(x)\,\mathrm{E}(z) + \text{etc.}\\
&+ g^2[\mathrm{E}(y)]^2 + 2gh\,\mathrm{E}(y)\,\mathrm{E}(z) + \text{etc.}\\
&+ h^2[\mathrm{E}(z)]^2 + \text{etc. etc.},
\end{aligned}$$

wird aber nach den Ergebnissen des vorigen Art. gleich dem Produkte aus m^2p in die Summe

$$\begin{aligned}
f^2[\alpha\alpha] &+ 2fg\,[\alpha\beta] + 2fh\,[\alpha\gamma] + \text{etc.}\\
&+ g^2\,[\beta\beta] + 2gh\,[\beta\gamma] + \text{etc.}\\
&+ h^2\,[\gamma\gamma] + \text{etc. etc.}
\end{aligned}$$

oder gleich dem Produkte aus m^2p in den Werth der Funktion $\Omega - \mathrm{M}$ sein, welcher durch die Substitutionen

$$\xi = f,\quad \eta = g,\quad \zeta = h\ \text{etc.}$$

entsteht. Bezeichnen wir also diesen bestimmten Werth der Funktion $\Omega - \mathrm{M}$ mit ω, so wird der mittlere zu befürchtende Fehler, wenn wir an der Bestimmung $t = \mathrm{K}$ festhalten, $= m\sqrt{p\omega}$, oder das Gewicht dieser Bestimmung $= \frac{1}{\omega}$ sein.

Da allgemein

$$\Omega - \mathrm{M} = (x - \mathrm{A})\,\xi + (y - \mathrm{B})\,\eta + (z - \mathrm{C})\,\zeta + \text{etc.}$$

ist, so muss ω auch dem bestimmten Werthe des Ausdrucks

$$(x - \mathrm{A})f + (y - \mathrm{B})\,g + (z - \mathrm{C})\,h + \text{etc.},$$

d. h. dem bestimmten Werth von $t - \mathrm{K}$ gleich sein, welcher sich ergiebt, wenn man den Variabeln x, y, z etc. diejenigen Werthe beilegt, welche den Werthen f, g, h etc. der ξ, η, ζ etc. entsprechen.

Endlich merken wir noch an, dass, wenn t in der Form einer Funktion der ξ, η, ζ etc. allgemein dargestellt wird, der constante Theil derselben nothwendig $= \mathrm{K}$ wird. Wenn also allgemein

$$t = \mathrm{F}\xi + \mathrm{G}\eta + \mathrm{H}\zeta + \text{etc.} + \mathrm{K}$$

ist, so wird $\omega = f\mathrm{F} + g\mathrm{G} + h\mathrm{H} + \text{etc.}$

30.

Die Funktion Ω erlangt, wie wir oben gesehen haben, ihren *absolut kleinsten* Werth M, wenn man $x = \mathrm{A}$, $y = \mathrm{B}$, $z = \mathrm{C}$ etc., oder $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. setzt. Ist aber irgend einer dieser Grössen schon ein *anderer* Werth beigelegt, z. B. $x = \mathrm{A} + \Delta$, so kann Ω durch Aenderungen der Uebrigen einen relativ kleinsten Werth erlangen, welcher offenbar mit Hülfe der Gleichungen

$$x = \mathrm{A} + \Delta, \quad \frac{d\Omega}{dy} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dz} = 0 \text{ etc.}$$

erhalten wird. Es muss deshalb $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. werden, und ferner, da ja

$$x = \mathrm{A} + [\alpha\alpha]\,\xi + [\alpha\beta]\,\eta + [\alpha\gamma]\,\zeta + \text{etc. ist,} \quad \xi = \frac{\Delta}{[\alpha\alpha]}.$$

Zugleich wird man haben:

$$y = \mathrm{B} + \frac{[\alpha\beta]}{[\alpha\alpha]}\Delta, \quad z = \mathrm{C} + \frac{[\alpha\gamma]}{[\alpha\alpha]}\Delta \text{ etc.}$$

Der relativ kleinste Werth des Ω wird aber

$$= [\alpha\alpha]\,\xi^2 + \mathrm{M} = \mathrm{M} + \frac{\Delta^2}{[\alpha\alpha]}.$$

Umgekehrt schliessen wir hieraus, dass, wenn der Werth des Ω eine vorgeschriebene Grenze $\mathrm{M} + \mu^2$ nicht überschreiten soll, alsdann auch der Werth des x nothwendig in den Grenzen $\mathrm{A} - \mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ und $\mathrm{A} + \mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ liegen muss. Es verdient angemerkt zu werden, dass $\mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ dem mittleren zu befürchtenden Fehler des plausibelsten Werthes von x gleich wird, wenn man $\mu = m\sqrt{p}$ setzt, d. h. wenn μ gleich dem mittleren Fehler solcher Beobachtungen ist, welche das Gewicht 1 besitzen.

Allgemeiner wollen wir den kleinsten Werth von Ω aufsuchen, welcher für einen gegebenen Werth von t eintreten kann, wenn t wie im vorigen Art. die lineare Funktion $fx + gy + hz +$ etc. $+ k$ bezeichnet, und ihr plausibelster Werth $=$ K ist; jener vorgeschriebene Werth des t sei $\mathrm{K} + \varkappa$. Aus der Theorie der Maxima und Minima ist bekannt, dass die Lösung der Aufgabe aus den Gleichungen

$$\frac{d\Omega}{dx} = \Theta\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d\Omega}{dy} = \Theta\frac{dt}{dy}$$

$$\frac{d\Omega}{dz} = \Theta\frac{dt}{dz} \text{ etc.}$$

erhalten wird, d. h. aus $\xi = \Theta f$, $\eta = \Theta g$, $\zeta = \Theta h$ etc., wenn man mit Θ einen zunächst unbestimmten Faktor bezeichnet. Wenn wir also, wie in dem vorhergehenden Art., *allgemein*

$$t = \mathrm{F}\xi + \mathrm{G}\eta + \mathrm{H}\zeta + \text{etc.} + \mathrm{K}$$

setzen, so haben wir

$$\mathrm{K} + \varkappa = \Theta(f\mathrm{F} + g\mathrm{G} + h\mathrm{H} + \text{etc.}) + \mathrm{K}, \text{ oder}$$

$$\Theta = \frac{\varkappa}{\omega},$$

wo ω in derselben Bedeutung wie im vorigen Art. zu nehmen ist. Und da $\Omega - \mathrm{M}$ im allgemeinen eine homogene Funktion zweiter Ordnung der Variabeln ξ, η, ζ etc. ist, so wird augenscheinlich ihr Werth für $\xi = \Theta f$, $\eta = \Theta g$, $\zeta = \Theta h$ etc. $= \Theta^2\omega$, und folglich der kleinste Werth, den Ω für $t = \mathrm{K} + \varkappa$ erhalten kann, gleich $\mathrm{M} + \Theta^2\omega = \mathrm{M} + \frac{\varkappa^2}{\omega}$ werden. Umgekehrt, wenn Ω irgend einen vorgeschriebenen Werth $\mathrm{M} + \mu^2$ nicht überschreiten soll, so muss der Werth von t nothwendig in den Grenzen $\mathrm{K} - \mu\sqrt{\omega}$ und $\mathrm{K} + \mu\sqrt{\omega}$ enthalten sein, wo $\mu\sqrt{\omega}$ dem mittleren bei der plausibelsten Bestimmung von t zu befürchtenden Fehler gleich ist, wenn man μ als den mittleren Fehler der Beobachtungen annimmt, deren Gewicht $= 1$ ist.

31.

Wenn die Anzahl der Grössen x, y, z etc. etwas grösser ist, wird die numerische Bestimmung der Werthe A, B, C etc. aus den Gleichungen $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. vermittelst der gewöhnlichen Elimination ziemlich lästig sein. Deshalb haben wir in der *Theorie der Bewegung der Himmelskörper*, Art. 182., auf einen eigenthümlichen Algorithmus hingewiesen, und denselben in der *Untersuchung über die elliptischen Elemente der Pallas* (Comment. recent. Soc. Gotting. Vol. I) des weiteren entwickelt, durch welchen jene Arbeit, soweit es der Gegenstand erlaubt, thunlichst vereinfacht wird.

Die Funktion Ω ist nämlich auf folgende Form

$$\frac{u^{0\,2}}{\mathfrak{A}^0} + \frac{u'^2}{\mathfrak{B}'} + \frac{u''^2}{\mathfrak{C}''} + \frac{u'''^2}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.} + \mathrm{M}$$

zu bringen, wo die Divisoren $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$, $\mathfrak{D}'''$ etc. bestimmte Grössen, u^0, u', u'', u''' etc. aber lineare Funktionen von x, y, z etc. sind, von denen indess die zweite u' kein x, die dritte u'' kein x und kein y, die vierte u''' kein x, y und z, und so weiter, enthält, wonach die letzte $u^{(\pi-1)}$ nur noch von der letzten der Unbekannten x, y, z etc. abhängt; endlich sind die Coefficienten, mit denen x, y, z etc. bezw. in u^0, u', u'' etc. multiplicirt sind, bezw. den $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$ etc. gleich. Alsdann hat man $u^0 = 0$, $u' = 0$, $u'' = 0$, $u''' = 0$ etc. zu setzen, um die Werthe der Unbekannten x, y, z etc. in umgekehrter Reihenfolge so bequem wie möglich abzuleiten. Es erscheint unnöthig, den Algorithmus selbst, durch welchen diese Transformation der Funktion Ω bewirkt wird, hier noch einmal zu wiederholen.

Aber eine noch viel weitläufigere Rechnung erfordert die unbestimmte Elimination, mit deren Hülfe man die Gewichte jener Bestimmungen aufzusuchen hat. Zwar das Gewicht der Bestimmung der letzten Unbekannten (welche allein in dem letzten $u^{(\pi-1)}$ vorkommt) wird nach dem, was in der „Theorie der Bewegung der Himmelskörper“ gelehrt ist, leicht gleich dem letzten Gliede in der Reihe der Divisoren $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$ etc. gefunden; deshalb haben sich einige Rechner, um jene lästige Elimination zu umgehen, in Ermangelung anderer Hülfsmittel, dazu entschlossen, den öfter erwähnten Algorithmus mit veränderter Reihenfolge der Grössen x, y, z etc. zu wiederholen, indem sie nach und nach den einzelnen Unbekannten den letzten Platz anwiesen. Wir hoffen deshalb auf den Dank der Mathematiker, wenn wir zur Berechnung der Gewichte der Bestimmungen eine neue, aus einer tieferen Analyse der Beweisführung geschöpfte Methode, welche nichts mehr zu wünschen übrig zu lassen scheint, hier auseinander setzen.

32.

Nehmen wir also an, es sei

$$\begin{aligned} u^0 &= \mathfrak{A}^0 x + \mathfrak{B}^0 y + \mathfrak{C}^0 z + \text{etc.} + \mathfrak{L}^0 \\ u' &= \mathfrak{B}' y + \mathfrak{C}' z + \text{etc.} + \mathfrak{L}' \\ u'' &= \mathfrak{C}'' z + \text{etc.} + \mathfrak{L}'' \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{1}$$

Hieraus folgt im allgemeinen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\, d\Omega &= \xi dx + \eta dy + \zeta dz + \text{etc.} \\ &= \frac{u^0\, du^0}{\mathfrak{A}^0} + \frac{u'\, du'}{\mathfrak{B}'} + \frac{u''\, du''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} \\ &= u^0 \left(dx + \frac{\mathfrak{B}^0}{\mathfrak{A}^0} dy + \frac{\mathfrak{C}^0}{\mathfrak{A}^0} dz + \text{etc.}\right) \\ &\quad + u' \left(dy + \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} dz + \text{etc.}\right) + u'' (dz + \text{etc.}) + \text{etc.}, \end{aligned}$$

woraus zu erschliessen

$$\begin{aligned} \xi &= u^0 \\ \eta &= \frac{\mathfrak{B}^0}{\mathfrak{A}^0} u^0 + u' \\ \zeta &= \frac{\mathfrak{C}^0}{\mathfrak{A}^0} u^0 + \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} u' + u'' \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{2}$$

Nehmen wir an, es ergäben sich hieraus die folgenden Formeln

$$\begin{aligned} u^0 &= \xi \\ u' &= \mathrm{A}'\xi + \eta \\ u'' &= \mathrm{A}''\xi + \mathrm{B}''\eta + \zeta \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{3}$$

Von dem vollständigen Differential der Gleichung

$$\Omega = \xi (x - \mathrm{A}) + \eta (y - \mathrm{B}) + \zeta (z - \mathrm{C}) + \text{etc.} + \mathrm{M}$$

ziehen wir nunmehr die Gleichung

$$\frac{1}{2}\, d\Omega = \xi dx + \eta dy + \zeta dz + \text{etc.}$$

ab, und erhalten

$$\frac{1}{2}\,d\Omega = (x - \mathrm{A})\,d\xi + (y - \mathrm{B})\,d\eta + (z - \mathrm{C})\,d\zeta + \text{etc.},$$

welcher Ausdruck mit dem übereinstimmen muss, der sich aus (3) ergiebt, nämlich mit

$$\frac{u^0}{\mathfrak{A}^0}\,d\xi + \frac{u'}{\mathfrak{B}'}(\mathrm{A}'d\xi + d\eta) + \frac{u''}{\mathfrak{C}''}(\mathrm{A}''d\xi + \mathrm{B}''d\eta + d\zeta) + \text{etc.}$$

Hieraus folgern wir

$$\begin{aligned} x &= \frac{u^0}{\mathfrak{A}^0} + \mathrm{A}'\frac{u'}{\mathfrak{B}'} + \mathrm{A}''\frac{u''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} + \mathrm{A} \\ y &= \frac{u'}{\mathfrak{B}'} + \mathrm{B}''\frac{u''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} + \mathrm{B} \\ z &= \frac{u''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} + \mathrm{C} \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{4}$$

Wenn man in diese Ausdrücke für u^0, u', u'' etc. ihre aus (3) entnommenen Werthe einsetzt, so wird die unbestimmte Elimination erledigt sein. Und zwar erhält man zur Bestimmung der Gewichte

$$\begin{aligned} [\alpha\alpha] &= \frac{1}{\mathfrak{A}^0} + \frac{\mathrm{A}'^2}{\mathfrak{B}'} + \frac{\mathrm{A}''^2}{\mathfrak{C}''} + \frac{\mathrm{A}'''^2}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.} \\ [\beta\beta] &= \frac{1}{\mathfrak{B}'} + \frac{\mathrm{B}''^2}{\mathfrak{C}''} + \frac{\mathrm{B}'''^2}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.} \\ [\gamma\gamma] &= \frac{1}{\mathfrak{C}''} + \frac{\mathrm{C}'''^2}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.} \\ &\text{etc.}, \end{aligned} \tag{5}$$

Formeln, deren Einfachheit nichts zu wünschen übrig lässt. Uebrigens ergeben sich auch für die anderen Coefficienten $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$, $[\beta\gamma]$ etc. gleich einfache Formeln, welche wir indessen, da sie seltener gebraucht werden, hier beizufügen unterlassen.

33.

Wegen der Bedeutung des Gegenstandes, und um Alles für die Rechnung bereit zu stellen, wollen wir auch die expliciten Formeln zur Bestimmung der Coefficienten A', A'', A''' etc., B'', B''' etc. etc. hierherschreiben. Diese Rechnung kann auf eine doppelte Weise geführt werden, da dieselben Gleichungen sich ergeben müssen, ob man nun die aus (3) entnommenen Werthe der u^0, u', u'' etc. in (2) einsetzt, oder die Werthe der ξ, η, ζ etc. aus (2) in (3). Die erste Rechnungsart liefert folgendes Formelsystem:

$$\frac{\mathfrak{B}^0}{\mathfrak{A}^0} + A' = 0$$

$$\frac{\mathfrak{C}^0}{\mathfrak{A}^0} + \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} A' + A'' = 0$$

$$\frac{\mathfrak{D}^0}{\mathfrak{A}^0} + \frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{B}'} A' + \frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{C}''} A'' + A''' = 0$$

etc., woraus A', A'', A''' etc. gefunden werden,

$$\frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} + B'' = 0$$

$$\frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{B}'} + \frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{C}''} B'' + B''' = 0$$

etc., woraus B'', B''' etc. gefunden werden,

$$\frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{C}''} + C''' = 0$$

etc., woraus C''' etc. gefunden werden. U. s. w.

Die andere Rechnungsart ergiebt folgende Formeln:

$$\mathfrak{A}^0 A' + \mathfrak{B}^0 = 0,$$

woraus A' erhalten wird,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^0 A'' + \mathfrak{B}^0 B'' + \mathfrak{C}^0 &= 0 \\ \mathfrak{B}' B'' + \mathfrak{C}' &= 0, \end{aligned}$$

woraus B'' und A'' erhalten werden,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^0 A''' + \mathfrak{B}^0 B''' + \mathfrak{C}^0 C''' + \mathfrak{D}^0 &= 0 \\ \mathfrak{B}^0 B''' + \mathfrak{C}' C''' + \mathfrak{D}' &= 0 \\ \mathfrak{C}'' C''' + \mathfrak{D}'' &= 0, \end{aligned}$$

woraus C''', B''', A''' erhalten werden. U. s. w.

Beide Rechnungsarten sind ungefähr gleich bequem, wenn die Gewichte sämmtlicher Bestimmungen x, y, z etc. verlangt werden; wird aber nur eine oder die andere der Grössen $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$, $[\gamma\gamma]$ etc. gesucht, so ist offenbar das erstere System weit vorzuziehen.

Uebrigens führt eine Combination der Gleichungen (1) mit (4) zu denselben Formeln und verhilft uns ausserdem zu einer doppelten Berechnung der plausibelsten Werthe von A, B, C etc. selbst, nämlich *erstens*

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= -\frac{\mathfrak{L}^0}{\mathfrak{A}^0} - \mathrm{A}'\frac{\mathfrak{L}'}{\mathfrak{B}'} - \mathrm{A}''\frac{\mathfrak{L}''}{\mathfrak{C}''} - \mathrm{A}'''\frac{\mathfrak{L}'''}{\mathfrak{D}'''} - \text{etc.}\\
\mathrm{B} &= \qquad\qquad\quad -\frac{\mathfrak{L}'}{\mathfrak{B}'} - \mathrm{B}''\frac{\mathfrak{L}''}{\mathfrak{C}''} - \mathrm{B}'''\frac{\mathfrak{L}'''}{\mathfrak{D}'''} - \text{etc.}\\
\mathrm{C} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -\frac{\mathfrak{L}''}{\mathfrak{C}''} - \mathrm{C}'''\frac{\mathfrak{L}'''}{\mathfrak{D}'''} - \text{etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Die andere Rechnung ist mit der gewöhnlichen identisch, bei der $u^0 = 0$, $u' = 0$, $u'' = 0$ etc. gesetzt wird.

34.

