Tafel B. Unterschiede $\{arc\,\eta - sin\,\eta\}.\varrho''$;
für flächentreue Abbildung von η abzuziehen.

η	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′
0°	0″,0	0″,0	0″,0	0″,0	0″,0	0″,1	0″,2
1°	0 ,2	0 ,3	0 ,4	0 ,6	0 ,8	1 ,1	1 ,5
2°	1 ,5	1 ,9	2 ,3	2 ,9	3 ,5	4 ,2	4 ,9
3°	4 ,9	5 ,8	6 ,8	7 ,8	9 ,0	10 ,3	11 ,7
4°	11 ,7	13 ,2	14 ,9	16 ,7	18 ,6	20 ,6	22 ,8
5°	22 ,8	25 ,2	27 ,7	30 ,4	33 ,2	36 ,3	39 ,5

Wie man sieht, stimmen die Zahlen der zwei Tafeln **A.** und **B.** bis zu $\eta = 4^\circ 40'$ bis auf die $0'',1$ überein, erst von da an sind, bis zu $\eta = 6^\circ 0'$, die Zahlen von **B.** je um $0'',1$ kleiner als die von **A.** Über die Relativität der Ausdrücke winkeltreue und flächentreue Abbildung, die streng richtig nur für den Fall wären, daß es sich um die Abbildung eines Kugel-Meridianstreifens, nicht eines Ellipsoid-Meridianstreifens auf die Ebene handeln würde, werden nach den Erläuterungen in **2.** keine Angaben mehr notwendig sein.

III. Zahlenbeispiel.

Übersichtskarte von Württemberg in 1:400 000.

Um an Raum zu sparen, muß hier, im Gegensatz zum I. Heft, ein einziges Beispiel genügen. Es mag dazu eine einblättrige Karte gewählt werden; das Zerschneiden einer größern Karte nach runden, rechtwinkligen Koordinatennetzlinien der Kartenebene in gleich große Blätter bringt ja keine Schwierigkeit.

Die vom Württembergischen Statistischen Landesamt herausgegebne Übersichtskarte von Württemberg im Längenmaßstab 1:400 000 enthält im S noch den Züricher See und reicht im N bis Walldürn in Baden und Neustadt in Bayern, im W bis zu der Linie Aarau-Bergzabern, im O bis über die Linie Kaufbeuren-Öttingen hinaus. Es soll ein Halbgradnetz für die Karte entworfen werden, und zwar den angegebnen Grenzen entsprechend in Breite von $47^\circ 0'$ bis $49^\circ 30'$ gehend (im S also etwas über die notwendige Linie hinaus) und, mit $27^\circ 0'$ östlich von Ferro als Mittelmeridian, in Länge von $25^\circ 30'$ bis $28^\circ 30'$. Die Netzpunkte sind also $\lambda = 0^\circ 30'$, $1^\circ 0'$ und $1^\circ 30'$ zu beiden Seiten des Mittelmeridians für die 6 Parallelkreise $47^\circ 0'$, $47^\circ 30'$, $48^\circ 0'$, $48^\circ 30'$ $49^\circ 0'$ und $49^\circ 30'$.

Wir entnehmen vor allem der Tafel II. folgenden Auszug (Tabelle 1.) für unser Gebiet, wobei allemal $(\xi - \varphi)$ die obere und η die untere Zahl ist:

Tabelle 1.

φ	$\lambda = 0°$	$\lambda = 0° 30'$	$\lambda = 1° 0'$	$\lambda = 1° 30'$
47° 0′	0″ 0″	4″ 20′ 28″	16″ 40′ 55″	35″ 1° 01′ 21″
47° 30′	0″ 0″	4″ 20′ 16″	16″ 40′ 32″	35″ 1° 00′ 47″
48° 0′	0″ 0″	4″ 20′ 04″	16″ 40′ 09″	35″ 1° 00′ 13″
48° 30′	0″ 0″	4″ 19′ 53″	16″ 39′ 45″	35″ 0° 59′ 37″
49° 0′	0″ 0″	4″ 19′ 41″	16″ 39′ 22″	35″ 0° 59′ 03″
49° 30′	0″ 0″	4″ 19′ 29″	15″ 38′ 58″	35″ 0° 58′ 26″

Die Tabelle 1. zeigt zunächst, daß für alle Parallelkreise in der Ausdehnung, in der wir sie brauchen, die einzelnen $(\xi - \varphi)$ für ein bestimmtes λ innerhalb $\frac{1}{2}''$ dieselben sind [nur bei $\varphi = 49° 30'$ heißt es, in $\lambda = 1° 0'$, $(\xi - \varphi) = 15''$ statt wie sonst überall $16''$], sowie daß (natürlich ebenfalls nur innerhalb unsres kleinen Gebiets) auf jedem einzelnen Parallel innerhalb $1''$ genau

$$\eta_{\lambda = 1°} = 2 \, . \, \eta_{\lambda = {}^1\!/_2°}$$

und auch noch $\eta_{\lambda = 1{}^1\!/_2°} = \eta_{\lambda = 1°} + \eta_{\lambda = {}^1\!/_2°} = 3 \, . \, \eta_{\lambda = {}^1\!/_2°}$ ist.