Die Entwickelungen des Art. 32. sind indessen nur specielle Fälle eines allgemeineren Lehrsatzes, der folgendermaassen lautet:

Lehrsatz. Es bezeichne t folgende lineare Funktion der Variabeln x, y, z etc.

$$t = fx + gy + hz + \text{etc.} + k,$$

welche sich als Funktion der Variabeln u^0, u', u'' etc. in der Form

$$t = k^0u^0 + k'u' + k''u'' + \text{etc.} + \mathrm{K}$$

darstellt. Alsdann wird K der plausibelste Werth des t sein, und das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \frac{1}{\mathfrak{A}^0k^{0\,2} + \mathfrak{B}'k'^2 + \mathfrak{C}''k''^2 + \text{etc.}}$$

Beweis. Der erste Theil des Lehrsatzes folgt aus dem Umstande, dass der plausibelste Werth von t den Werthen $u^0 = 0$, $u' = 0$, $u'' = 0$ etc. entsprechen muss. Zum Beweis des zweiten Theils bemerken wir, da

$$\frac{1}{2}\,d\Omega = \xi dx + \eta dy + \zeta dz + \text{etc. und } dt = fdx + gdy + hdz + \text{etc.}$$

ist, dass für $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$ etc., unabhängig von den Werthen der Differentiale dx, dy, dz etc.,

$$d\Omega = 2dt$$

sein muss. Daraus folgt aber, dass für dieselben Werthe $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$ etc:

$$\frac{u^0}{\mathfrak{A}^0}du^0 + \frac{u'}{\mathfrak{B}'}du' + \frac{u''}{\mathfrak{C}''}du'' + \text{etc.} = k^0du^0 + k'du' + k''du'' + \text{etc.}$$

wird. Auch erkennt man leicht, wenn dx, dy, dz etc. von einander unabhängig sind, dass auch du^0, du', du'' etc. von einander unabhängig sein müssen; woraus wir entnehmen, dass für $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$ etc.

$$u^0 = \mathfrak{A}^0 k^0, \quad u' = \mathfrak{B}'k', \quad u'' = \mathfrak{C}''k'' \text{ etc.}$$

ist. Folglich wird der Werth von Ω, welcher zu denselben Werthen gehört,

$$= \mathfrak{A}^0 k^{0\,2} + \mathfrak{B}'k'^2 + \mathfrak{C}''k''^2 + \text{etc.} + \mathrm{M},$$

woraus nach Art. 29. sofort die Richtigkeit unseres Lehrsatzes folgt.

Wenn wir übrigens die Transformation der Funktion t unmittelbar, d. h. ohne Kenntniss der Substitutionen (4) des Art. 32., ausführen wollen, so stehen die Formeln zur Verfügung:

$$\begin{aligned} f &= \mathfrak{A}^0 k^0 \\ g &= \mathfrak{B}^0 k^0 + \mathfrak{B}'k' \\ h &= \mathfrak{C}^0 k^0 + \mathfrak{C}'k' + \mathfrak{C}''k'' \text{ etc.}, \end{aligned}$$

woraus nach und nach die Coefficienten k^0, k', k'' etc. bestimmt werden, und sich endlich ergiebt:

$$\mathrm{K} = k - \mathfrak{L}^0 k^0 - \mathfrak{L}'k' - \mathfrak{L}''k'' - \text{etc.}$$

35.

Einer besonderen Behandlung werth ist das folgende Problem, sowohl seiner praktischen Nützlichkeit, als seiner eleganten Lösung wegen:

Die Aenderungen in den plausibelsten Werthen der Unbekannten, welche durch Hinzufügung einer neuen Gleichung bewirkt werden, ebenso wie die Gewichte der neuen Bestimmungen zu finden.

Wir behalten die oben benutzten Bezeichnungen bei, so dass die auf das Gewicht $= 1$ zurückgeführten, ursprünglichen Gleichungen die folgenden sind: $v = 0$, $v' = 0$, $v'' = 0$ etc., und die allgemeine Summe $v^2 + v'^2 + v''^2 + \text{etc.} = \Omega$ ist; ferner seien ξ, η, ζ etc. die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{d\Omega}{2dx}, \quad \frac{d\Omega}{2dy}, \quad \frac{d\Omega}{2dz} \text{ etc.},$$

und endlich möge aus der unbestimmten Elimination folgen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathrm{A} + [\alpha\alpha]\,\xi + [\alpha\beta]\,\eta + [\alpha\gamma]\,\zeta + \text{etc.} \\ y &= \mathrm{B} + [\alpha\beta]\,\xi + [\beta\beta]\,\eta + [\beta\gamma]\,\zeta + \text{etc.} \\ z &= \mathrm{C} + [\alpha\gamma]\,\xi + [\beta\gamma]\,\eta + [\gamma\gamma]\,\zeta + \text{etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Wir nehmen nun an, eine (sehr nahe richtige, auf die Gewichtseinheit bezogene) neue Gleichung $v^* = 0$ trete hinzu, und wir wollen nachforschen, wie gross die hieraus hervorgehenden Aenderungen sowohl in den plausibelsten Werthen der Unbekannten A, B, C etc., als auch in den Coefficienten $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ etc. seien.

Wir setzen

$$\Omega + v^{*2} = \Omega^*, \quad \frac{d\Omega^*}{2dx} = \xi^*, \quad \frac{d\Omega^*}{2dy} = \eta^*, \quad \frac{d\Omega^*}{2dz} = \zeta^* \text{ etc.}$$

und nehmen an, durch Elimination folge hieraus

$$x = A^* + [\alpha\alpha^*]\,\xi^* + [\alpha\beta^*]\,\eta^* + [\alpha\gamma^*]\,\zeta^* + \text{etc.}$$

Endlich sei

$$v^* = fx + gy + hz + \text{etc.} + k,$$

und durch Einsetzung der Werthe für x, y, z etc. nach (1) folge hieraus

$$v^* = F\xi + G\eta + H\zeta + \text{etc.} + K;$$

sodann setze man

$$Ff + Gg + Hh + \text{etc.} = \omega.$$

Offenbar wird K der plausibelste Werth der Funktion v^* sein, wie er sich aus den ursprünglichen Gleichungen ergiebt, ohne Rücksicht auf den Werth 0, welchen die hinzutretende Beobachtung geliefert hat, und $\frac{1}{\omega}$ wird das Gewicht dieser Bestimmung sein.

Wir haben nun

$$\xi^* = \xi + fv^*, \quad \eta^* = \eta + gv^*, \quad \zeta^* = \zeta + hv^* \text{ etc.}$$

und deshalb

$$F\xi^* + G\eta^* + H\zeta^* + \text{etc.} + K = v^*(1 + Ff + Gg + Hh + \text{etc.})$$

oder

$$v^* = \frac{F\xi^* + G\eta^* + H\zeta^* + \text{etc.} + K}{1 + \omega}.$$

Ebenso wird

$$\begin{aligned} x &= A + [\alpha\alpha]\,\xi^* + [\alpha\beta]\,\eta^* + [\alpha\gamma]\,\zeta^* + \text{etc.} \\ &\qquad - v^*(f[\alpha\alpha] + g[\alpha\beta] + h[\alpha\gamma] + \text{etc.}) \\ &= A + [\alpha\alpha]\,\xi^* + [\alpha\beta]\,\eta^* + [\alpha\gamma]\,\zeta^* + \text{etc.} - Fv^* \\ &= A + [\alpha\alpha]\,\xi^* + [\alpha\beta]\,\eta^* + [\alpha\gamma]\,\zeta^* + \text{etc.} \\ &\qquad - \frac{F}{1+\omega}(F\xi^* + G\eta^* + H\zeta^* + \text{etc.} + K). \end{aligned}$$

Hieraus schliessen wir demnach, dass

$$A^* = A - \frac{FK}{1+\omega}$$

der plausibelste Werth des x aus *allen* Beobachtungen sein wird; und da ferner

$$[\alpha\alpha^*] = [\alpha\alpha] - \frac{F^2}{1+\omega},$$

so ist das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \frac{1}{[\alpha\alpha] - \frac{F^2}{1+\omega}}.$$

Auf dieselbe Weise wird ferner der auf *allen* Beobachtungen beruhende plausibelste Werth des y gefunden

$$B^* = B - \frac{GK}{1+\omega},$$

und das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \frac{1}{[\beta\beta] - \frac{G^2}{1+\omega}}$$

und so weiter. W. z. f. w.

Dieser Lösung mögen einige Bemerkungen beigefügt werden.

I. Durch Einsetzung dieser neuen Werthe A^*, B^*, C^* etc. erhält die Funktion v^* den plausibelsten Werth

$$K - \frac{K}{1+\omega}(Ff + Gg + Hh + \text{etc.}) = \frac{K}{1+\omega}.$$

Und da allgemein

$$v^* = \frac{F}{1+\omega}\xi^* + \frac{G}{1+\omega}\eta^* + \frac{H}{1+\omega}\zeta^* + \text{etc.} + \frac{K}{1+\omega}$$

ist, so ergiebt sich nach den Principien des Art. 29. das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \frac{1+\omega}{Ff + Gg + Hh + \text{etc.}} = \frac{1}{\omega} + 1.$$

Dasselbe folgt unmittelbar aus der Anwendung der am Ende des Art. 22. gegebenen Regel; die Gruppe der ursprünglichen

Gleichungen würde nämlich die Bestimmung $v^* = \mathrm{K}$ mit dem Gewicht $\frac{1}{\omega}$ geliefert haben, sodann hätte die neue Beobachtung eine andere, von jener unabhängige Bestimmung $v^* = 0$ mit dem Gewichte $= 1$ gegeben, und durch Combinirung beider würde die Bestimmung $v^* = \frac{\mathrm{K}}{1 + \omega}$ mit dem Gewichte $= \frac{1}{\omega} + 1$ folgen.

II. Hieraus folgt weiter, da für $x = \mathrm{A}^*$, $y = \mathrm{B}^*$, $z = \mathrm{C}^*$ etc. auch $\xi^* = 0$, $\eta^* = 0$, $\zeta^* = 0$ etc. sein muss, dass für dieselben Werthe

$$\xi = -\frac{f\mathrm{K}}{1+\omega},\ \eta = -\frac{g\mathrm{K}}{1+\omega},\ \zeta = -\frac{h\mathrm{K}}{1+\omega} \text{ etc.}$$

wird, und ferner, da allgemein

$$\Omega = \xi(x - \mathrm{A}) + \eta(y - \mathrm{B}) + \zeta(z - \mathrm{C}) + \text{etc.} + \mathrm{M}$$

ist,

$$\Omega = \frac{\mathrm{K}^2}{(1+\omega)^2}(\mathrm{F}f + \mathrm{G}g + \mathrm{H}h + \text{etc.}) + \mathrm{M} = \mathrm{M} + \frac{\omega\mathrm{K}^2}{(1+\omega)^2},$$

und endlich, weil ja allgemein $\Omega^* = \Omega + v^{*2}$ ist,

$$\Omega^* = \mathrm{M} + \frac{\omega\mathrm{K}^2}{(1+\omega)^2} + \frac{\mathrm{K}^2}{(1+\omega)^2} = \mathrm{M} + \frac{\mathrm{K}^2}{1+\omega}.$$

III. Vergleichen wir diese Ergebnisse mit den im Art. 30. vorgetragenen, so bemerken wir, dass hier der kleinste Werth der Funktion Ω derjenige ist, welchen sie für den bestimmten Werth der Funktion $v^* = \frac{\mathrm{K}}{1+\omega}$ annehmen kann.

36.

Für das folgende, dem vorhergehenden ähnliche Problem:

Die Aenderungen in den plausibelsten Werthen der Unbekannten, welche durch die Aenderung des Gewichts irgend einer der ursprünglichen Beobachtungen bewirkt werden, und ebenso die Gewichte der neuen Bestimmungen aufzusuchen.

soll hier nur die Lösung Platz finden, während wir den Beweis, welcher nach Analogie des vorigen Art. leicht geführt wird, der Kürze halber unterdrücken.

Nehmen wir an, es werde erst nach Vollendung der Rechnung bemerkt, dass man einer gewissen Beobachtung ein zu kleines oder zu grosses Gewicht beigelegt habe; z. B. habe man etwa der ersten, welche V = L gegeben hat, an Stelle des in der Rechnung angewandten Gewichtes p richtiger das Gewicht p^* beizulegen. Alsdann wird es nicht nöthig sein, die ganze Rechnung zu wiederholen, sondern es lassen sich bequemer aus nachfolgenden Formeln Correctionen berechnen.

Die verbesserten plausibelsten Werthe der Unbekannten werden folgende sein

$$x = \mathrm{A} - \frac{(p^* - p)\,\alpha\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

$$y = \mathrm{B} - \frac{(p^* - p)\,\beta\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

$$z = \mathrm{C} - \frac{(p^* - p)\,\gamma\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

etc., und die Gewichte dieser Bestimmungen werden gefunden, wenn man die Einheit bezw. durch

$$[\alpha\alpha] - \frac{(p^* - p)\,\alpha^2}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

$$[\beta\beta] - \frac{(p^* - p)\,\beta^2}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

$$[\gamma\gamma] - \frac{(p^* - p)\,\gamma^2}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})} \quad \text{etc.}$$

dividirt. Diese Lösung begreift auch den Fall in sich, wo man nach vollendeter Rechnung bemerkt, dass eine der Beobachtungen gänzlich zu verwerfen sei, da dies dasselbe ist, als wenn man $p^* = 0$ setzt; und ebenso entspricht der Werth $p^* = \infty$ dem Fall, wo die Gleichung V = L, welche in der Rechnung als angenähert behandelt worden war, in der That absolut genau ist.

Wenn übrigens zu den Gleichungen, welche der Rechnung zu Grunde gelegt sind, *mehrere* neue hinzukommen, oder wenn man bemerkt, dass *mehreren* von ihnen irrige Gewichte beigelegt sind, so würde die Berechnung der Correctionen zu verwickelt werden; deshalb wird man in diesem Fall es vorziehen, die Rechnung von neuem zu beginnen.

37.

In den Art. 15., 16. haben wir eine Methode zu einer möglichst angenäherten Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen gegeben*). Diese Methode setzt aber voraus, es seien die wirklich

*) Eine Untersuchung über denselben Gegenstand, welchen wir in einer

begangenen Fehler hinlänglich zahlreich und genau bekannt, eine Voraussetzung, welche streng genommen sehr selten, oder sagen wir lieber nie, zutreffen wird. Wenn aber wenigstens die Grössen, deren angenäherte Werthe durch Beobachtungen ermittelt wurden, nach einem bekannten Gesetz von einer oder mehreren unbekannten Grössen abhängen, so lassen sich die plausibelsten Werthe der letzteren durch die Methode der kleinsten Quadrate bestimmen; und von den hieraus berechneten Werthen der Grössen, welche den Beobachtungen unterworfen waren, wird vorausgesetzt, da sie nunmehr sehr wenig von den wahren Werthen abweichen, so dass ihre Unterschiede gegen die beobachteten Werthe mit um so grösserem Rechte als wahre Beobachtungsfehler behandelt werden dürften, je grösser ihre Anzahl gewesen ist. Dieses Verfahren haben alle Rechner befolgt, welche a posteriori die Genauigkeit von Beobachtungen in bestimmt vorliegenden Fällen zu schätzen unternahmen: offenbar ist dasselbe aber theoretisch fehlerhaft, und obwohl es in vielen Fällen für den praktischen Gebrauch genügen mag, kann es gleichwohl in anderen stark irre führen. Deshalb ist dieser Gegenstand im höchsten Grade einer schärferen Analyse werth.

Wir werden bei dieser Untersuchung die vom Art. 19. ab angewandten Bezeichnungen beibehalten. Das eben erwähnte Verfahren behandelt die Grössen A, B, C etc. als wahre Werthe der x, y, z etc., und demnach die λ, λ', λ'' etc. als wahre Werthe der Funktionen v, v', v'' etc. Wenn alle Beobachtungen gleiche Genauigkeit besitzen, und ihr Gewicht $p = p' = p''$ etc. als Einheit angenommen wird, so bedeuten die Grössen λ, λ', λ'' etc. mit entgegengesetzten Vorzeichen bei jener Voraussetzung die Beobachtungsfehler selbst, welche nach den Vorschriften des Art. 15. den mittleren Fehler m der Beobachtungen

$$= \sqrt{\frac{\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \text{etc.}}{\pi}} = \sqrt{\frac{\mathrm{M}}{\pi}}$$

ergeben. Ist die Genauigkeit der Beobachtungen verschieden, so würden die Grössen $-\lambda$, $-\lambda'$, $-\lambda''$ etc. die Beobachtungsfehler multiplicirt mit den Quadratwurzeln aus den Gewichten darstellen,

---

früheren Abhandlung (*Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen. Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften.* Bd. I, S. 185) veröffentlicht haben, war auf dieselbe Hypothese in Betreff des Charakters der Funktion, welche die Fehlerwahrscheinlichkeit ausdrückt, begründet, auf welcher wir auch in der „Theorie der Bewegung der Himmelskörper" die Methode der kleinsten Quadrate aufgebaut hatten (s. Art. 9., III).

und die Vorschriften des Art. 16. würden zu der nämlichen Formel $\sqrt{\frac{M}{\pi}}$ führen, welche schon den mittleren Fehler solcher Beobachtungen ausdrückt, denen das Gewicht $= 1$ beigelegt wird. Offenbar würde aber eine strenge Rechnung erfordern, dass an Stelle der Grössen λ, λ', λ'' etc. die aus den wahren Werthen von x, y, z etc. sich ergebenden Werthe der Funktionen v, v', v'' etc. gebraucht werden, d. h. an Stelle von M der den wahren Werthen von x, y, z etc. entsprechende Werth der Funktion Ω. Obgleich dieser nun nicht angegeben werden kann, sind wir dennoch sicher, dass er grösser als M sei (da M der kleinste mögliche Werth ist), den höchst unwahrscheinlichen Fall ausgenommen, dass die plausibelsten Werthe der Unbekannten mit den wahren genau übereinstimmen. Im allgemeinen können wir also versichern, dass das gewöhnliche Verfahren einen gewiss zu kleinen mittleren Fehler ergiebt, oder dass den Beobachtungen eine allzugrosse Genauigkeit beigelegt wird. Wir wollen jetzt zusehen, was die strenge Theorie lehrt.

38.

Vor allem muss man untersuchen, wie M von den wahren Beobachtungsfehlern abhängt. Diese bezeichnen wir, wie im Art. 28., mit e, e', e'' etc., und setzen der grösseren Einfachheit wegen

$$e\sqrt{p} = \varepsilon, \quad e'\sqrt{p'} = \varepsilon', \quad e''\sqrt{p''} = \varepsilon'' \text{ etc.}$$

und ebenso

$$m\sqrt{p} = m'\sqrt{p'} = m''\sqrt{p''} = \text{etc.} = \mu.$$

Es seien ferner die wahren Werthe der x, y, z etc. bezw. $A - x^0$, $B - y^0$, $C - z^0$ etc., und diesen mögen als Werthe der ξ, η, ζ etc. bezw. entsprechen $-\xi^0$, $-\eta^0$, $-\zeta^0$ etc. Offenbar entsprechen denselben als Werthe der v, v', v'' etc. bezw. $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc., so dass man hat

$$\begin{aligned}
\xi^0 &= a\varepsilon + a'\varepsilon' + a''\varepsilon'' + \text{etc.}\\
\eta^0 &= b\varepsilon + b'\varepsilon' + b''\varepsilon'' + \text{etc.}\\
\zeta^0 &= c\varepsilon + c'\varepsilon' + c''\varepsilon'' + \text{etc.}
\end{aligned}$$

etc., sowie

$$\begin{aligned}
x^0 &= \alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \text{etc.}\\
y^0 &= \beta\varepsilon + \beta'\varepsilon' + \beta''\varepsilon'' + \text{etc.}\\
z^0 &= \gamma\varepsilon + \gamma'\varepsilon' + \gamma''\varepsilon'' + \text{etc.}
\end{aligned}$$

etc.