Wir wollen auch gleich den Überschlag anstellen, daß $1''$ Großkreisbogen auf der „Kugel"oberfläche rund die Länge 30 m hat, also $\frac{1}{2}''$ die Länge 15 m, der Kartenstrecke $\frac{15\,000}{400\,000}$ mm $= \frac{1}{26}$ mm entsprechend, d. h. es kommt $\frac{1}{2}''$ in ξ oder η nicht, und selbst $1''$ in ξ oder η (auf der Karte $\frac{1}{13}$ mm) für die mögliche Genauigkeit der Kartenzeichnung kaum in Betracht.

1. Wir wollen nun eine erste Rechnung rein sphärisch durchführen, und zwar, um die geringe Wirkung einer ziemlich schlechten Annahme des Kugelhalbmessers zu zeigen, mit einem absichtlich wenig zweckmäßig gewählten r. Die Mittelbreite unseres Gebiets ist $48° 15'$; bleiben wir beim Besselschen Erdellipsoid, dessen etwas zu geringe Abplattung gar nicht in Betracht kommt, während die um rund $\frac{1}{10\,000}$ der Beträge zu kleinen linearen Abmessungen für die mögliche Genauigkeit der Kartenzeichnung ebenfalls ohne Bedeutung sind $\left(\frac{1}{10\,000}\right.$ Unterschied in der Länge gibt auf der Karte für 1 ganzes m Kartenstrecke einen Unterschied von 0,1 mm$\left.\right)$. Es ist auf diesem Ellipsoid:

$$\left.\begin{aligned} \log r_{m\,,\,48{}^1\!/_4°} &= 6.80\,416 \text{ (m)} \\ \log r_{n\,,\,48{}^1\!/_4°} &= 6.80\,545 \text{ (m)} \end{aligned}\right\} \text{ im Mittel also } \log r_{48{}^1\!/_4°} = \underline{6.80\,480} \, .$$

Die Überlegung, daß sich unser Gebiet wesentlich weiter in der Richtung NS als in der Richtung WO erstreckt, kann zu der Annahme führen, $\log r$ sei noch etwas zu verringern, d. h. etwas mehr dem $\log r_{m,\,48^1/_4{}^\circ}$ als $\log r_{n,\,48^1/_4{}^\circ}$ anzuschließen; es ist damit zu erwarten, daß wir bei dieser sphärischen Rechnung dann ziemlich richtige Abmessungen auf der Karte in der Richtung SN erhalten, während die Abmessungen in der Richtung WO merklich zu klein ausfallen werden. Wir wollen die Rechnung mit der Annahme:

$\log r = 6.80450$, $r \doteq 6375{,}3$ km einmal rein sphärisch durchführen. Es ist bekanntlich für die Rechnung bequem, für r ein für allemal den Wert zu nehmen, der dem Kugelhalbmesser gemäß dem Kartenmaßstab zukommt, d. h. also hier zu verwenden:

$$\underline{r_1} = \frac{6\,375\,300\,000}{400\,000}\ \text{mm} = \underline{15\,938\ \text{mm.}}$$ Die Rechnung aller Abszissen der Koordinatennetzpunkte in der Kartenebene ist nun äußerst einfach, da durchaus nur die Kartenstrecken für die Großkreisbögen 4″, 16″ und 35″ (nach den $\xi - \varphi$) am Rechenschieber abzulesen sind, nämlich die Beträge