Endlich setzen wir

$$\Omega^0 = \varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \text{etc.},$$

so dass Ω^0 der Werth der Funktion Ω ist, welcher den wahren Werthen der x, y, z etc. entspricht. Da man allgemein hat

$$\Omega = \text{M} + (x - \text{A})\,\xi + (y - \text{B})\,\eta + (z - \text{C})\,\zeta + \text{etc.},$$

so wird hiernach

$$\text{M} = \Omega^0 - x^0\xi^0 - y^0\eta^0 - z^0\zeta^0 - \text{etc.}$$

sein. Hieraus folgt offenbar, dass M sich als homogene Funktion zweiten Grades der Fehler e, e', e'' etc. entwickeln lässt, welche für verschiedene Werthe der Fehler grösser oder kleiner werden kann. So lange uns aber die Grösse der Fehler unbekannt bleibt, wird man diese Funktion bei der Untersuchung unbestimmt lassen, und vor allem ihren mittleren Werth nach den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu bestimmen suchen. Diesen werden wir finden, wenn wir an Stelle der Quadrate e^2, e'^2, e''^2 etc. bezw. m^2, m'^2, m''^2 etc. setzen, die Produkte ee', ee'', $e'e''$ etc. aber überhaupt weglassen, oder, was dasselbe ist, wenn wir an Stelle eines jeden Quadrates ε^2, ε'^2, ε''^2 etc. μ^2 schreiben und die Produkte $\varepsilon\varepsilon'$, $\varepsilon\varepsilon''$, $\varepsilon'\varepsilon''$ etc. vernachlässigen. Auf diese Weise entsteht aus dem Gliede Ω^0 offenbar $\pi\mu^2$; das Glied $-x^0\xi^0$ geht in

$$-(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \text{etc.})\,\mu^2 = -\mu^2$$

über, und analog geben die übrigen einzelnen Theile $-\mu^2$, so dass der mittlere totale Werth $= (\pi - \varrho)\,\mu^2$ wird, wenn π die Anzahl der Beobachtungen und ϱ die Anzahl der Unbekannten bezeichnet. Der wahre Werth des M kann zwar, je nach den zufälligen Fehlern, grösser oder kleiner als der mittlere werden, der Unterschied aber wird von um so geringerer Bedeutung sein, je grösser die Anzahl der Beobachtungen gewesen ist, so dass man als angenäherten Werth des μ

$$\sqrt{\frac{\text{M}}{\pi - \varrho}}$$

nehmen darf. Der Werth für μ, welcher sich aus der im vorigen Art. besprochenen irrthümlichen Praxis ergiebt, muss deshalb im Verhältniss der Grösse $\sqrt{\pi - \varrho}$ zu $\sqrt{\pi}$ vergrössert werden.

39.

Um noch deutlicher zu zeigen, mit wie grossem Rechte man einen zufälligen Werth des M dem mittleren gleich setzen darf, muss man den mittleren zu befürchtenden Fehler suchen, wenn $\frac{M}{\pi - \varrho} = \mu^2$ gesetzt wird. Jener mittlere Fehler ist gleich der Quadratwurzel aus dem mittleren Werthe der Grösse

$$\left(\frac{\Omega^0 - x^0\,\xi^0 - y^0\,\eta^0 - z^0\,\zeta^0 - \text{etc.} - (\pi - \varrho)\,\mu^2}{\pi - \varrho}\right)^2,$$

der wir die Gestalt geben wollen

$$\left(\frac{\Omega^0 - x^0\,\xi^0 - y^0\,\eta^0 - z^0\,\zeta^0 - \text{etc.}}{\pi - \varrho}\right)^2$$

$$-\frac{2\,\mu^2}{\pi - \varrho}\left[\Omega^0 - x^0\,\xi^0 - y^0\,\eta^0 - z^0\,\zeta^0 - \text{etc.} - (\pi - \varrho)\,\mu^2\right] - \mu^4;$$

da offenbar der mittlere Werth des zweiten Gliedes $= 0$ wird, so verwandelt sich unsere Frage in die nach dem mittleren Werthe der Funktion

$$\Psi = (\Omega^0 - x^0\,\xi^0 - y^0\,\eta^0 - z^0\,\zeta^0 - \text{etc.})^2.$$

Ist dieser gefunden, und bezeichnet man ihn mit N, so wird der gesuchte mittlere Fehler

$$= \sqrt{\frac{N}{(\pi - \varrho)^2} - \mu^4}.$$

Der Ausdruck Ψ lässt sich offenbar als homogene Funktion entweder der Fehler e, e', e'' etc. oder auch der Grössen ε, ε', ε'' etc. entwickeln, und sein mittlerer Werth wird gefunden, wenn

1. für die Biquadrate e^4, e'^4, e''^4 etc. ihre mittleren Werthe gesetzt werden,

2. für die einzelnen Produkte aus je zwei Quadraten, wie $e^2e'^2$, $e^2e''^2$, $e'^2e''^2$ etc. die Produkte aus ihren mittleren Werthen, nämlich $m^2m'^2$, $m^2m''^2$, $m'^2m''^2$ etc. gesetzt werden,

3. die übrigen Glieder aber, welche entweder einen Faktor von der Form e^3e', oder von der Form $e^2e'e''$ enthalten, ganz fortgelassen werden. Die mittleren Werthe der Biquadrate e^4, e'^4, e''^4 etc. nehmen wir proportional den Biquadraten m^4, m'^4, m''^4 etc. an (siehe Art. 16.), so dass sich jene zu diesen wie ν^4 zu μ^4 verhalten, wo ν^4 also den mittleren Werth der Biquadrate solcher Beobachtungen bezeichnet, deren Gewicht $= 1$ ist. Demnach können die obigen Vorschriften auch so ausgedrückt werden: An Stelle der

einzelnen Biquadrate ε^4, ε'^4, ε''^4 etc. ist ν^4 zu schreiben, an Stelle der einzelnen Produkte aus je zwei Quadraten wie $\varepsilon^2\varepsilon'^2$, $\varepsilon^2\varepsilon''^2$, $\varepsilon'^2\varepsilon''^2$ etc. ist μ^4 zu schreiben, alle übrigen Glieder aber, die Faktoren wie $\varepsilon^3\varepsilon'$ oder $\varepsilon^2\varepsilon'\varepsilon''$ oder $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon'''$ enthalten, sind wegzulassen.

Hat man dieses genau begriffen, so findet man leicht:

I. Der mittlere Werth des Quadrates $\Omega^{0\,2}$ ist $\pi\nu^4 + (\pi^2 - \pi)\,\mu^4$.

II. Der mittlere Werth des Produktes $\varepsilon^2 x^0 \xi^0$ wird

$$= a\alpha\nu^4 + (a'\alpha' + a''\alpha'' + \text{etc.})\,\mu^4$$

oder, da $a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \text{etc.} = 1$ ist,

$$= a\alpha\,(\nu^4 - \mu^4) + \mu^4.$$

Und da der mittlere Werth des Produktes $\varepsilon'^2 x^0 \xi^0$ ebenso

$$= a'\alpha'\,(\nu^4 - \mu^4) + \mu^4$$

wird, der mittlere Werth des Produktes $\varepsilon''^2 x^0 \xi^0$ aber

$$= a''\alpha''\,(\nu^4 - \mu^4) + \mu^4$$

ist u. s. w., so wird offenbar der mittlere Werth des Produktes $(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \text{etc.})\,x^0\xi^0$ oder von $\Omega^0 x^0 \xi^0$

$$= \nu^4 - \mu^4 + \pi\mu^4$$

sein. Denselben mittleren Werth haben die Produkte $\Omega^0 y^0 \eta^0$, $\Omega^0 z^0 \zeta^0$ etc. Folglich wird der mittlere Werth des Produktes $\Omega^0\,(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})$

$$= \varrho\nu^4 + \varrho\,(\pi - 1)\,\mu^4.$$

III. Damit die noch übrigen Entwickelungen nicht zu verwickelt werden, soll eine zweckmässige Bezeichnung eingeführt werden. Wir gebrauchen zu dem Zweck das Zeichen Σ in einem etwas weiteren Sinne, als dies oben vorübergehend geschehen ist, so dass es eine Summe bezeichnet, bestehend aus dem Gliede, dem es vorgesetzt, und allen ähnlichen aber nicht identischen Gliedern, welche aus ihm durch alle Permutationen der Beobachtungen entspringen. Hiernach ist z. B. $x^0 = \Sigma\alpha\varepsilon$, $x^{0\,2} = \Sigma\alpha^2\varepsilon^2 + 2\,\Sigma\alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon'$. Setzt man dann den mittleren Werth des Produktes $x^{0\,2}\xi^{0\,2}$ gliedweise zusammen, so erhält man erstens den mittleren Werth des Produktes $\alpha^2\varepsilon^2\xi^{0\,2}$

$$= a^2\alpha^2\nu^4 + \alpha^2\,(a'^2 + a''^2 + \text{etc.})\,\mu^4$$
$$= a^2\alpha^2\,(\nu^4 - \mu^4) + \alpha^2\mu^4\Sigma a^2.$$

Der mittlere Werth des Produktes $\alpha'^2\varepsilon'^2\xi^{0\,2}$ wird ebenso

$= a'^2\alpha'^2(\nu^4 - \mu^4) + \alpha'^2\mu^4\Sigma a^2$ u. s. w., und deshalb der mittlere Werth des Produktes $\xi^{02}\,\Sigma\alpha^2\varepsilon^2$

$$= (\nu^4 - \mu^4)\,\Sigma a^2\alpha^2 + \mu^4\Sigma a^2\Sigma\alpha^2.$$

Der mittlere Werth des Produktes $\alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon'\xi^{02}$ wird weiter

$$= 2\,\alpha\alpha' a a'\mu^4,$$

und der mittlere Werth des Produktes $\alpha\alpha''\varepsilon\varepsilon''\xi^{02}$ ebenso

$$= 2\,\alpha\alpha'' a a''\mu^4 \text{ etc.,}$$

woraus leicht zu schliessen ist, dass der mittlere Werth des Produktes $\xi^{02}\Sigma\alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon'$ sich

$$= 2\,\mu^4\,\Sigma a a\alpha' a' = \mu^4\left[(\Sigma a\alpha)^2 - \Sigma a^2\alpha^2\right] = \mu^4(1 - \Sigma a^2\alpha^2)$$

ergiebt. Wenn wir dies zusammenfassen, so erhalten wir den mittleren Werth des Produktes $x^{02}\,\xi^{02}$

$$= (\nu^4 - 3\,\mu^4)\,\Sigma a^2\alpha^2 + 2\,\mu^4 + \mu^4\,\Sigma a^2\,\Sigma\alpha^2.$$

IV. Ganz ähnlich findet man den mittleren Werth des Produktes $x^0 y^0 \xi^0 \eta^0$

$$= \nu^4\,\Sigma a b\alpha\beta + \mu^4\,\Sigma a\,\alpha\,b'\beta' + \mu^4\,\Sigma a b\,\alpha'\beta' + \mu^4\,\Sigma a\beta\,b'\alpha'.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} \Sigma a\alpha b'\beta' &= \Sigma a\alpha\,\Sigma b\beta - \Sigma a\alpha b\beta \\ \Sigma a b\alpha'\beta' &= \Sigma a b\,\Sigma\alpha\beta - \Sigma a b\alpha\beta \\ \Sigma a\beta b'\alpha' &= \Sigma a\beta\,\Sigma b\alpha - \Sigma a\beta b\alpha, \end{aligned}$$

woraus sich jener mittlere Werth, weil $\Sigma a\alpha = 1$, $\Sigma b\beta = 1$, $\Sigma a\beta = 0$, $\Sigma b\alpha = 0$ ist,

$$= (\nu^4 - 3\,\mu^4)\,\Sigma a b\alpha\beta + \mu^4(1 + \Sigma a b\,\Sigma\alpha\beta)$$

ergiebt.

V. Da ferner der mittlere Werth des Produktes $x^0\,z^0\,\xi^0\,\zeta^0$ auf dieselbe Weise

$$= (\nu^4 - 3\,\mu^4)\,\Sigma a c\alpha\gamma + \mu^4(1 + \Sigma a c\,\Sigma\alpha\gamma)$$

wird, u. s. w., so ergiebt sich durch Summirung der mittlere Werth des Produktes $x^0\xi^0(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})$

$$\begin{aligned} &= (\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma[a\alpha(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})] + (\varrho + 1)\,\mu^4 \\ &\quad + \mu^4(\Sigma a^2\,\Sigma\alpha^2 + \Sigma a b\,\Sigma\alpha\beta + \Sigma a c\,\Sigma\alpha\gamma + \text{etc.}) \\ &= (\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma[a\alpha(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})] + (\varrho + 2)\,\mu^4. \end{aligned}$$

VI. Ferner wird auf dieselbe Weise der mittlere Werth des Produktes $y^0\eta^0(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})$ gefunden

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma[b\beta(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})] + (\varrho + 2)\,\mu^4,$$

sodann der mittlere Werth des Produktes $z^0\zeta^0(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})$

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma[c\gamma(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})] + (\varrho + 2)\,\mu^4$$

u. s. w. Hieraus folgt durch Addition der mittlere Werth des Quadrates $(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})^2$

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2] + (\varrho^2 + 2\varrho)\,\mu^4.$$

VII. Durch sorgfältige Addition aller Glieder ergiebt sich endlich

$$\begin{aligned} \mathrm{N} &= (\pi - 2\varrho)\,\nu^4 + (\pi^2 - \pi - 2\pi\varrho + 4\varrho + \varrho^2)\,\mu^4 \\ &\quad + (\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2] \\ &= (\pi - \varrho)\,(\nu^4 - \mu^4) + (\pi - \varrho)^2\,\mu^4 \\ &\quad - (\nu^4 - 3\mu^4)\,\{\varrho - \Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2]\}. \end{aligned}$$

Daher wird der mittlere zu befürchtende Fehler von μ^2, wenn die Formel

$$\mu^2 = \frac{\mathrm{M}}{\pi - \varrho}$$

angewendet wird,

$$= \sqrt{\frac{\nu^4 - \mu^4}{\pi - \varrho} - \frac{\nu^4 - 3\mu^4}{(\pi - \varrho)^2}\left\{\varrho - \Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2]\right\}}.$$

40.

Die Grösse $\Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2]$, welche in den soeben gefundenen Ausdruck eingeht, kann zwar im allgemeinen nicht auf eine einfachere Form gebracht werden; nichtsdestoweniger lassen sich zwei Grenzen angeben, zwischen denen ihr Werth nothwendig liegen muss. *Erstens* nämlich lässt sich aus den oben entwickelten Relationen leicht zeigen, dass

$$\begin{aligned} &(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2 + (a\alpha' + b\beta' + c\gamma' + \text{etc.})^2 \\ &+ (a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' + \text{etc.})^2 + \text{etc.} = a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.}, \end{aligned}$$

woraus wir schliessen, dass $a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.}$ eine positive Grösse und kleiner (wenigstens nicht grösser) als die Einheit ist. Dasselbe gilt von der Grösse $a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \text{etc.}$, welche ja der Summe $(a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + \text{etc.})^2 + (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \text{etc.})^2 + (a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' + \text{etc.})^2 + \text{etc.}$ gleich gefunden wird; ebenso wird $a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' + \text{etc.}$ kleiner als Eins sein, u. s. w. Hiernach ist $\Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2]$ nothwendig kleiner als π. *Zweitens* hat man $\Sigma(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.}) = \varrho$, da ja $\Sigma a\alpha = 1$, $\Sigma b\beta = 1$, $\Sigma c\gamma = 1$ etc., woraus leicht geschlossen wird, dass die Summe der Quadrate $\Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2]$ grösser als $\frac{\varrho^2}{\pi}$, oder wenigstens nicht kleiner sei. Daher liegt das Glied

$$\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{(\pi - \varrho)^2}\left\{\varrho - \Sigma\left[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2\right]\right\}$$

nothwendig zwischen den Grenzen $-\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \varrho}$ und $\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \varrho}\,\frac{\varrho}{\pi}$, oder, wenn wir weitere Grenzen vorziehen, zwischen $-\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \varrho}$ und $+\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \varrho}$, und hiernach das Quadrat des mittleren zu befürchtenden Fehlers für den Werth von $\mu^2 = \frac{M}{\pi - \varrho}$ in den Grenzen $\frac{2\nu^4 - 4\mu^4}{\pi - \varrho}$ und $\frac{2\mu^4}{\pi - \varrho}$, so dass man jedwede Genauigkeit erreichen kann, wenn nur die Anzahl der Beobachtungen hinreichend gross gewesen ist.

Es ist sehr bemerkenswerth, dass bei derjenigen Hypothese (Art. 9., III), auf welche die Theorie der kleinsten Quadrate früher begründet worden war, jenes Glied ganz wegfällt, und dass, ebenso wie man zur Ermittelung eines angenäherten Werthes μ des mittleren Fehlers der Beobachtungen in allen Fällen die Summe

$$\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \text{etc.} = M$$

so behandeln muss, als wenn sie die Summe von $\pi - \varrho$ zufälligen Fehlern wäre, gerade so bei jener Hypothese auch die Genauigkeit selbst dieser Bestimmung derjenigen gleich wird, welche nach den Ergebnissen des Art. 15. der Bestimmung aus $\pi - \varrho$ wahren Fehlern zukommt.

Ergänzung zur Theorie
der den kleinsten Fehlern unterworfenen
Combination der Beobachtungen.

(Der Königlichen Societät der Wissenschaften überreicht 1826, Sept. 16.)

1.

In der Abhandlung über die Theorie der Combination der Beobachtungen, welche im 5. Bande der „Commentationes recentiores“ abgedruckt ist, haben wir angenommen, die Grössen, deren Werthe durch nicht völlig genaue Beobachtungen gegeben sind, seien von gewissen unbekannten Elementen so abhängig, dass sie in Form von gegebenen Funktionen dieser Elemente dargestellt seien, und es komme hauptsächlich darauf an, diese Elemente so genau als möglich aus den Beobachtungen abzuleiten.

In den meisten Fällen ist jene Annahme freilich unmittelbar zutreffend. In anderen Fällen aber tritt uns die Aufgabe in ein wenig anderer Gestalt entgegen, so dass es auf den ersten Anblick zweifelhaft erscheint, wie man sie auf die verlangte Form zurückführen könne. Es kommt nämlich nicht selten vor, dass die Grössen, auf welche sich die Beobachtungen beziehen, noch nicht in der Form von Funktionen bestimmter Elemente ausgedrückt sind und auch nicht auf eine solche Form zurückführbar erscheinen, wenigstens nicht bequem oder nicht ohne Umschweife; während andererseits die Natur des Gegenstandes gewisse Bedingungen liefert, denen die wahren Werthe der beobachteten Grössen in aller Strenge genügen müssen.

Wenn man aber genauer zusieht, so bemerkt man leicht, dass dieser Fall sich von dem früheren in der That nicht wesentlich unterscheidet, sondern auf ihn zurückgeführt werden kann. Bezeichnet man nämlich mit π die Anzahl der beobachteten Grössen, mit σ aber die Anzahl der Bedingungsgleichungen, und wählt man von den ersteren nach Belieben $\pi - \sigma$ aus, so steht nichts im Wege, gerade diese als Elemente anzunehmen und die übrigen, deren Anzahl σ sein wird, mit Hülfe der Bedingungsgleichungen als Funktionen von jenen zu betrachten, wodurch die Aufgabe auf unsere Voraussetzung zurückgeführt ist.

Wenn nun aber auch dieser Weg in sehr vielen Fällen thatsächlich bequem genug zum Ziele führt, so lässt sich doch nicht leugnen, dass er nicht ganz natürlich ist, und dass es demnach die Mühe lohnt, die Aufgabe in dieser anderen Form gesondert zu behandeln, und zwar um so mehr, als sie eine sehr elegante Lösung erlaubt. Ja man darf sogar sagen: Da diese neue Lösung zu kürzeren Rechnungen, als die Lösung der Aufgabe im früheren Zustande führt, wenn σ kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ ist, oder, was dasselbe ist, wenn die in der früheren Abhandlung mit ϱ bezeichnete Anzahl der Elemente grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist, so wird man die in der vorliegenden Abhandlung auseinandergesetzte neue Lösung in diesem Fall auch dann noch der früheren vorzuziehen haben, wenn man die Bedingungsgleichungen aus der Natur des Problems ohne Umschweife wegschaffen kann.

2.

Wir bezeichnen mit v, v', v'' etc. die Grössen, in der Anzahl π, deren Werthe durch Beobachtung zu unserer Kenntniss kommen; es hänge nun eine unbekannte Grösse von jenen so ab, dass sie durch eine gegebene Funktion u derselben ausgedrückt sei; es seien ferner l, l', l'' etc. die Werthe der Differentialquotienten

$$\frac{du}{dv}, \quad \frac{du}{dv'}, \quad \frac{du}{dv''} \text{ etc.},$$

welche den wahren Werthen der Grössen v, v', v'' etc. entsprechen. Ebenso wie nun durch Einsetzen dieser wahren Werthe in die Funktion u ihr wahrer Werth hervorgeht, so erhält man, wenn man für v, v', v'' etc. Werthe einsetzt, welche von den wahren bezw. um die Fehler e, e', e'' etc., unterschieden sind, einen fehlerhaften Werth der Unbekannten, dessen Fehler

$$= le + l'e' + l''e'' + \text{etc.}$$

gesetzt werden kann, wenn nur, was wir stets annehmen, die Fehler e, e', e'' etc. so klein sind, dass (für eine nicht lineare Funktion u) ihre Quadrate und Produkte vernachlässigt werden dürfen. Obwohl nun die Grösse der Fehler e, e', e'' etc. unbestimmt bleibt, kann man doch die einer solchen Bestimmung der

Unbekannten anhaftende Unsicherheit allgemein schätzen, und zwar durch den mittleren bei einer solchen Bestimmung zu befürchtenden Fehler, der nach den Principien der früheren Abhandlung

$$= \sqrt{l^2m^2 + l'^2m'^2 + l''^2m''^2 + \text{etc.}}$$

wird, wenn m, m', m'' etc. die mittleren Fehler der Beobachtungen bezeichnen, oder wenn die einzelnen Beobachtungen mit derselben Unsicherheit behaftet sind,

$$= m\sqrt{l^2 + l'^2 + l''^2 + \text{etc.}}\,.$$

Offenbar darf man bei dieser Rechnung für l, l', l'' etc. mit gleichem Recht auch die Werthe der Differentialquotienten nehmen, welche den beobachteten Werthen der Grössen v, v', v'' etc. entsprechen.

3.

Sind die Grössen v, v', v'' etc. vollständig unabhängig von einander, so kann die Unbekannte nur auf eine einzige Weise durch sie bestimmt werden; es kann deshalb jene Unsicherheit alsdann auf keine Weise weder vermieden noch verringert werden, und bei der Ableitung des Werthes der Unbekannten aus den Beobachtungen ist jede Willkür ausgeschlossen.

Ganz anders verhält es sich aber, wenn zwischen den Grössen v, v', v'' etc. eine gegenseitige Abhängigkeit besteht, welche wir durch σ Bedingungsgleichungen

$$X = 0,\quad Y = 0,\quad Z = 0 \text{ etc.}$$

ausgedrückt annehmen wollen, wo X, Y, Z etc. gegebene Funktionen der Variabeln v, v', v'' etc. bezeichnen. In diesem Falle kann man unsere Unbekannte auf unendlich viele verschiedene Weisen durch Combinationen der Grössen v, v', v'' etc. bestimmen, da man an Stelle der Funktion u offenbar irgend eine andere U annehmen kann, welche so beschaffen ist, dass $U - u$ identisch verschwindet, wenn man $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc. setzt.

Bei der Anwendung auf einen bestimmten Fall würde sich so zwar kein Unterschied in Bezug auf den Werth der Unbekannten ergeben, wenn die Beobachtungen völlig genau wären; insofern diese aber Fehlern unterworfen sind, würde offenbar im allgemeinen jede einzelne Combination einen anderen Werth der Unbekannten hervorbringen. So erhalten wir an Stelle des Fehlers

$$le + l'e' + l''e'' + \text{etc.},$$

welcher der Funktion u zugehört hatte, für die Funktion U den Fehler

$$Le + L'e' + L''e'' + \text{etc.},$$

wo die Werthe der Differentialquotienten $\frac{dU}{dv}$, $\frac{dU}{dv'}$, $\frac{dU}{dv''}$ etc. bezw. mit L, L', L'' etc. bezeichnet sind. Obwohl wir nun die Fehler selbst nicht angeben können, so werden sich doch die mittleren bei den verschiedenen Combinationen der Beobachtungen zu befürchtenden Fehler mit einander vergleichen lassen; und die beste Combination wird die sein, bei der dieser mittlere Fehler so klein als möglich wird. Da dieser

$$= \sqrt{L^2m^2 + L'^2m'^2 + L''^2m''^2 + \text{etc.}}$$

ist, so wird man darauf hinwirken müssen, dass die Summe $L^2m^2 + L'^2m'^2 + L''^2m''^2 +$ etc. den kleinsten Werth erhält.

4.

Da die unendliche Mannigfaltigkeit von Funktionen U, welche unter der im vorigen Art. angegebenen Bedingung an die Stelle von u treten können, hier nur insofern zu betrachten ist, als sich hieraus verschiedene Werthsysteme der Coefficienten L, L', L'' etc. ergeben, so muss man vor allem den Zusammenhang aufsuchen, welcher zwischen sämmtlichen zulässigen Systemen statthaben muss. Bezeichnen wir die bestimmten Werthe der partiellen Differentialquotienten

$$\frac{dX}{dv},\ \frac{dX}{dv'},\ \frac{dX}{dv''}\ \text{etc.}$$
$$\frac{dY}{dv},\ \frac{dY}{dv'},\ \frac{dY}{dv''}\ \text{etc.}$$
$$\frac{dZ}{dv},\ \frac{dZ}{dv'},\ \frac{dZ}{dv''}\ \text{etc. etc.}$$

für den Fall, dass den v, v', v'' etc. ihre wahren Werthe beigelegt werden, bezw. mit

$$a,\ a',\ a''\ \text{etc.}$$
$$b,\ b',\ b''\ \text{etc.}$$
$$c,\ c',\ c''\ \text{etc. etc.},$$

so folgt, wenn man die v, v', v'' etc. solche Zuwachse dv, dv', dv'' etc. annehmen lässt, durch welche X, Y, Z etc. nicht geändert werden und deshalb einzeln $= 0$ bleiben, d. h. welche den Gleichungen

$$0 = adv + a'dv' + a''dv'' + \text{etc.}$$
$$0 = bdv + b'dv' + b''dv'' + \text{etc.}$$
$$0 = cdv + c'dv' + c''dv'' + \text{etc. etc.}$$

genügen, dass sich auch $u - \mathrm{U}$ nicht ändern darf, und daher auch

$$0 = (l - \mathrm{L})\,dv + (l' - \mathrm{L}')\,dv' + (l'' - \mathrm{L}'')\,dv'' + \text{etc.}$$

werden wird. Hieraus schliesst man leicht, dass die Coefficienten L, L′, L″ etc. in folgenden Formeln

$$\mathrm{L} = l + ax + by + cz + \text{etc.}$$
$$\mathrm{L}' = l' + a'x + b'y + c'z + \text{etc.}$$
$$\mathrm{L}'' = l'' + a''x + b''y + c''z + \text{etc. etc.}$$

enthalten sein müssen, wo x, y, z etc. bestimmte Multiplicatoren bezeichnen. Umgekehrt leuchtet ein, wenn ein System von bestimmten Multiplicatoren x, y, z etc. beliebig angenommen wird, dass man stets eine solche Funktion U angeben kann, welcher den obigen Gleichungen genügende Werthe von L, L′, L″ etc. entsprechen, und welche der Bedingung des vorigen Art. gemäss die Funktion u ersetzen kann; ja dass man dies auf unendlich verschiedene Weisen erreichen kann. Der einfachste Fall wird der sein, dass man $\mathrm{U} = u + x\mathrm{X} + y\mathrm{Y} + z\mathrm{Z} +$ etc. setzt; allgemeiner darf man setzen $\mathrm{U} = u + x\mathrm{X} + y\mathrm{Y} + z\mathrm{Z} +$ etc. $+ u'$, wo u' eine solche Funktion der Variabeln v, v', v'' etc. bezeichnet, welche für $\mathrm{X} = 0$, $\mathrm{Y} = 0$, $\mathrm{Z} = 0$ etc. immer verschwindet, und deren Werth in dem betreffenden bestimmten Fall ein Maximum oder Minimum wird. Aber für unseren Zweck erwächst daraus kein Unterschied.

5.

Es wird nunmehr leicht sein, den Multiplicatoren x, y, z etc. solche Werthe zu geben, dass die Summe

$$\mathrm{L}^2 m^2 + \mathrm{L}'^2 m'^2 + \mathrm{L}''^2 m''^2 + \text{etc.}$$

den kleinsten Werth erhält. Offenbar ist hierzu eine vollkommene Kenntniss der mittleren Fehler m, m', m'' etc. nicht nothwendig, sondern es genügt ihr gegenseitiges Verhältniss. Wir führen deshalb an Stelle derselben die Gewichte der Beobachtungen p, p', p'' etc. ein, d. h. Zahlen, welche den Quadraten m^2, m'^2, m''^2 etc. umgekehrt proportional sind, wobei das Gewicht irgend einer Beobachtung willkürlich gleich der Einheit angenommen wird. Die Grössen

x, y, z etc. müssen daher so bestimmt werden, dass das allgemeine Polynom

$$\frac{(ax+by+cz+\text{etc.}+l)^2}{p}+\frac{(a'x+b'y+c'z+\text{etc.}+l')^2}{p'}$$
$$+\frac{(a''x+b''y+c''z+\text{etc.}+l'')^2}{p''}+\text{etc.}$$

den kleinsten Werth erhält, was für die *bestimmten* Werthe x^0, y^0, z^0 etc. der Fall sein möge.

Führen wir die Bezeichnungen ein:

$$\frac{a^2}{p}+\frac{a'^2}{p'}+\frac{a''^2}{p''}+\text{etc.}=[aa]$$
$$\frac{ab}{p}+\frac{a'b'}{p'}+\frac{a''b''}{p''}+\text{etc.}=[ab]$$
$$\frac{ac}{p}+\frac{a'c'}{p'}+\frac{a''c''}{p''}+\text{etc.}=[ac]$$
$$\frac{b^2}{p}+\frac{b'^2}{p'}+\frac{b''^2}{p''}+\text{etc.}=[bb]$$
$$\frac{bc}{p}+\frac{b'c'}{p'}+\frac{b''c''}{p''}+\text{etc.}=[bc]$$
$$\frac{c^2}{p}+\frac{c'^2}{p'}+\frac{c''^2}{p''}+\text{etc.}=[cc]$$

etc., und ferner

$$\frac{al}{p}+\frac{a'l'}{p'}+\frac{a''l''}{p''}+\text{etc.}=[al]$$
$$\frac{bl}{p}+\frac{b'l'}{p'}+\frac{b''l''}{p''}+\text{etc.}=[bl]$$
$$\frac{cl}{p}+\frac{c'l'}{p'}+\frac{c''l''}{p''}+\text{etc.}=[cl]$$

etc.,

so erfordert die Bedingung eines Minimum offenbar, dass wird

$$\left.\begin{aligned}0&=[aa]\,x^0+[ab]\,y^0+[ac]\,z^0+\text{etc.}+[al]\\0&=[ab]\,x^0+[bb]\,y^0+[bc]\,z^0+\text{etc.}+[bl]\\0&=[ac]\,x^0+[bc]\,y^0+[cc]\,z^0+\text{etc.}+[cl]\\&\text{etc.}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Sind die Grössen x^0, y^0, z^0 etc. durch Elimination hieraus abgeleitet, so setze man

$$\left.\begin{array}{l} a x^0 + b\, y^0 + c\, z^0 + \text{etc.} + l \;= \mathrm{L} \\ a' x^0 + b' y^0 + c' z^0 + \text{etc.} + l' = \mathrm{L}' \\ a'' x^0 + b'' y^0 + c'' z^0 + \text{etc.} + l'' = \mathrm{L}'' \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \quad (2)$$

Alsdann wird die zur Bestimmung unserer Unbekannten zweckmässigste und der geringsten Unsicherheit unterworfene Funktion der Grössen v, v', v'' etc. die sein, deren partielle Differentialquotienten in dem betreffenden bestimmten Fall bezw. die Werthe L, L′, L″ etc. haben, und das Gewicht dieser Bestimmung, welches wir mit P bezeichnen wollen, wird

$$= \frac{1}{\frac{\mathrm{L}^2}{p} + \frac{\mathrm{L}'^2}{p'} + \frac{\mathrm{L}''^2}{p''} + \text{etc.}} \quad (3)$$

sein, oder $\frac{1}{\mathrm{P}}$ wird der Werth des oben angeführten Polynoms für dasjenige Werthsystem der Grössen x, y, z etc. sein, welches den Gleichungen (1) Genüge leistet.

6.

Im vorhergehenden Art. lehrten wir diejenige Funktion U kennen, welche zur zweckmässigsten Bestimmung unserer Unbekannten verhilft; nun wollen wir sehen, welchen *Werth* die Unbekannte auf diese Weise erlangt. Es werde dieser Werth mit K bezeichnet, welcher demnach entsteht, wenn man in U die beobachteten Werthe der Grössen v, v', v'' etc. einsetzt; für dieselbe Substitution erhalte die Funktion u den Werth k; endlich sei $\varkappa$ der wahre Werth der Unbekannten, wie er also durch die Substitution der wahren Werthe der Grössen v, v', v'' etc. erhalten werden würde, wenn man eine solche in U oder u ausführen könnte. Hiernach wird mithin

$$k = \varkappa + le + l'e' + l''e'' + \text{etc.}$$
$$\mathrm{K} = \varkappa + \mathrm{L}e + \mathrm{L}'e' + \mathrm{L}''e'' + \text{etc.}$$

und ferner

$$\mathrm{K} = k + (\mathrm{L} - l)\, e + (\mathrm{L}' - l')\, e' + (\mathrm{L}'' - l'')\, e'' + \text{etc.}$$

Setzt man in dieser Gleichung für $\mathrm{L} - l$, $\mathrm{L}' - l'$, $\mathrm{L}'' - l''$ etc. ihre Werthe aus (2), und bezeichnet

$$\left.\begin{array}{l} ae + a'e' + a''e'' + \text{etc.} = \mathfrak{A} \\ be + b'e' + b''e'' + \text{etc.} = \mathfrak{B} \\ ce + c'e' + c''e'' + \text{etc.} = \mathfrak{C} \end{array}\right\} \quad (4)$$

etc., so hat man

$$K = k + \mathfrak{A}x^0 + \mathfrak{B}y^0 + \mathfrak{C}z^0 + \text{etc.} \tag{5}$$

Die Werthe der Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. kann man nun freilich nach den Formeln (4) nicht berechnen, da die Fehler e, e', e'' etc. unbekannt bleiben; aber es ist von selber klar, dass jene nichts anderes sind, als die Werthe der Funktionen X, Y, Z etc., welche sich ergeben, wenn man für v, v', v'' etc. die beobachteten Werthe einsetzt. Sonach bildet das System der Gleichungen (1), (3), (5) die vollständige Lösung unserer Aufgabe, da unsere am Ende des Art. 2. gegebenen Vorschriften über die Berechnung der Grössen l, l', l'' etc. aus den beobachteten Werthen der Grössen v, v', v'' etc. offenbar mit gleichem Rechte auf die Berechnung der Grössen a, a', a'' etc., b, b', b'' etc. ausgedehnt werden dürfen.

7.

An Stelle der Formel (3), welche das Gewicht der plausibelsten Bestimmung ausdrückt, lassen sich noch einige andere finden, welche zu entwickeln die Mühe lohnen wird.

Zunächst bemerken wir, dass durch Multiplication der Gleichungen (2) bezw. mit $\frac{a}{p}$, $\frac{a'}{p'}$, $\frac{a''}{p''}$ etc. und durch Addition erhalten wird

$$[aa]\,x^0 + [ab]\,y^0 + [ac]\,z^0 + \text{etc.} + [al] = \frac{aL}{p} + \frac{a'L'}{p'} + \frac{a''L''}{p''} + \text{etc.}$$

Die linke Seite wird $= 0$, die rechte bezeichnen wir der Analogie gemäss mit $[aL]$, und erhalten so

$$[aL] = 0, \text{ und weiter ebenso } [bL] = 0,\ [cL] = 0 \text{ etc.}$$

Ferner finden wir, wenn wir die Gleichungen (2) der Reihe nach mit $\frac{L}{p}$, $\frac{L'}{p'}$, $\frac{L''}{p''}$ etc. multipliciren und addiren

$$\frac{lL}{p} + \frac{l'L'}{p'} + \frac{l''L''}{p''} + \text{etc.} = \frac{L^2}{p} + \frac{L'^2}{p'} + \frac{L''^2}{p''} + \text{etc.},$$

und erhalten so einen *zweiten* Ausdruck für das Gewicht

$$P = \frac{1}{\frac{lL}{p} + \frac{l'L'}{p'} + \frac{l''L''}{p''} + \text{etc.}}.$$

Multipliciren wir endlich die Gleichungen (2) der Reihe nach mit $\frac{l}{p}$, $\frac{l'}{p'}$, $\frac{l''}{p''}$ etc. und addiren, so gelangen wir zum *dritten* Ausdruck für das Gewicht

$$P = \frac{1}{[al]\,x^0 + [bl]\,y^0 + [cl]\,z^0 + \text{etc.} + [ll]},$$

wenn wir nach Analogie der übrigen Bezeichnungen

$$\frac{l^2}{p} + \frac{l'^2}{p'} + \frac{l''^2}{p''} + \text{etc.} = [ll]$$

setzen. Hiernach gehen wir mit Hülfe der Gleichungen (1) leicht zum *vierten* Ausdruck über, den wir folgendermaassen schreiben:

$$\begin{aligned}\frac{1}{P} = [ll] - [aa]\,x^{0\,2} - [bb]\,y^{0\,2} - [cc]\,z^{0\,2} - \text{etc.}\\ - 2[ab]\,x^0y^0 - 2[ac]\,x^0z^0 - 2[bc]\,y^0z^0 - \text{etc.}\end{aligned}$$

8.