$$\frac{r_1 \cdot 4}{206\,000}\,,\ \frac{r_1 \cdot 16}{206\,000}\,,\ \frac{r_1 \cdot 35}{206\,000}\ \text{mm},$$ was mit einer Einstellung und richtig aufs $\frac{1}{10}$ mm abgerundet gibt: $\underline{0{,}3\ \text{mm}}$, $\underline{1{,}2\ \text{mm}}$, $\underline{2{,}7\ \text{mm.}}$ Dabei ist nun allerdings vorausgesetzt, daß die Schnittpunkte der einzelnen Parallelkreisbilder auf dem Kartenmittelmeridian bereits festgelegt sind; für die beabsichtigte rein sphärische Rechnung ist also, um vom Kartenmittelpunkt aus diese Schnittpunkte auftragen zu können, noch mit verhältnismäßig großer Genauigkeit (5-stellige Logarithmen) die Länge des Großkreisbogens 15′ auszurechnen, nämlich mit $\log r_1$ (mm) $= 4.20244$ die Zahl $[4.20244]^{mm} \cdot \frac{15^{(\prime)}}{3437{,}75^{(\prime)}} = \underline{69{,}544\ \text{mm.}}$ Dies gibt also für $\frac{1}{2}^\circ$ Großkreisbogen 139,09 mm und für 1° Großkreisbogen 278,18 mm auf der Karte. Es wären also vom gewählten Kartenmittelpunkt (48° 15′) aus auf dem geradlinigen Mittelmeridian nach N und nach S folgende Strecken, je auf $\frac{1}{10}$ mm abgerundet, aufzutragen, um die Schnittpunkte der Parallelkreisbilder von $\frac{1}{2}^\circ$ zu $\frac{1}{2}^\circ$ zwischen 49° 30′ und 47° 00′ zu erhalten:

49° 30′	+ 347,7 mm	48° 00′	— 69,5₅ mm	Probe:
49° 00′	+ 208,6₅ mm	47° 30′	— 208,6₅ mm	5.139,09 = 695,4 mm
48° 30′	+ 69,5₅ mm	47° 00′	— 347,7 mm	= 2.347,7 mm.

In jedem dieser Schnittpunkte mit dem geradlinigen Kartenmittelmeridian ist ein sehr genaues Lot auf diesem zu errichten, auf jedem der Lote sind die in der folgenden Tabelle berechneten y scharf aufzutragen und dann senkrecht dazu (wozu nicht einmal ein Winkel notwendig ist) die x-Beträge 0,3 , 1,2 und 2,7 mm (s. oben). Damit sind die Kartennetzpunkte fertig und es ergibt sich eine gute Zeichenprobe durch die innerhalb der Zeichengenauigkeit vorhandne Geradlinigkeit der Meridianbilder. Von den Ordinaten y braucht man gemäß der Überlegung am Schluß der (ξ, η)-Tabelle 1. zu jedem Parallelkreisbild nur je eine einzige, am besten die für $\lambda = 1°$ auszurechnen, d. h. die Beträge $r_1 \cdot \frac{(\eta_{\lambda=1°})''}{206\,265''}$ mm, deren Halbierung und Vervielfachung mit $1\frac{1}{2}$ sogleich auch die y für $\lambda = \frac{1}{2}°$ und für $\lambda = 1\frac{1}{2}°$ liefert. Die ganze Rechnung, bei der $\log \frac{r_1}{206265} = 8.88801$ auf einen Schiebzettel zu schreiben ist, ist also die folgende:

Tabelle 2.

φ	$\eta_{\lambda=1°}$	$\log \eta''$	$\log y_{\lambda=}$	$y_{\lambda=1°}$ (mm)	$y_{\lambda=1/2°}$ (mm)	$y_{\lambda=1^1/_2°}$ (mm)	Diff.	Unterschied gegen die amerikan. polyk. Tafel
47°	2455″	3.39 005	2.27 806	189,70	94,85	284,5		(s. u.) +0,7
	23						2,6	
47½°	2432	3.38 596	2.27 397	187,92	93,96	281,9		
	23						2,7	
48°	2409	3.38 184	2.26 985	186,14	93,07	279,2		+0,6
	24						2,8	
48½°	2385	3.37 749	2.26 550	184,29	92,14	276,4		
	23						2,6	
49°	2362	3.37 328	2.26 129	182,51	91,26	273,8		+0,6
	24						2,8	
49½°	2338	3.36 884	2.25 685	180,65	90,33	271,0		
								(s. u.)
				auf Schiebzettel	8.88 801			

Wir wollen diese Koordinatenergebnisse vergleichen mit den Koordinaten der amerikanischen polykonischen Projektionstafel (vgl. oben S. 5; Abmessungen des Clarkeschen Erdellipsoids von 1866, nicht die Besselschen, was übrigens hier für den sehr kleinen Bereich unserer Karte nicht in Betracht kommen kann). Aus dieser amerikanischen Tafel erhalten wir für die ganzen Grade $\varphi = 47°, 48°, 49°$ die folgenden Koordinaten, bezogen auf je ein Teilkoordinatensystem, wie es auch oben angenommen ist, in m (Tabelle 3.); die obere Zahl entspricht jedesmal unsrem x (in der amerikanischen Tafel Y), die untere unsrem y (dort X). Die rechts danebenstehende Tabelle 3′. übersetzt die Meterzahlen der Tabelle 3. in mm der Kartenfläche durch Division jener Zahlen mit 400, und gibt diese Koordinatenzahlen je auf 0,1 mm abgerundet.