Die allgemeine Lösung, die wir bis jetzt gaben, ist besonders auf den Fall eingerichtet, dass nur *eine* von den beobachteten Grössen abhängige Unbekannte zu bestimmen ist. Wenn aber die plausibelsten Werthe mehrerer von denselben Beobachtungen abhängiger Unbekannten in Frage stehen, oder wenn es noch ungewiss ist, welche Unbekannten man vor allem aus den Beobachtungen ableiten soll, dann verfährt man mit ihnen besser auf eine andere Weise, welche wir nun entwickeln wollen.

Wir betrachten die Grössen x, y, z etc. als Variable und setzen

$$\left.\begin{aligned}[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + \text{etc.} &= \xi\\ [ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + \text{etc.} &= \eta\\ [ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + \text{etc.} &= \zeta\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

etc., und nehmen an, durch Elimination folge hieraus

$$\left.\begin{aligned}[\alpha\alpha]\,\xi + [\alpha\beta]\,\eta + [\alpha\gamma]\,\zeta + \text{etc.} &= x\\ [\beta\alpha]\,\xi + [\beta\beta]\,\eta + [\beta\gamma]\,\zeta + \text{etc.} &= y\\ [\gamma\alpha]\,\xi + [\gamma\beta]\,\eta + [\gamma\gamma]\,\zeta + \text{etc.} &= z\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

etc.

Vor allem ist hier zu bemerken, dass die symmetrisch stehenden Coefficienten nothwendig einander gleich sind, also

$$\begin{aligned}
[\beta\alpha] &= [\alpha\beta] \\
[\gamma\alpha] &= [\alpha\gamma] \\
[\gamma\beta] &= [\beta\gamma] \\
&\text{etc.,}
\end{aligned}$$

was sich zwar schon aus der allgemeinen Theorie der Elimination aus linearen Gleichungen von selber ergiebt, ausserdem aber später auch noch einmal direkt von uns bewiesen werden soll.

Wir erhalten also

$$\left.\begin{aligned}
x^0 &= -[\alpha\alpha][al] - [\alpha\beta][bl] - [\alpha\gamma][cl] - \text{etc.} \\
y^0 &= -[\alpha\beta][al] - [\beta\beta][bl] - [\beta\gamma][cl] - \text{etc.} \\
z^0 &= -[\alpha\gamma][al] - [\beta\gamma][bl] - [\gamma\gamma][cl] - \text{etc.}
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$
etc.

und hieraus, wenn wir

$$\left.\begin{aligned}
[\alpha\alpha]\mathfrak{A} + [\alpha\beta]\mathfrak{B} + [\alpha\gamma]\mathfrak{C} + \text{etc.} &= \mathrm{A} \\
[\alpha\beta]\mathfrak{A} + [\beta\beta]\mathfrak{B} + [\beta\gamma]\mathfrak{C} + \text{etc.} &= \mathrm{B} \\
[\alpha\gamma]\mathfrak{A} + [\beta\gamma]\mathfrak{B} + [\gamma\gamma]\mathfrak{C} + \text{etc.} &= \mathrm{C}
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

etc. setzen,

$$\mathrm{K} = k - \mathrm{A}[al] - \mathrm{B}[bl] - \mathrm{C}[cl] - \text{etc.}$$

oder, wenn wir ausserdem

$$\left.\begin{aligned}
a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C} + \text{etc.} &= p\,\varepsilon \\
a'\mathrm{A} + b'\mathrm{B} + c'\mathrm{C} + \text{etc.} &= p'\varepsilon' \\
a''\mathrm{A} + b''\mathrm{B} + c''\mathrm{C} + \text{etc.} &= p''\varepsilon''
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

etc. setzen,

$$\mathrm{K} = k - l\varepsilon - l'\varepsilon' - l''\varepsilon'' - \text{etc.} \tag{11}$$

9.

Eine Vergleichung der Gleichungen (7) und (9) lehrt, dass die Hülfsgrössen A, B, C etc. diejenigen Werthe der Variabeln x, y, z etc. sind, welche den Werthen $\xi = \mathfrak{A}$, $\eta = \mathfrak{B}$, $\zeta = \mathfrak{C}$ etc. der Variabeln ξ, η, ζ etc. entsprechen; woraus folgt, dass man

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\mathrm{A} + [ab]\mathrm{B} + [ac]\mathrm{C} + \text{etc.} &= \mathfrak{A} \\
[ab]\mathrm{A} + [ab]\mathrm{B} + [bc]\mathrm{C} + \text{etc.} &= \mathfrak{B} \\
[ac]\mathrm{A} + [ab]\mathrm{B} + [cc]\mathrm{C} + \text{etc.} &= \mathfrak{C}
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

etc. erhält. Multiplicirt man also die Gleichungen (10) bezw. mit $\frac{a}{p}$, $\frac{a'}{p'}$, $\frac{a''}{p''}$ etc. und addirt, so erhält man

und analog weiter
$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= a\varepsilon + a'\varepsilon' + a''\varepsilon'' + \text{etc.} \\ \mathfrak{B} &= b\varepsilon + b'\varepsilon' + b''\varepsilon'' + \text{etc.} \\ \mathfrak{C} &= c\varepsilon + c'\varepsilon' + c''\varepsilon'' + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

etc. Da nun $\mathfrak{A}$ der Werth der Funktion X ist, falls man für v, v', v'' etc. die beobachteten Werthe einsetzt, so sieht man leicht, dass, wenn man an diese bezw. die Verbesserungen $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. anbringt, die Funktion X alsdann den Werth 0 erhalte, und dass die Funktionen Y, Z etc. alsdann ebenfalls zum Verschwinden gebracht werden. Auf dieselbe Weise schliesst man aus der Gleichung (11), dass K der Werth der Funktion u ist, welcher sich durch die nämliche Substitution ergiebt.

Das Anbringen der Verbesserungen $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. an die Beobachtungen werden wir *die Ausgleichung der Beobachtungen* nennen, und offenbar werden wir zu dem folgenden sehr wichtigen Schluss geführt, dass die auf die vorgetragene Weise ausgeglichenen Beobachtungen alle Bedingungsgleichungen genau erfüllen, und dass jede von den Beobachtungen irgendwie abhängige Grösse gerade den Werth erhält, welcher aus der zweckmässigsten Combination der ungeänderten Beobachtungen hervorgehen würde. Wenn es also auch unmöglich ist, die Fehler e, e', e'' etc. selbst aus den Bedingungsgleichungen zu bestimmen, da ja deren Anzahl nicht ausreicht, so haben wir wenigstens *plausibelste Fehler* erlangt, welchen Namen wir den Grössen ε, ε', ε'' etc. geben dürfen.

10.

Da wir die Anzahl der Beobachtungen grösser, als die Anzahl der Bedingungsgleichungen annehmen, so lassen sich ausser dem System der plausibelsten Verbesserungen $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. unendlich viele andere finden, welche die Bedingungsgleichungen befriedigen, und es ist der Mühe werth, zu untersuchen, wie diese sich zu jenen verhalten. Es sei also $-\mathrm{E}$, $-\mathrm{E}'$, $-\mathrm{E}''$ etc. ein solches, von dem plausibelsten verschiedenes System, so haben wir

$$\begin{aligned} a\mathrm{E} + a'\mathrm{E}' + a''\mathrm{E}'' + \text{etc.} &= \mathfrak{A} \\ b\mathrm{E} + b'\mathrm{E}' + b''\mathrm{E}'' + \text{etc.} &= \mathfrak{B} \\ c\mathrm{E} + c'\mathrm{E}' + c''\mathrm{E}'' + \text{etc.} &= \mathfrak{C} \end{aligned}$$

etc. Multiplicirt man diese Gleichungen bezw. mit A, B, C etc., und addirt, so erhält man mit Hülfe der Gleichungen (10)

$$p\varepsilon\mathrm{E} + p'\varepsilon'\mathrm{E}' + p''\varepsilon''\mathrm{E}'' + \text{etc.} = \mathrm{A}\mathfrak{A} + \mathrm{B}\mathfrak{B} + \mathrm{C}\mathfrak{C} + \text{etc.}$$

Auf ganz ähnliche Weise liefern aber die Gleichungen (13)

$$p\varepsilon^2 + p'\varepsilon'^2 + p''\varepsilon''^2 + \text{etc.} = \mathrm{A}\mathfrak{A} + \mathrm{B}\mathfrak{B} + \mathrm{C}\mathfrak{C} + \text{etc.} \qquad (14)$$

Durch Combination dieser beiden Gleichungen leitet man leicht ab

$$\begin{aligned} & p\mathrm{E}^2 + p'\mathrm{E}'^2 + p''\mathrm{E}''^2 + \text{etc.} \\ = {} & p\varepsilon^2 + p'\varepsilon'^2 + p''\varepsilon''^2 + \text{etc.} + p(\mathrm{E}-\varepsilon)^2 + p'(\mathrm{E}'-\varepsilon')^2 \\ & + p''(\mathrm{E}''-\varepsilon'')^2 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Die Summe $p\mathrm{E}^2 + p'\mathrm{E}'^2 + p''\mathrm{E}''^2 + \text{etc.}$ wird also nothwendig *grösser* sein als die Summe $p\varepsilon^2 + p'\varepsilon'^2 + p''\varepsilon''^2 + \text{etc.}$, was man ausdrücken kann als

Lehrsatz. Die Summe der mit den beziehentlichen Gewichten der Beobachtungen multiplicirten Quadrate von Verbesserungen, durch welche man die Beobachtungen mit den Bedingungsgleichungen in Uebereinstimmung zu bringen vermag, wird ein Minimum, wenn man die plausibelsten Verbesserungen anwendet.

Dies ist eben das Princip der kleinsten Quadrate, aus welchem auch die Gleichungen (12) und (10) leicht unmittelbar hätten abgeleitet werden können. Uebrigens liefert uns die Gleichung (14) für diese kleinste Summe, welche wir im Folgenden mit S bezeichnen werden, den Ausdruck $\mathfrak{A}\mathrm{A} + \mathfrak{B}\mathrm{B} + \mathfrak{C}\mathrm{C} + \text{etc.}$

11.

Die Bestimmung der plausibelsten Fehler giebt, da sie von den Coefficienten l, l', l'' etc. unabhängig ist, offenbar die bequemste Vorbereitung zu jedwedem Gebrauch, für den man die Beobachtungen verwenden will. Ausserdem ist es klar, dass man zu diesem Geschäft der *unbestimmten* Elimination oder der Kenntniss der Coefficienten $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ etc. nicht bedarf, und dass man nur die Hülfsgrössen A, B, C etc., welche wir im Folgenden die *Correlaten* der Bedingungsgleichungen $\mathrm{X} = 0$, $\mathrm{Y} = 0$, $\mathrm{Z} = 0$ etc. nennen werden, aus den Gleichungen (12) durch bestimmte Elimination abzuleiten und in die Formeln (10) einzusetzen hat.

Obwohl nun diese Methode thatsächlich nichts zu wünschen übrig lässt, wenn allein die plausibelsten Werthe der von den Beobachtungen abhängigen Grössen verlangt werden, so scheint es sich doch anders zu verhalten, wenn ausserdem das Gewicht irgend einer Bestimmung gewünscht wird, da hierzu, mag man nun diesen oder jenen der oben gegebenen vier Ausdrücke benutzen, die Kenntniss der Grössen L, L′, L″ etc., oder doch wenigstens die Kenntniss von x^0, y^0, z^0 etc. nothwendig erscheint. Aus diesem Grunde wird es nützlich sein, das Eliminationsverfahren genauer zu untersuchen, wodurch sich uns auch ein leichterer Weg zur Auffindung der Gewichte erschliessen wird.

12.

Der Zusammenhang der in dieser Untersuchung vorkommenden Grössen wird wesentlich durch die Einführung der allgemeinen Funktion zweiten Grades

$$[aa]x^2 + 2[ab]xy + 2[ac]xz + \text{etc.}$$
$$+ [bb]y^2 + 2[bc]yz + \text{etc.} + [cc]z^2 + \text{etc.},$$

welche wir mit T bezeichnen wollen, aufgehellt. Zunächst ist diese Funktion offenbar sofort gleich

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(ax + by + cz + \text{etc.})^2}{p} + \frac{(a'x + b'y + c'z + \text{etc.})^2}{p'} \\ &+ \frac{(a''x + b''y + c''z + \text{etc.})^2}{p''} + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Ferner ist offenbar

$$\mathrm{T} = x\xi + y\eta + z\zeta + \text{etc.} \tag{16}$$

und, wenn hier wiederum x, y, z etc. mit Hülfe der Gleichungen (7) durch ξ, η, ζ etc. ausgedrückt werden,

$$\mathrm{T} = [\alpha\alpha]\xi^2 + 2[\alpha\beta]\xi\eta + 2[\alpha\gamma]\xi\zeta + \text{etc.}$$
$$+ [\beta\beta]\eta^2 + 2[\beta\gamma]\eta\zeta + \text{etc.} + [\gamma\gamma]\zeta^2 + \text{etc.}$$

Die oben entwickelte Theorie enthält je zwei Systeme von bestimmten Werthen der Grössen x, y, z etc. und ξ, η, ζ etc.: dem ersten, in welchem $x = x^0$, $y = y^0$, $z = z^0$ etc. und $\xi = -[al]$, $\eta = -[bl]$, $\zeta = -[cl]$ etc. ist, entspricht der folgende Werth des T

$$\mathrm{T} = [ll] - \frac{1}{\mathrm{P}},$$

was entweder durch Vergleichung des dritten Ausdrucks für das Gewicht P mit der Gleichung (16) oder unmittelbar aus dem vierten Ausdrucke erhellt; dem zweiten, in welchem $x = \mathrm{A}$, $y = \mathrm{B}$, $z = \mathrm{C}$ etc. und $\xi = \mathfrak{A}$, $\eta = \mathfrak{B}$, $\zeta = \mathfrak{C}$ etc. ist, entspricht der Werth $\mathrm{T} = \mathrm{S}$, wie sowohl aus den Formeln (10) und (15), als aus (14) und (16) klar ist.

13.

Unsere Hauptarbeit besteht nunmehr in einer ähnlichen Transformation der Funktion T, wie die, welche wir in der „Theorie der Bewegung der Himmelskörper", Art. 182., und weitläufiger in der „Untersuchung über die elliptischen Elemente der Pallas" vorgetragen haben. Wir setzen nämlich

$$\left.\begin{aligned}
[bb, 1] &= [bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]} \\
[bc, 1] &= [bc] - \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]} \\
[bd, 1] &= [bd] - \frac{[ab]\,[ad]}{[aa]} \\
&\text{etc.} \\
[cc, 2] &= [cc] - \frac{[ac]^2}{[aa]} - \frac{[bc, 1]^2}{[bb, 1]} \\
[cd, 2] &= [cd] - \frac{[ac]\,[ad]}{[aa]} - \frac{[bc, 1]\,[bd, 1]}{[bb, 1]} \\
&\text{etc.} \\
[dd, 3] &= [dd] - \frac{[ad]^2}{[aa]} - \frac{[bd, 1]^2}{[bb, 1]} - \frac{[cd, 2]^2}{[cc, 2]}
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

etc. etc. Setzt man alsdann*)

$$\begin{aligned}
[bb, 1]\,y + [bc, 1]\,z + [bd, 1]\,w + \text{etc.} &= \eta' \\
[cc, 2]\,z + [cd, 2]\,w + \text{etc.} &= \zeta'' \\
[dd, 3]\,w + \text{etc.} &= \varphi'''
\end{aligned}$$

etc., dann wird

$$T = \frac{\xi^2}{[aa]} + \frac{\eta'^2}{[bb, 1]} + \frac{\zeta''^2}{[cc, 2]} + \frac{\varphi'''^2}{[dd, 3]} + \text{etc.},$$

und die Abhängigkeit der Grössen η', ζ'', φ''' etc. von ξ, η, ζ, φ etc. wird durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

---

*) Im Vorhergehenden konnten je drei, auf die drei ersten Bedingungsgleichungen bezügliche Buchstaben für die verschiedenen Grössensysteme genügen; hier schien es aber gut, um das Gesetz des Algorithmus deutlicher zu zeigen, einen vierten hinzuzufügen; während nun in der natürlichen Ordnung auf die Buchstaben a, b, c; A, B, C; 𝔄, 𝔅, ℭ von selbst d, D, 𝔇 folgt, fügten wir der Reihe x, y, z, da das Alphabet versagte, das w und den ξ, η, ζ das φ an.

$$\eta' = \eta - \frac{[ab]}{[aa]}\xi$$

$$\zeta'' = \zeta - \frac{[ac]}{[aa]}\xi - \frac{[bc,1]}{[bb,1]}\eta'$$

$$\varphi''' = \varphi - \frac{[ad]}{[aa]}\xi - \frac{[bd,1]}{[bb,1]}\eta' - \frac{[cd,2]}{[cc,2]}\zeta''$$

etc.

Hieraus werden nun alle für unseren Zweck nothwendigen Formeln leicht entnommen. Zur Bestimmung der Correlaten A, B, C etc. setzen wir nämlich

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B}' &= \mathfrak{B} - \frac{[ab]}{[aa]}\mathfrak{A} \\ \mathfrak{C}'' &= \mathfrak{C} - \frac{[ac]}{[aa]}\mathfrak{A} - \frac{[bc,1]}{[bb,1]}\mathfrak{B}' \\ \mathfrak{D}''' &= \mathfrak{D} - \frac{[ad]}{[aa]}\mathfrak{A} - \frac{[bd,1]}{[bb,1]}\mathfrak{B}' - \frac{[cd,2]}{[cc,2]}\mathfrak{C}'' \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

etc., und hiernach werden A, B, C, D etc. durch folgende Formeln, und zwar in umgekehrter Reihenfolge, indem man mit der letzten beginnt, erhalten:

$$\left.\begin{aligned} [aa]\,\mathrm{A} + [ab]\,\mathrm{B} + [ac]\,\mathrm{C} + [ad]\,\mathrm{D} + \text{etc.} &= \mathfrak{A} \\ [bb,1]\,\mathrm{B} + [bc,1]\,\mathrm{C} + [bd,1]\,\mathrm{D} + \text{etc.} &= \mathfrak{B}' \\ [cc,2]\,\mathrm{C} + [cd,2]\,\mathrm{D} + \text{etc.} &= \mathfrak{C}'' \\ [dd,3]\,\mathrm{D} + \text{etc.} &= \mathfrak{D}''' \\ \text{etc.} & \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Für die Summe S aber erhalten wir die neue Formel

$$\mathrm{S} = \frac{\mathfrak{A}^2}{[aa]} + \frac{\mathfrak{B}'^2}{[bb,1]} + \frac{\mathfrak{C}''^2}{[cc,2]} + \frac{\mathfrak{D}'''^2}{[dd,3]} + \text{etc.} \tag{20}$$

Wenn schliesslich das Gewicht P verlangt wird, welches der plausibelsten Bestimmung der durch die Funktion u ausgedrückten Grösse zu geben ist, so machen wir

$$\left.\begin{aligned} [bl,1] &= [bl] - \frac{[ab]\,[al]}{[aa]} \\ [cl,2] &= [cl] - \frac{[ac]\,[al]}{[aa]} - \frac{[bc,1]\,[bl,1]}{[bb,1]} \\ [dl,3] &= [dl] - \frac{[ad]\,[al]}{[aa]} - \frac{[bd,1]\,[bl,1]}{[bb,1]} - \frac{[cd,2]\,[cl,2]}{[cc,2]} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

etc., und erhalten alsdann

$$\frac{1}{P} = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl, 1]^2}{[bb, 1]} - \frac{[cl, 2]^2}{[cc, 2]} - \frac{[dl, 3]^2}{[dd, 3]} - \text{etc.} \quad (22)$$

Die Formeln (17) bis (22), deren Einfachheit nichts zu wünschen übrig zu lassen scheint, enthalten die in jeder Beziehung vollständige Lösung unserer Aufgabe.

14.

Nachdem wir die Hauptaufgaben gelöst haben, wollen wir noch einige Nebenfragen behandeln, welche auf diesen Gegenstand ein helleres Licht werfen werden.

Zunächst muss man untersuchen, ob die Elimination, vermittelst deren x, y, z etc. aus ξ, η, ζ etc. abzuleiten sind, jemals unmöglich werden kann. Dies würde offenbar eintreten, wenn die Funktionen ξ, η, ζ etc. nicht von einander unabhängig wären. Nehmen wir daher für den Augenblick an, eine von ihnen werde durch die übrigen bereits bestimmt, so dass die identische Gleichung stattfinde

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \text{etc.} = 0,$$

wo α, β, γ etc. bestimmte Zahlen bezeichnen. Es wird demnach

$$\begin{aligned}
\alpha[aa] + \beta[ab] + \gamma[ac] + \text{etc.} &= 0\\
\alpha[ab] + \beta[bb] + \gamma[bc] + \text{etc.} &= 0\\
\alpha[ac] + \beta[bc] + \gamma[cc] + \text{etc.} &= 0
\end{aligned}$$

etc.; setzen wir nun

$$\begin{aligned}
\alpha a + \beta b + \gamma c + \text{etc.} &= p\Theta\\
\alpha a' + \beta b' + \gamma c' + \text{etc.} &= p'\Theta'\\
\alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' + \text{etc.} &= p''\Theta''
\end{aligned}$$

etc., so folgt hieraus von selbst

$$\begin{aligned}
a\Theta + a'\Theta' + a''\Theta'' + \text{etc.} &= 0\\
b\Theta + b'\Theta' + b''\Theta'' + \text{etc.} &= 0\\
c\Theta + c'\Theta' + c''\Theta'' + \text{etc.} &= 0
\end{aligned}$$

etc., und ferner

$$p\Theta^2 + p'\Theta'^2 + p''\Theta''^2 + \text{etc.} = 0,$$

eine Gleichung, welche, da alle p, p', p'' etc. ihrer Natur nach positive Grössen sind, offenbar nicht bestehen kann, wenn nicht $\Theta = 0$, $\Theta' = 0$, $\Theta'' = 0$ etc. gewesen ist.

Nun betrachten wir die Werthe der vollständigen Differentiale

dX, dY, dZ etc., welche denjenigen Werthen der Grössen v, v', v'' etc. entsprechen, auf welche sich die Beobachtungen beziehen. Diese Differentiale, nämlich

$$a\,dv + a'\,dv' + a''\,dv'' + \text{etc.}$$
$$b\,dv + b'\,dv' + b''\,dv'' + \text{etc.}$$
$$c\,dv + c'\,dv' + c''\,dv'' + \text{etc.}$$

etc., werden dem Schlusse zufolge, zu dem wir eben geführt worden sind, so von einander abhängen, dass ihre Summe nach der beziehentlichen Multiplication mit α, β, γ etc. identisch verschwinden muss, oder, was dasselbe ist, dass jedes einzelne von ihnen (wenigstens wenn der ihm entsprechende Faktor α, β, γ etc. nicht verschwindet) von selbst verschwinden muss, sobald wie alle übrigen als verschwindend vorausgesetzt werden. Deshalb muss (mindestens) eine von den Bedingungsgleichungen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc. überflüssig sein, da sie von selbst erfüllt wird, sobald den übrigen genügt ist.

Wird übrigens die Sache genauer untersucht, so ist klar, dass dieser Schluss an und für sich nur für einen unendlich kleinen Spielraum der Veränderlichkeit der Variabeln gilt. Es sind nämlich eigentlich zwei Fälle zu unterscheiden: erstens, wo eine der Bedingungsgleichungen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc. unbedingt und allgemein bereits in den übrigen enthalten ist, was man in jedem einzelnen Fall leicht wird vermeiden können; zweitens, wo so zu sagen zufällig für die bestimmten Werthe der Grössen v, v', v'' etc., auf welche sich die Beobachtungen beziehen, eine der Funktionen X, Y, Z etc., z. B. die erste X, einen grössten oder kleinsten (oder allgemeiner einen stationären) Werth erlangt in Hinblick auf alle Aenderungen, welche wir den Grössen v, v', v'' etc. geben können, ohne die Gleichungen $Y = 0$, $Z = 0$ etc. zu stören. Da aber in unserer Untersuchung die Veränderlichkeit der Grössen nur in so engen Grenzen betrachtet werden soll, dass sie als unendlich klein behandelt werden kann, so hat dieser zweite Fall (der in der Praxis kaum je vorkommt) dieselbe Wirkung wie der erste, nämlich dass eine der Bedingungsgleichungen als überflüssig zu verwerfen sein wird; wir können also sicher sein, wenn alle aufgenommenen Bedingungsgleichungen in dem hier vorausgesetzten Sinne von einander unabhängig sind, dass die Elimination nothwendigerweise möglich sein muss. Eine ausführlichere Untersuchung dieses Gegenstandes, deren er mehr seiner theoretischen Feinheit als seiner praktischen Nützlichkeit wegen würdig ist, müssen wir uns indessen für eine andere Gelegenheit vorbehalten.

15.

In den Art. 37. u. ff. der früheren Abhandlung haben wir eine Methode gelehrt, wie man die Genauigkeit der Beobachtungen a posteriori so scharf wie möglich bestimmen kann. Wenn nämlich die angenäherten Werthe von π Grössen durch Beobachtungen von gleicher Genauigkeit gefunden worden sind und mit denjenigen Werthen verglichen werden, welche durch Rechnung aus den plausibelsten Werthen der ϱ Elemente hervorgehen, von denen jene abhängen, so muss man die Quadrate der Differenzen addiren, und diese Summe durch $\pi - \varrho$ dividiren, wonach der Quotient als angenäherter Werth des Quadrates des einer derartigen Beobachtungsgruppe anhaftenden mittleren Fehlers betrachtet werden kann. Sind die Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit, so sind diese Vorschriften nur insofern abzuändern, als vor der Addition die Quadrate mit den Gewichten der Beobachtungen zu multipliciren sind, worauf der sich so ergebende mittlere Fehler für Beobachtungen gilt, deren Gewicht als Einheit angenommen worden ist.

In der vorliegenden Untersuchung stimmt nun jene Summe offenbar mit der Summe S, und die Differenz $\pi - \varrho$ mit der Anzahl σ der Bedingungsgleichungen überein, weshalb wir für den mittleren Fehler der Beobachtungen vom Gewichte $= 1$ den Ausdruck $\sqrt{\frac{S}{\sigma}}$ erhalten, eine Bestimmung, welche um so grösseres Vertrauen verdient, je grösser die Anzahl σ gewesen ist.

Es wird aber die Mühe lohnen, dies auch unabhängig von der früheren Untersuchung festzustellen. Hierzu empfiehlt es sich, einige neue Bezeichnungen einzuführen. Es mögen nämlich den nachstehenden Werthen der Variabeln ξ, η, ζ etc.

$$\xi = a, \quad \eta = b, \quad \zeta = c \text{ etc.}$$

folgende Werthe der x, y, z etc. entsprechen

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma \text{ etc.},$$

so dass man erhält

$$\begin{aligned}
\alpha &= a[\alpha\alpha] + b[\alpha\beta] + c[\alpha\gamma] + \text{etc.} \\
\beta &= a[\alpha\beta] + b[\beta\beta] + c[\beta\gamma] + \text{etc.} \\
\gamma &= a[\alpha\gamma] + b[\beta\gamma] + c[\gamma\gamma] + \text{etc.}
\end{aligned}$$

etc. Ebenso mögen den Werthen

$$\xi = a', \quad \eta = b', \quad \zeta = c' \text{ etc.}$$

die folgenden

$$x = \alpha', \quad y = \beta', \quad z = \gamma' \text{ etc.}$$

entsprechen, und den

$$\xi = a'', \quad \eta = b'', \quad \zeta = c'' \text{ etc.}$$

ebenso

$$x = \alpha'', \quad y = \beta'', \quad z = \gamma'' \text{ etc.}$$

und so weiter.

Unter dieser Voraussetzung erhält man durch Combination der Gleichungen (4) und (9)

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'' + \text{etc.} \\
\mathrm{B} &= \beta e + \beta' e' + \beta'' e'' + \text{etc.} \\
\mathrm{C} &= \gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e'' + \text{etc.}
\end{aligned}$$

etc. Da nun $\mathrm{S} = \mathfrak{A}\mathrm{A} + \mathfrak{B}\mathrm{B} + \mathfrak{C}\mathrm{C} + \text{etc.}$ ist, so wird offenbar

$$\begin{aligned}
\mathrm{S} = &\ (ae + a'e' + a''e'' + \text{etc.})(\alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'' + \text{etc.}) \\
+ &\ (be + b'e' + b''e'' + \text{etc.})(\beta e + \beta' e' + \beta'' e'' + \text{etc.}) \\
+ &\ (ce + c'e' + c''e'' + \text{etc.})(\gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e'' + \text{etc.}) + \text{etc.}
\end{aligned}$$

16.

Das Anstellen von Beobachtungen, durch welche wir die mit den zufälligen Fehlern e, e', e'' etc. behafteten Werthe der Grössen v, v', v'' etc. erhalten, können wir als einen Versuch betrachten, welcher zwar nicht die Grösse der einzelnen begangenen Fehler zu zeigen vermag, wohl aber durch Anwendung der früher auseinandergesetzten Vorschriften zu einem Werthe der Grösse S führt, welcher nach der eben gefundenen Formel eine gegebene Funktion jener Fehler ist. Bei einem solchen Versuch können gewiss bald grössere, bald kleinere zufällige Fehler begangen werden; je mehr Fehler aber vorhanden sind, um so grösser wird die Hoffnung sein, dass der Werth der Grösse S bei einem bestimmten Versuch von seinem mittleren Werth wenig abweichen werde. Es wird also hauptsächlich darauf ankommen, den mittleren Werth der Grösse S festzustellen. Nach den in unserer früheren Abhandlung vorgetragenen Principien, welche hier nicht wiederholt zu werden brauchen, finden wir diesen mittleren Werth

$$\begin{aligned}
= &\ (a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})\, m^2 + (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \text{etc.})\, m'^2 \\
&+ (a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' + \text{etc.})\, m''^2 + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Bezeichnet man den mittleren Fehler der Beobachtungen vom Gewichte $= 1$ mit μ, so dass also $\mu^2 = pm^2 = p'm'^2 = p''m''^2$ etc. ist, so kann der eben gefundene Ausdruck auf die Form

$$\left(\frac{a\alpha}{p}+\frac{a'\alpha'}{p'}+\frac{a''\alpha''}{p''}+\text{etc.}\right)\mu^2+\left(\frac{b\beta}{p}+\frac{b'\beta'}{p'}+\frac{b''\beta''}{p''}+\text{etc.}\right)\mu^2$$
$$+\left(\frac{c\gamma}{p}+\frac{c'\gamma'}{p'}+\frac{c''\gamma''}{p''}+\text{etc.}\right)\mu^2+\text{etc.}$$

gebracht werden. Die Summe $\frac{a\alpha}{p}+\frac{a'\alpha'}{p'}+\frac{a''\alpha''}{p''}+\text{etc.}$ wird aber

$$=[aa][\alpha\alpha]+[ab][\alpha\beta]+[ac][\alpha\gamma]+\text{etc.}$$

und deshalb $= 1$ gefunden, wie man aus der Verbindung der Gleichungen (6) und (7) leicht entnehmen kann. Ebenso wird

$$\frac{b\beta}{p}+\frac{b'\beta'}{p'}+\frac{b''\beta''}{p''}+\text{etc.}=1$$
$$\frac{c\gamma}{p}+\frac{c'\gamma'}{p'}+\frac{c''\gamma''}{p''}+\text{etc.}=1$$

u. s. w.

Hiernach wird der mittlere Werth des S schliesslich $=\sigma\mu^2$, und insofern man nun den zufälligen Werth des S als mittleren annehmen darf, wird $\mu=\sqrt{\frac{S}{\sigma}}$ sein.

17.

Ein wie grosses Vertrauen diese Bestimmung verdiene, muss man nach dem mittleren, bei ihr oder ihrem Quadrat zu befürchtenden Fehler entscheiden; der letztere wird die Quadratwurzel aus dem mittleren Werthe des Ausdrucks

$$\left(\frac{S}{\sigma}-\mu^2\right)^2$$

sein, dessen Entwicklung durch ähnliche Berechnungen wie die in den Art. 39. u. ff. der früheren Abhandlung vorgetragenen erlangt wird. Wir unterdrücken dieselben hier der Kürze halber und setzen nur die Formel selbst hierher. Der mittlere bei der Bestimmung des Quadrates μ^2 zu befürchtende Fehler wird nämlich ausgedrückt durch

$$\sqrt{\frac{2\mu^4}{\sigma}+\frac{\nu^4-3\mu^4}{\sigma^2}N},$$

wo ν^4 den mittleren Werth der Biquadrate der Fehler vom Gewichte $= 1$, und N die Summe

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2 + (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \text{etc.})^2$$
$$+ (a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' + \text{etc.})^2 + \text{etc.}$$

bezeichnet. Diese Summe lässt sich im allgemeinen auf keine einfachere Form bringen; auf ähnliche Weise aber wie im Art. 40. der früheren Abhandlung kann man zeigen, dass ihr Werth immer zwischen den Grenzen π und $\frac{\sigma^2}{\pi}$ liegen muss. Bei derjenigen Hypothese, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate ursprünglich begründet worden war, fällt das Glied, welches diese Summe enthält, ganz fort, weil alsdann $\nu^4 = 3\mu^4$ wird, worauf die Genauigkeit, welche dem nach der Formel $\sqrt{\frac{S}{\sigma}}$ bestimmten mittleren Fehler zukommt, dieselbe sein wird, als wenn derselbe aus σ genau bekannten Fehlern nach den Art. 15. und 16. der früheren Abhandlung ermittelt worden wäre.

18.

Zur Ausgleichung der Beobachtungen ist, wie wir oben gesehen haben, zweierlei erforderlich: erstens die Ermittelung der Correlaten der Bedingungsgleichungen, d. h. der Zahlen A, B, C etc., welche den Gleichungen (12) Genüge leisten, zweitens das Einsetzen dieser Zahlen in die Gleichungen (10). Die so erhaltene Ausgleichung kann man eine *vollkommene* oder *vollständige* nennen, um sie von einer *unvollkommenen* oder *unvollständigen* zu unterscheiden; mit diesem Namen werden wir nämlich die Resultate bezeichnen, welche sich zwar aus denselben Gleichungen (10) ergeben, aber unter Zugrundelegung von Werthen der Grössen A, B, C etc., welche den Gleichungen (12) nicht, d. h. nur einigen oder keiner, genügen. Solche Aenderungen der Beobachtungen aber, welche unter den Formeln (10) nicht enthalten sein können, sollen von der gegenwärtigen Untersuchung ausgeschlossen sein und auch den Namen Ausgleichung nicht erhalten. Da, sobald die Gleichungen (10) statt haben, die Gleichungen (13) mit den Gleichungen (12) völlig gleichbedeutend sind, kann man diesen Unterschied auch so fassen: Die vollständig ausgeglichenen Beobachtungen genügen allen Bedingungsgleichungen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc., die unvollständig ausgeglichenen aber entweder keiner oder doch wenigstens nicht allen; die Ausgleichung, durch welche allen Bedingungsgleichungen genügt wird, ist daher nothwendigerweise von selbst vollständig.

19.

Da nun aus dem Begriff einer Ausgleichung schon von selbst folgt, dass die Summe zweier Ausgleichungen wieder eine Ausgleichung ergebe, so sieht man leicht, dass es einerlei ist, ob man die Vorschriften zur Erlangung einer vollkommenen Ausgleichung unmittelbar auf die ursprünglichen Beobachtungen, oder auf bereits unvollständig ausgeglichene Beobachtungen anwendet.

Es mögen in der That $-\Theta$, $-\Theta'$, $-\Theta''$ etc. ein System einer unvollständigen Ausgleichung bilden, welches aus den Formeln

$$\left.\begin{aligned} \Theta p &= \mathrm{A}^0 a + \mathrm{B}^0 b + \mathrm{C}^0 c + \text{etc.} \\ \Theta' p' &= \mathrm{A}^0 a' + \mathrm{B}^0 b' + \mathrm{C}^0 c' + \text{etc.} \\ \Theta'' p'' &= \mathrm{A}^0 a'' + \mathrm{B}^0 b'' + \mathrm{C}^0 c'' + \text{etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

hervorgehe. Da vorausgesetzt wird, dass die durch diese Ausgleichungen geänderten Beobachtungen nicht allen Bedingungsgleichungen genügen, so seien $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{C}^*$ etc. die Werthe, welche X, Y, Z etc. durch Einsetzung jener erlangen. Man suche die Zahlen A*, B*, C* etc., welche den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}^* &= \mathrm{A}^*[aa] + \mathrm{B}^*[ab] + \mathrm{C}^*[ac] + \text{etc.} \\ \mathfrak{B}^* &= \mathrm{A}^*[ab] + \mathrm{B}^*[bb] + \mathrm{C}^*[bc] + \text{etc.} \\ \mathfrak{C}^* &= \mathrm{A}^*[ac] + \mathrm{B}^*[bc] + \mathrm{C}^*[cc] + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

etc. genügen; alsdann wird die vollständige Ausgleichung der auf jene Weise geänderten Beobachtungen durch neue Aenderungen $-\varkappa$, $-\varkappa'$, $-\varkappa''$ etc. bewirkt, wo $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ etc. aus den Formeln

$$\left.\begin{aligned} \varkappa p &= \mathrm{A}^* a + \mathrm{B}^* b + \mathrm{C}^* c + \text{etc.} \\ \varkappa' p' &= \mathrm{A}^* a' + \mathrm{B}^* b' + \mathrm{C}^* c' + \text{etc.} \\ \varkappa'' p'' &= \mathrm{A}^* a'' + \mathrm{B}^* b'' + \mathrm{C}^* c'' + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}$$

etc. zu berechnen sind. Wir wollen nun untersuchen, wie diese Verbesserungen mit der vollständigen Ausgleichung der ursprünglichen Beobachtungen zusammenhängen. Zunächst ist klar, dass man hat

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^* &= \mathfrak{A} - a\Theta - a'\Theta' - a''\Theta'' - \text{etc.} \\ \mathfrak{B}^* &= \mathfrak{B} - b\Theta - b'\Theta' - b''\Theta'' - \text{etc.} \\ \mathfrak{C}^* &= \mathfrak{C} - c\Theta - c'\Theta' - c''\Theta'' - \text{etc.} \end{aligned}$$

etc. Setzen wir in diesen Gleichungen für Θ, Θ', Θ'' etc. die Werthe aus (I) und für $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{C}^*$ etc. die Werthe aus (II), so finden wir

$$\mathfrak{A} = (A^0 + A^*)[aa] + (B^0 + B^*)[ab] + (C^0 + C^*)[ac] + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{B} = (A^0 + A^*)[ab] + (B^0 + B^*)[bb] + (C^0 + C^*)[bc] + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{C} = (A^0 + A^*)[ac] + (B^0 + B^*)[bc] + (C^0 + C^*)[cc] + \text{etc.}$$

etc., woraus folgt, dass die Correlaten, welche die Bedingungsgleichungen (12) erfüllen,

$$A = A^0 + A^*, \quad B = B^0 + B^*, \quad C = C^0 + C^* \text{ etc.}$$

sind. Hiernach zeigen die Gleichungen (10), (I) und (III), dass

$$\varepsilon = \Theta + \varkappa, \quad \varepsilon' = \Theta' + \varkappa', \quad \varepsilon'' = \Theta'' + \varkappa'' \text{ etc.}$$

ist, d. h. die Ausgleichung der Beobachtungen ergiebt sich gleich vollständig sowohl bei unmittelbarer, als auch bei mittelbarer, von einer unvollständigen Ausgleichung ausgehenden Rechnung.

20.

Wenn die Anzahl der Bedingungsgleichungen allzugross ist, kann die Bestimmung der Correlaten A, B, C etc. durch die direkte Elimination so weitschichtig werden, dass ihr die Geduld des Rechners nicht gewachsen ist; alsdann wird es häufig bequem sein können, die vollständige Ausgleichung durch successive Annäherungen mit Hülfe des im vorigen Art. enthaltenen Theorems zu ermitteln. Man theile die Bedingungsgleichungen in zwei oder mehrere Gruppen, und suche zuerst die Ausgleichung, durch welche der ersten Gruppe von Gleichungen, unter Vernachlässigung der übrigen, genügt wird. Darauf behandele man die durch diese Ausgleichung geänderten Beobachtungen so, dass allein den Gleichungen der zweiten Gruppe Rechnung getragen wird. Im allgemeinen wird durch das Anbringen des zweiten Systems von Ausgleichungen das Zusammenstimmen mit den Gleichungen der ersten Gruppe gestört werden; deshalb kehren wir, wenn nur zwei Gruppen gebildet sind, zu den Gleichungen der ersten Gruppe zurück, und bestimmen ein drittes System, welches dieser Genüge leistet; darauf unterwerfen wir die dreimal verbesserten Beobachtungen einer vierten Ausgleichung, wo nur die Gleichungen der zweiten Gruppe berücksichtigt werden. So werden wir, indem wir abwechselnd bald die erste, bald die zweite Gruppe berücksichtigen, fortwährend abnehmende Ausgleichungen erhalten, und war die Gruppentheilung geschickt getroffen, so werden wir nach wenigen Wiederholungen zu festen Zahlen gelangen. Wurden mehr als zwei Gruppen gebildet, so verhält sich die Sache ähnlich; die einzelnen Gruppen kommen nach einander zur Berechnung, nach der letzten wieder die erste

u. s. w. Hier möge indess der Hinweis auf diese Methode genügen, deren Erfolg sicher sehr von einer geschickten Anwendung abhängen wird.

21.

Es erübrigt noch, dass wir den Beweis des im Art. 8. vorausgesetzen Hülfssatzes nachholen, wobei wir indess der Durchsichtigkeit wegen andere hierzu mehr geeignete Bezeichnungen anwenden wollen.

Es seien also x^0, x', x'', x''' etc. Variable; und wir nehmen an, aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
n^{00} x^0 + n^{01} x' + n^{02} x'' + n^{03} x''' + \text{etc.} &= X^0 \\
n^{10} x^0 + n^{11} x' + n^{12} x'' + n^{13} x''' + \text{etc.} &= X' \\
n^{20} x^0 + n^{21} x' + n^{22} x'' + n^{23} x''' + \text{etc.} &= X'' \\
n^{30} x^0 + n^{31} x' + n^{32} x'' + n^{33} x''' + \text{etc.} &= X''' \\
\text{etc.} &
\end{aligned}$$

folge durch Elimination

$$\begin{aligned}
N^{00} X^0 + N^{01} X' + N^{02} X'' + N^{03} X''' + \text{etc.} &= x^0 \\
N^{10} X^0 + N^{11} X' + N^{12} X'' + N^{13} X''' + \text{etc.} &= x' \\
N^{20} X^0 + N^{21} X' + N^{22} X'' + N^{23} X''' + \text{etc.} &= x'' \\
N^{30} X^0 + N^{31} X' + N^{32} X'' + N^{33} X''' + \text{etc.} &= x''' \\
\text{etc.} &
\end{aligned}$$

Setzt man daher in die erste und zweite Gleichung des zweiten Systems die Werthe der Grössen X^0, X', X'', X''' etc. aus dem ersten System ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
x^0 = \;& N^{00} (n^{00} x^0 + n^{01} x' + n^{02} x'' + n^{03} x''' + \text{etc.}) \\
&+ N^{01} (n^{10} x^0 + n^{11} x' + n^{12} x'' + n^{13} x''' + \text{etc.}) \\
&+ N^{02} (n^{20} x^0 + n^{21} x' + n^{22} x'' + n^{23} x''' + \text{etc.}) \\
&+ N^{03} (n^{30} x^0 + n^{31} x' + n^{32} x'' + n^{33} x''' + \text{etc.}) + \text{etc.}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
x' = \;& N^{10} (n^{00} x^0 + n^{01} x' + n^{02} x'' + n^{03} x''' + \text{etc.}) \\
&+ N^{11} (n^{10} x^0 + n^{11} x' + n^{12} x'' + n^{13} x''' + \text{etc.}) \\
&+ N^{12} (n^{20} x^0 + n^{21} x' + n^{22} x'' + n^{23} x''' + \text{etc.}) \\
&+ N^{13} (n^{30} x^0 + n^{31} x' + n^{32} x'' + n^{33} x''' + \text{etc.}) + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Da jede dieser beiden Gleichungen offenbar eine identische Gleichung sein muss, so darf man sowohl in die erste, als in die zweite beliebige bestimmte Werthe für x^0, x', x'', x''' etc. einsetzen. Wir setzen in die erste ein

$$x^0 = N^{10}, \quad x' = N^{11}, \quad x'' = N^{12}, \quad x''' = N^{13} \text{ etc.},$$

in die zweite aber

$$x^0 = N^{00}, \quad x' = N^{01}, \quad x'' = N^{02}, \quad x''' = N^{03} \text{ etc.}$$

Alsdann folgt durch Subtraktion

$$\begin{aligned} N^{10} - N^{01} = \quad & (N^{00} N^{11} - N^{10} N^{01}) (n^{01} - n^{10}) \\ & + (N^{00} N^{12} - N^{10} N^{02}) (n^{02} - n^{20}) \\ & + (N^{00} N^{13} - N^{10} N^{03}) (n^{03} - n^{30}) \\ & + \text{etc.} \\ & + (N^{01} N^{12} - N^{11} N^{02}) (n^{12} - n^{21}) \\ & + (N^{01} N^{13} - N^{11} N^{03}) (n^{13} - n^{31}) \\ & + \text{etc.} \\ & + (N^{02} N^{13} - N^{12} N^{03}) (n^{23} - n^{32}) \\ & + \text{etc. etc.}, \end{aligned}$$

welche Gleichung auch so geschrieben werden kann

$$N^{10} - N^{01} = \Sigma [N^{0\alpha} N^{1\beta} - N^{1\alpha} N^{0\beta}] (n^{\alpha\beta} - n^{\beta\alpha}),$$

wo durch $\alpha\beta$ alle Combinationen von ungleichen Indices bezeichnet werden.

Hieraus folgt, dass, wenn

$$n^{01} = n^{10}, \; n^{02} = n^{20}, \; n^{03} = n^{30}, \; n^{12} = n^{21}, \; n^{13} = n^{31}, \; n^{23} = n^{32} \text{ etc.}$$

oder allgemein

$$n^{\alpha\beta} = n^{\beta\alpha}$$

war, auch

$$N^{10} = N^{01}$$

sein wird. Da nun die Reihenfolge der Variabeln in den gegebenen Gleichungen willkürlich ist, so wird offenbar unter jener Voraussetzung allgemein

$$N^{\alpha\beta} = N^{\beta\alpha}.$$

22.

Da die in dieser Abhandlung dargelegte Methode vorzüglich eine häufige und bequeme Anwendung in den Rechnungen der höheren Geodäsie findet, so hoffen wir, unseren Lesern werde die Erläuterung der Vorschriften an einigen aus dieser entnommenen Beispielen nicht unlieb sein.

Die Bedingungsgleichungen zwischen den Winkeln eines Systems von Dreiecken sind hauptsächlich einer dreifachen Quelle zu entnehmen.

I. Die Summe der Horizontalwinkel, welche bei einem vollständigen Umlauf um denselben Scheitel den Horizont ausfüllen, muss vier Rechten gleich sein.

II. Die Summe der drei Winkel in jedem Dreieck ist einer gegebenen Grösse gleich, da man, wenn das Dreieck auf einer krummen Oberfläche liegt, den Ueberschuss jener Summe über zwei Rechte so scharf berechnen kann, dass er für vollkommen genau gelten darf.

III. Die dritte Quelle entspringt dem Verhältniss der Seiten in Dreiecken, welche eine geschlossene Kette bilden. Ist nämlich eine Reihe von Dreiecken so mit einander verbunden, dass das zweite Dreieck eine Seite a mit dem ersten Dreieck, eine andere b mit dem dritten gemeinsam hat; ebenso habe das vierte Dreieck mit dem dritten die Seite c, mit dem fünften die Seite d gemeinsam; und so weiter bis zum letzten Dreieck, welches mit dem vorhergehenden die Seite k und mit dem ersten wiederum die Seite l gemeinsam habe, dann werden die Werthe der Quotienten

$$\frac{a}{l}, \quad \frac{b}{a}, \quad \frac{c}{b}, \quad \frac{d}{c} \cdots \frac{l}{k}$$

nach bekannten Methoden bezw. aus je zwei, den gemeinschaftlichen Seiten gegenüberliegenden Winkeln auf einander folgender Dreiecke zu erhalten seiu, und da das Produkt jener Brüche $= 1$ sein muss, so ergiebt sich hieraus eine Bedingungsgleichung zwischen den Sinus jener Winkel (welche bezw. um den dritten Theil des sphärischen oder sphäroidischen Excesses vermindert sind, wenn die Dreiecke auf einer krummen Oberfläche liegen).

Uebrigens kommt es in complicirteren Dreiecksnetzen sehr häufig vor, dass Bedingungsgleichungen der zweiten oder dritten Art sich in grösserer Anzahl darbieten, als man beibehalten darf, weil nämlich ein Theil derselben in den übrigen schon enthalten ist. Dagegen wird der Fall seltener eintreten, wo man den Bedingungsgleichungen der zweiten Art ähnliche Gleichungen, die sich auf mehrseitige Figuren beziehen, beifügen muss, nämlich nur dann, wenn Polygone gebildet werden, welche nicht durch Messungen in Dreiecke getheilt sind. Ueber diese Dinge werden wir aber, weil es unserem gegenwärtigen Zweck zu fern liegt, bei einer anderen Gelegenheit des weiteren reden. Indessen können wir die Bemerkung nicht mit Stillschweigen übergehen, dass unsere Theorie, wenn eine reinliche und strenge Anwendung gewünscht wird, voraussetzt, es seien die mit v, v', v'' etc. bezeichneten Grössen wirklich und unmittelbar beobachtet, oder so aus Beobachtungen abgeleitet, dass sie von einander unabhängig bleiben oder wenigstens als von einander unabhängig betrachtet werden können. In der gewöhnlichen Praxis werden die Dreieckswinkel selbst beobachtet und können demnach für v, v', v'' etc. angenommen werden; wir dürfen aber nicht vergessen, falls das System zufällig ausserdem solche Dreiecke enthält, deren Winkel nicht unmittelbar beobachtet sind, sondern sich aus Summen oder Differenzen wirklich beobachteter Winkel ergeben, dass diese nicht unter die Zahl der beobachteten gerechnet, sondern in der Form ihrer Zusammensetzung bei den Rechnungen beibehalten werden müssen. Anders aber wird sich die Sache bei einer Beobachtungsweise verhalten, welche der von *Struve* (Astronomische Nachrichten, II, S. 431) befolgten ähnlich ist, bei der die Richtungen der einzelnen von demselben Scheitel ausgehenden Seiten durch Vergleichung mit einer und derselben willkürlichen Richtung erhalten werden. Dann sind nämlich gerade diese Winkel für v, v', v'' etc. anzunehmen, wodurch sich alle Dreieckswinkel in Form von Differenzen darstellen, während die Bedingungsgleichungen der ersten Art, denen der Natur der Sache nach von selbst genügt wird, als überflüssig fortfallen. Die Beobachtungsweise, welche ich selbst bei der in den letzten Jahren ausgeführten Triangulation angewandt habe, unterscheidet sich zwar sowohl von der ersten, als von der zweiten Methode, kann jedoch in Bezug auf das Resultat der letzteren gleichgeachtet werden, so dass man bei den einzelnen Stationen die von einem gleichsam beliebigen Anfang aus gezählten Richtungen der von ihnen ausgehenden Seiten für die Grössen v, v', v'' etc. annehmen darf. Wir werden nun zwei Beispiele ausarbeiten, von denen das eine der ersten, das andere der zweiten Weise entspricht.

23.

Das erste Beispiel entnehmen wir dem Werke von *de Krayenhoff*, „Précis historique des opérations trigonométriques faites en Hollande“, und zwar unterwerfen wir den Theil des Dreiecksnetzes einer Ausgleichung, welcher zwischen den neun Punkten Harlingen, Sneek, Oldeholtpade, Ballum, Leeuwarden, Dockum, Drachten, Oosterwolde und Gröningen enthalten ist. Es werden zwischen diesen Punkten neun Dreiecke gebildet, welche in jenem Werke mit den Nummern 121, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 131, 132 bezeichnet sind, und deren Winkel (welche wir durch vorgesetzte Indices unterscheiden) nach der Tabelle, S. 77 bis 81, folgendermaassen beobachtet worden sind:

Dreieck 121.

0.	Harlingen	50°	58′	15,238″
1.	Leeuwarden	82	47	15,351
2.	Ballum	46	14	27,202

Dreieck 122.

3.	Harlingen	51	5	39,717
4.	Sneek	70	48	33,445
5.	Leeuwarden	58	5	48,707

Dreieck 123.

6.	Sneek	49	30	40,051
7.	Drachten	42	52	59,382
8.	Leeuwarden	87	36	21,057

Dreieck 124.

9.	Sneek	45	36	7,492
10.	Oldeholtpade	67	52	0,048
11.	Drachten	66	31	56,513

Dreieck 125.

12.	Drachten	53	55	24,745
13.	Oldeholtpade	47	48	52,580
14.	Oosterwolde	78	15	42,347

Dreieck 127.

15.	Leeuwarden	59	24	0,645
16.	Dockum	76	34	9,021
17.	Ballum	44	1	51,040

Dreieck 128.

18.	Leeuwarden	72	6	32,043
19.	Drachten	46	53	27,163
20.	Dockum	61	0	4,494

Dreieck 131.

21.	Dockum	57	1	55,292
22.	Drachten	83	33	14,515
23.	Gröningen	39	24	52,397

Dreieck 132.

24. Oosterwolde	81°	54′	17,447″
25. Gröningen	31	52	46,094
26. Drachten	66	12	57,246 .

Die Betrachtung des Zusammenhangs zwischen diesen Dreiecken zeigt, dass zwischen den 27 Winkeln, deren angenäherte Werthe durch Beobachtung bekannt geworden sind, 13 Bedingungsgleichungen bestehen, und zwar zwei der ersten, neun der zweiten und zwei der dritten Art. Es ist aber unnöthig, diese Gleichungen alle in ihrer geschlossenen Form hinzuschreiben, da für die Rechnungen nur die in der allgemeinen Theorie mit $\mathfrak{A}$, a, a', a'' etc.; $\mathfrak{B}$, b, b', b'' etc.; etc. bezeichneten Grössen verlangt werden; deshalb schreiben wir an deren Stelle sofort die oben mit (13) bezeichneten Gleichungen, welche jene Grössen vor Augen stellen; anstatt der Zeichen ε, ε', ε'' etc. setzen wir hier einfach (0), (1), (2) etc.

Demnach entsprechen den beiden Bedingungsgleichungen erster Art die folgenden:

$$\begin{aligned}
(1) + (5) + (8) + (15) + (18) &= -2{,}197''\\
(7) + (11) + (12) + (19) + (22) + (26) &= -0{,}436\,.
\end{aligned}$$

Die sphäroidischen Excesse der neun Dreiecke finden wir der Reihe nach: 1,749″; 1,147″; 1,243″; 1,698″; 0,873″; 1,167″; 1,104″; 2,161″; 1,403″. Es entsteht daher als erste Bedingungsgleichung der zweiten Art die folgende*): $v^{(0)} + v^{(1)} + v^{(2)} - 180^\circ\, 0'\, 1{,}749'' = 0$, und analog die übrigen. Hieraus erhalten wir die neun folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(0) + (1) + (2) &= -3{,}958''\\
(3) + (4) + (5) &= +0{,}722\\
(6) + (7) + (8) &= -0{,}753\\
(9) + (10) + (11) &= +2{,}355\\
(12) + (13) + (14) &= -1{,}201\\
(15) + (16) + (17) &= -0{,}461\\
(18) + (19) + (20) &= +2{,}596\\
(21) + (22) + (23) &= +0{,}043\\
(24) + (25) + (26) &= -0{,}616\,.
\end{aligned}$$

*) Wir ziehen es vor, die Indices in diesem Beispiel durch arabische Ziffern auszudrücken.

Die Bedingungsgleichungen der dritten Art werden bequemer in logarithmischer Form aufgestellt; so heisst die erste

$$\log\sin(v^{(0)}-0{,}583'')-\log\sin(v^{(2)}-0{,}583'')-\log\sin(v^{(3)}-0{,}382'')$$
$$+\log\sin(v^{(4)}-0{,}382'')-\log\sin(v^{(6)}-0{,}414'')+\log\sin(v^{(7)}-0{,}414'')$$
$$-\log\sin(v^{(16)}-0{,}389'')+\log\sin(v^{(17)}-0{,}389'')-\log\sin(v^{(19)}-0{,}368'')$$
$$+\log\sin(v^{(20)}-0{,}368'')=0\,.$$

Es erscheint überflüssig, die andere in geschlossener Form hinzuschreiben. Diesen beiden Gleichungen entsprechen die folgenden, wo die einzelnen Coefficienten sich auf die siebente Stelle der *Brigg*'schen Logarithmen beziehen,

$$\begin{aligned}17{,}068\,(0)&-20{,}174\,(2)-16{,}993\,(3)+7{,}328\,(4)-17{,}976\,(6)\\&+22{,}672\,(7)-5{,}028\,(16)+21{,}780\,(17)-19{,}710\,(19)\\&+11{,}671\,(20)=-371\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}17{,}976\,(6)&-0{,}880\,(8)-20{,}617\,(9)+8{,}564\,(10)-19{,}082\,(13)\\&+4{,}375\,(14)+6{,}798\,(18)-11{,}671\,(20)+13{,}657\,(21)\\&-25{,}620\,(23)-2{,}995\,(24)+33{,}854\,(25)=+370\,.\end{aligned}$$

Da kein Grund angegeben ist, weshalb wir den Beobachtungen ungleiche Gewichte beilegen sollten, so setzen wir $p^{(0)}=p^{(1)}=p^{(2)}$ etc. $=1$. Bezeichnen wir daher die Correlaten der Bedingungsgleichungen in der Reihenfolge, in der wir die ihnen entsprechenden Gleichungen aufgestellt haben, mit A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, so ergeben sich zur Bestimmung derselben folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
-2{,}197''&=5\,A+C+D+E+H+I+5{,}917\,N\\
-0{,}436&=6\,B+E+F+G+I+K+L+2{,}962\,M\\
-3{,}958&=A+3\,C-3{,}106\,M\\
+0{,}722&=A+3\,D-9{,}665\,M\\
-0{,}753&=A+B+3\,E+4{,}696\,M+17{,}096\,N\\
+2{,}355&=B+3\,F-12{,}053\,N\\
-1{,}201&=B+3\,G-14{,}707\,N\\
-0{,}461&=A+3\,H+16{,}752\,M\\
+2{,}596&=A+B+3\,I-8{,}039\,M-4{,}874\,N\\
+0{,}043&=B+3\,K-11{,}963\,N\\
-0{,}616&=B+3\,L+30{,}859\,N\\
-\;371&=+2{,}962\,B-3{,}106\,C-9{,}665\,D+4{,}696\,E+16{,}752\,H\\
&\quad-8{,}039\,I+2902{,}27\,M-459{,}33\,N\\
+\;370&=+5{,}917\,A+17{,}096\,E-12{,}053\,F-14{,}707\,G\\
&\quad-4{,}874\,I-11{,}963\,K+30{,}859\,L-459{,}33\,M\\
&\quad+3385{,}96\,N\,.
\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir durch Elimination

A = — 0,598	H = + 0,659
B = — 0,255	I = + 1,050
C = — 1,234	K = + 0,577
D = + 0,086	L = — 1,351
E = — 0,477	M = — 0,109792
F = + 1,351	N = + 0,119681.
G = + 0,271	

Endlich erhalten wir die plausibelsten Fehler aus den Formeln

$$
\begin{aligned}
(0) &= C + 17{,}068\,M \\
(1) &= A + C \\
(2) &= C - 20{,}174\,M \\
(3) &= D - 16{,}993\,M
\end{aligned}
$$

etc., woraus wir die folgenden numerischen Werthe finden; zur Vergleichung setzen wir (mit entgegengesetzten Vorzeichen) die von *de Krayenhoff* an die Beobachtungen angebrachten Verbesserungen hinzu:

	de Kr.		*de Kr.*
(0) = — 3,108″	— 2,090″	(14) = + 0,795″	+ 2,400″
(1) = — 1,832	+ 0,116	(15) = + 0,061	+ 1,273
(2) = + 0,981	— 1,982	(16) = + 1,211	+ 5,945
(3) = + 1,952	+ 1,722	(17) = — 1,732	— 7,674
(4) = — 0,719	+ 2,848	(18) = + 1,265	+ 1,876
(5) = — 0,512	— 3,848	(19) = + 2,959	+ 6,251
(6) = + 3,648	— 0,137	(20) = — 1,628	— 5,530
(7) = — 3,221	+ 1,000	(21) = + 2,211	+ 3,486
(8) = — 1,180	— 1,614	(22) = + 0,322	— 3,454
(9) = — 1,116	0	(23) = — 2,489	0
(10) = + 2,376	+ 5,928	(24) = — 1,709	+ 0,400
(11) = + 1,096	— 3,570	(25) = + 2,701	+ 2,054
(12) = + 0,016	+ 2,414	(26) = — 1,606	— 3,077.
(13) = — 2,013	— 6,014		

Die Summe der Quadrate unserer Ausgleichungen findet man = 97,8845. Hieraus findet man den mittleren Fehler, insoweit er aus den 27 beobachteten Winkeln abgeleitet werden kann,

$$
= \sqrt{\frac{97{,}8845}{13}} = 2{,}7440''.
$$

Die Summe der Quadrate der Aenderungen, welche *de Krayenhoff* selbst an die beobachteten Winkel angebracht hat, wird = 341,4201 gefunden.

24.

Das zweite Beispiel liefern uns die Dreiecke zwischen den fünf Punkten Falkenberg, Breithorn, Hauselberg, Wulfsode und Wilsede der Triangulation von Hannover. Beobachtet sind die Richtungen*):

	Auf der Station *Falkenberg*		
0. Wilsede	187°	47′	30,311″
1. Wulfsode.	225	9	39,676
2. Hauselberg	266	13	56,239
3. Breithorn	274	14	43,634
	Auf der Station *Breithorn*		
4. Falkenberg	94	33	40,755
5. Hauselberg	122	51	23,054
6. Wilsede	150	18	35,100
	Auf der Station *Hauselberg*		
7. Falkenberg	86	29	6,872
8. Wilsede	154	37	9,624
9. Wulfsode.	189	2	56,376
10. Breithorn	302	47	37,732
	Auf der Station *Wulfsode*		
11. Hauselberg	9	5	36,593
12. Falkenberg	45	27	33,556
13. Wilsede	118	44	13,159
	Auf der Station *Wilsede*		
14. Falkenberg	7	51	1,027
15. Wulfsode.	298	29	49,519
16. Breithorn	330	3	7,392
17. Hauselberg	334	25	26,746.

*) Die Nullrichtungen, auf welche sich die einzelnen Richtungen beziehen, werden hier als willkürlich angesehen, obwohl sie thatsächlich mit den Meridianlinien der Stationen zusammenfallen. Die Beobachtungen werden seiner Zeit vollständig veröffentlicht werden; einstweilen findet man eine Figur in den „Astronomischen Nachrichten", Bd. I, S. 441.

Aus diesen Beobachtungen lassen sich sieben Dreiecke bilden.

Dreieck I.

Falkenberg	8°	0′	47,395″
Breithorn	28	17	42,299
Hauselberg	143	41	29,140

Dreieck II.

Falkenberg	86	27	13,323
Breithorn	55	44	54,345
Wilsede	37	47	53,635

Dreieck III.

Falkenberg	41	4	16,563
Hauselberg	102	33	49,504
Wulfsode	36	21	56,963

Dreieck IV.

Falkenberg	78	26	25,928
Hauselberg	68	8	2,752
Wilsede	33	25	34,281

Dreieck V.

Falkenberg	37	22	9,365
Wulfsode	73	16	39,603
Wilsede	69	21	11,508

Dreieck VI.

Breithorn	27	27	12,046
Hauselberg	148	10	28,108
Wilsede	4	22	19,354

Dreieck VII.

Hauselberg	34	25	46,752
Wulfsode	109	38	36,566
Wilsede	35	55	37,227.

Es sind also sieben Bedingungsgleichungen zweiter Art vorhanden (die Bedingungsgleichungen erster Art fallen offenbar fort), zu deren Aufstellung vor allem die sphäroidischen Excesse der sieben Dreiecke zu ermitteln sind. Hierzu ist die Kenntniss der absoluten Grösse wenigstens einer Seite erforderlich; die Seite zwischen den

Punkten Wilsede und Wulfsode ist 22877,94 Meter lang. Hieraus ergeben sich die sphäroidischen Excesse der Dreiecke I . . . 0,202″; II. . . 2,442″; III. . . 1,257″; IV. . . 1,919″; V. . . 1,957″; VI. . . 0,321″; VII . . . 1,295″.

Wenn wir jetzt die Richtungen in der Reihenfolge, wie sie oben angeführt und durch Indices unterschieden sind, mit $v^{(0)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ etc. bezeichnen, so werden die Winkel des ersten Dreiecks

$$v^{(3)} - v^{(2)}, \quad v^{(5)} - v^{(4)}, \quad 360^0 + v^{(7)} - v^{(10)},$$

und deshalb die erste Bedingungsgleichung

$$-v^{(2)} + v^{(3)} - v^{(4)} + v^{(5)} + v^{(7)} - v^{(10)} + 179^0\ 59'\ 59{,}798'' = 0\,.$$

Ebenso liefern die übrigen Dreiecke die sechs anderen; eine geringe Achtsamkeit wird aber zeigen, dass diese sieben Gleichungen nicht von einander unabhängig sind, sondern dass die zweite identisch mit der Summe der ersten, vierten und sechsten, die Summe der dritten und fünften aber identisch mit der Summe der vierten und siebenten ist; deshalb lassen wir die zweite und fünfte unberücksichtigt. An Stelle der übrigbleibenden Bedingungsgleichungen in geschlossener Form schreiben wir die entsprechenden Gleichungen des Systems (13), indem wir für die Zeichen ε, ε' etc. hier (0), (1), (2) etc. benutzen,

$$\begin{aligned}
-1{,}368'' &= -(2)+(3)-(4)+(5)+(7)-(10)\\
+1{,}773 &= -(1)+(2)-(7)+(9)-(11)+(12)\\
+1{,}042 &= -(0)+(2)-(7)+(8)+(14)-(17)\\
-0{,}813 &= -(5)+(6)-(8)+(10)-(16)+(17)\\
-0{,}750 &= -(8)+(9)-(11)+(13)-(15)+(17)\,.
\end{aligned}$$

Von Bedingungsgleichungen der dritten Art würden sich *acht* aus dem System der Dreiecke finden lassen, da man je drei der vier Dreiecke I, II, IV, VI und je drei von III, IV, V, VII zu diesem Zweck combiniren kann; eine geringe Aufmerksamkeit lehrt indess, dass *zwei* ausreichen, eine von jenen und eine von diesen, da die übrigen in ihnen und den früheren Bedingungsgleichungen schon enthalten sein müssen. Unsere sechste Bedingungsgleichung wird daher sein

$$\begin{aligned}
&\log\sin(v^{(3)} - v^{(2)} - 0{,}067'') - \log\sin(v^{(5)} - v^{(4)} - 0{,}067'')\\
&+ \log\sin(v^{(14)} - v^{(17)} - 0{,}640'') - \log\sin(v^{(2)} - v^{(0)} - 0{,}640'')\\
&+ \log\sin(v^{(6)} - v^{(5)} - 0{,}107'') - \log\sin(v^{(17)} - v^{(16)} - 0{,}107'') = 0
\end{aligned}$$

und die siebente

$$\begin{aligned}
&\log\sin(v^{(2)}-v^{(1)}-0{,}419'')-\log\sin(v^{(12)}-v^{(11)}-0{,}419'')\\
&+\log\sin(v^{(14)}-v^{(17)}-0{,}640'')-\log\sin(v^{(2)}-v^{(0)}-0{,}640'')\\
&+\log\sin(v^{(13)}-v^{(11)}-0{,}432'')-\log\sin(v^{(17)}-v^{(15)}-0{,}432'')=0,
\end{aligned}$$

und es entsprechen ihnen als Gleichungen des Systems (13)

$$\begin{aligned}
+25 = &+4{,}31\,(0)-153{,}88\,(2)+149{,}57\,(3)+39{,}11\,(4)\\
&-79{,}64\,(5)+40{,}53\,(6)+31{,}90\,(14)+275{,}39\,(16)\\
&-307{,}29\,(17)\\
-3 = &+4{,}31\,(0)-24{,}16\,(1)+19{,}85\,(2)+36{,}11\,(11)\\
&-28{,}59\,(12)-7{,}52\,(13)+31{,}90\,(14)+29{,}06\,(15)\\
&-60{,}96\,(17).
\end{aligned}$$

Wenn wir nun den einzelnen Richtungen dieselbe Genauigkeit beilegen, indem wir $p^{(0)}=p^{(1)}=p^{(2)}$ etc. $=1$ setzen, und die Correlaten der sieben Bedingungsgleichungen in der obigen Reihenfolge mit A, B, C, D, E, F, G bezeichnen, so werden dieselben aus den folgenden Gleichungen zu bestimmen sein:

$$\begin{aligned}
-1{,}368 &= +6A-2B-2C-2D+184{,}72F-19{,}85G\\
+1{,}773 &= -2A+6B+2C+2E-153{,}88F-20{,}69G\\
+1{,}042 &= -2A+2B+6C-2D-2E+181{,}00F+108{,}40G\\
-0{,}813 &= -2A-2C+6D+2E-462{,}51F-60{,}96G\\
-0{,}750 &= +2B-2C+2D+6E-307{,}29F-133{,}65G\\
+25 &= +184{,}72A-153{,}88B+181{,}00C-462{,}51D\\
&\quad -307{,}29E+224868F+16694{,}1G\\
-3 &= -19{,}85A-20{,}69B+108{,}40C-60{,}96D-133{,}65E\\
&\quad +16694{,}1F+8752{,}39G.
\end{aligned}$$

Hieraus leiten wir durch Elimination ab

$$\begin{aligned}
A &= -0{,}225\\
B &= +0{,}344\\
C &= -0{,}088\\
D &= -0{,}171\\
E &= -0{,}323\\
F &= +0{,}000215915\\
G &= -0{,}00547462.
\end{aligned}$$

Die plausibelsten Fehler erhält man nunmehr aus den Formeln

$$\begin{aligned}
(0) &= -C+4{,}31F+4{,}31G\\
(1) &= -B-24{,}16G\\
(2) &= -A+B+C-153{,}88F+19{,}85G
\end{aligned}$$

etc., woraus sich die numerischen Werthe ergeben

$(0) = +0{,}065''$	$(9) = +0{,}021''$
$(1) = -0{,}212$	$(10) = +0{,}054$
$(2) = +0{,}339$	$(11) = -0{,}219$
$(3) = -0{,}193$	$(12) = +0{,}501$
$(4) = +0{,}233$	$(13) = -0{,}282$
$(5) = -0{,}071$	$(14) = -0{,}256$
$(6) = -0{,}162$	$(15) = +0{,}164$
$(7) = -0{,}481$	$(16) = +0{,}230$
$(8) = +0{,}406$	$(17) = -0{,}139$.

Die Summe der Quadrate dieser Fehler wird $= 1{,}2288$ gefunden; hieraus folgt der mittlere Fehler einer einzelnen Richtung, insoweit er aus den beobachteten 18 Richtungen abgeleitet werden kann,

$$= \sqrt{\frac{1{,}2288}{7}} = 0{,}4190''.$$

25.

Um auch den zweiten Theil unserer Theorie durch ein Beispiel zu erläutern, suchen wir die Genauigkeit auf, mit welcher die Seite Falkenberg—Breithorn aus der Seite Wilsede—Wulfsode mit Hülfe der ausgeglichenen Beobachtungen bestimmt wird. Die Funktion u, durch welche dieselbe in diesem Fall ausgedrückt wird, ist

$$u = 22877{,}94^{\mathrm{m}} \times \frac{\sin(v^{(13)} - v^{(12)} - 0{,}652'')\sin(v^{(14)} - v^{(16)} - 0{,}814'')}{\sin(v^{(1)} - v^{(0)} - 0{,}652'')\sin(v^{(6)} - v^{(4)} - 0{,}814'')}.$$

Der Werth derselben wird mit den verbesserten Werthen der Richtungen $v^{(0)}$, $v^{(1)}$ etc. gefunden

$$= 26766{,}68^{\mathrm{m}}.$$

Die Differentiation jenes Ausdrucks liefert aber, wenn man sich die Differentiale $dv^{(0)}$, $dv^{(1)}$ etc. in Secunden ausgedrückt denkt,

$$\begin{aligned} du = {} & 0{,}16991^{\mathrm{m}}(dv^{(0)} - dv^{(1)}) + 0{,}08836^{\mathrm{m}}(dv^{(4)} - dv^{(6)}) \\ & - 0{,}03899^{\mathrm{m}}(dv^{(12)} - dv^{(13)}) + 0{,}16731^{\mathrm{m}}(dv^{(14)} - dv^{(16)}). \end{aligned}$$

Hieraus findet man weiter

$$\begin{aligned} [al] &= -\ 0{,}08836 \\ [bl] &= +\ 0{,}13092 \\ [cl] &= -\ 0{,}00260 \\ [dl] &= +\ 0{,}07895 \end{aligned}$$

$$[el] = + \ \ 0,03899$$
$$[fl] = -40,1315$$
$$[gl] = +10,9957$$
$$[ll] = + \ \ 0,13238.$$

Man findet hiernach endlich mit Hülfe der oben entwickelten Methoden, wenn wir das Meter als lineare Längeneinheit annehmen,

$$\frac{1}{P} = 0,08329, \quad \text{oder} \quad P = 12,006,$$

woraus der mittlere im Werthe der Seite Falkenberg—Breithorn zu befürchtende Fehler $= 0,2886\,m$ Meter ist (wo m der mittlere zu befürchtende Fehler der beobachteten Richtungen, und zwar in Sekunden ausgedrückt, ist), und folglich, wenn wir den oben ermittelten Werth des m nehmen,

$$= 0,1209^{\mathrm{m}}.$$

Uebrigens lehrt der Anblick des Systems der Dreiecke unmittelbar, dass der Punkt Hauselberg darin ganz weggelassen werden kann, ohne dass der Zusammenhang zwischen den Seiten Wilsede—Wulfsode und Falkenberg—Breithorn gestört würde. Aber es wäre aus methodischen Grundsätzen nicht zu billigen, wollte man deshalb die auf den Punkt Hauselberg bezüglichen Bebachtungen *unterdrücken**), da sie doch sicher zur Erhöhung der Genauigkeit beitragen. Um deutlicher zu zeigen, wie gross die Zunahme der Genauigkeit hierdurch wird, wiederholen wir die Berechnung, indem wir Alles, was sich auf den Punkt Hauselberg bezieht, weglassen, wodurch von den oben gegebenen 18 Richtungen 8 fortfallen, und die plausibelsten Fehler der übrigen folgendermaassen gefunden werden:

$(0) = +0,327''$	$(12) = +0,206''$
$(1) = -0,206$	$(13) = -0,206$
$(3) = -0,121$	$(14) = +0,327$
$(4) = +0,121$	$(15) = +0,206$
$(6) = -0,121$	$(16) = +0,121.$

Der Werth der Seite Falkenberg—Breithorn ergiebt sich dann

*) Der grössere Theil dieser Beobachtungen war schon angestellt, ehe der Punkt Breithorn aufgefunden und in das System aufgenommen ward.

$= 26766{,}63^m$, zwar wenig von dem oben gefundenen abweichend, die Berechnung des Gewichts liefert aber

$$\frac{1}{P} = 0{,}13082, \quad \text{oder} \quad P = 7{,}644$$

und deshalb den mittleren zu befürchtenden Fehler $= 0{,}36169\,m$ Meter $= 0{,}1515^m$. Es erhellt daher, dass durch Hinzunahme der auf Hauselberg bezüglichen Beobachtungen das Gewicht der Bestimmung der Seite Falkenberg—Breithorn im Verhältniss der Zahl 7,644 zu 12,006, oder der Einheit zu 1,571 vermehrt ist.