Tabelle 3. (Meter).

	$\lambda = 0°\,30'$	$\lambda = 1°\,0'$	$\lambda = 1°\,30'$
Lat. 47° 0′	121,4 38 028,9	485,4 76 056,3	1 092,2 114 080,5
Lat. 48° 0′	121,0 37 313,6	484,0 74 625,6	10 88,9 111 934,5
Lat. 49° 0′	120,5 36 586,8	481,9 73 172,0	1 084,3 109 754,1

Tabelle 3′. (Millimeter der Karte).

$\lambda = 0°\,30'$	$\lambda = 1°\,0'$	$\lambda = 1°\,30'$
0,3 95,1	1,2 190,1	2,7 285,2
0,3 93,3	1,2 186,6	2,7 279,8
0,3 91,5	1,2 182,9	2,7 274,4

Die x der Tabelle 2. (sie sind dort nicht mehr angeschrieben, vgl. vielmehr die Zahlen S. 13) und 3′. stimmen selbstverständlich überall innerhalb 0,1 mm miteinander überein, dagegen müßte zu den Zahlen y in 2. bei $\lambda = \frac{1}{2}°$ 0,2 mm, bei $\lambda = 1°$ 0,4 mm, bei $\lambda = 1\frac{1}{2}°$ 0,6 mm hinzugefügt werden, um sie auf die entsprechenden Zahlen von Tabelle 3′. zu bringen (wie schon in der letzten Spalte rechts von Tabelle 2. für $\lambda = 1\frac{1}{2}°$ angedeutet ist). Allerdings liegt $\lambda = \pm 1\frac{1}{2}°$ bereits außerhalb des Bereichs unserer Karte; man kann also sagen, daß der Unterschied der Abmessungen unserer Karte in Richtung WO links und rechts vom Mittelmeridian in den beiden Abbildungen, der oben berechneten und der amerikanischen polykonischen, nirgends $\frac{1}{2}$ mm (= 200 m in der Natur) überschreitet, und zwar sind die Abmessungen der hier berechneten Abbildung durchaus etwas zu klein, wie zu erwarten war. Dagegen ist auf der oben rein sphärisch berechneten Abbildung 1° des Meridians je 278,2 mm lang, während dem Clarkeschen Ellipsoid 1866 für den Kartenmaßstab 1 : 400 000 für den 1°-Meridianbogen 47°–48° und ebenso den Meridianbogen 48°—49° je 278,0 mm entsprechen würde, also etwas weniger. Bei $1\frac{1}{4}°$ Breitenerstreckung der Karte vom Mittelpunkt nach N und nach S gibt dies für die ganze Kartenfläche eine Verstreckung in nord-südlicher Richtung von 0,4 bis 0,5 mm (der Feldstrecke von etwa ebenfalls 200 m entsprechend).

2. Zweite Rechnung. Man kann natürlich, wenn man in der Tat alles rein sphärisch rechnen will, einen bessern Anschluß der Kartenabmessungen an die Abmessungen des Ellipsoids in der Richtung WO sehr einfach dadurch erreichen, daß man den Kugelhalbmesser vergrößert; dadurch wird aber die Streckung in der Richtung NS noch etwas größer. Nehmen wir für diese zweite rein sphärische Rechnung geradezu den Kugelhalbmesser gleich dem Querkrümmungshalbmesser des Erdellipsoids in der Mittelbreite 48° 15′ an (wobei die Abweichung zwischen Clarke und Bessel für die Zeichengenauigkeit der Karte in 1 : 400 000 nicht in Betracht kommt), nämlich (vgl. S. 12)

$$\log r = 6.80\,545 \text{ (m) oder } r = 6389{,}3 \text{ km oder im Maßstab der Karte } 1:400000$$

$$\underline{r_2} = \frac{6\,389\,300}{400000} \text{ m} = \underline{15\,973 \text{ mm},}$$ so bleibt es für die x in den Teilkoordinatensystemen für jedes Parallelkreisbild mit der Genauigkeit von $\frac{1}{20}$ mm bei denselben Zahlen wie in der vorigen Abbildung; am Rechenschieber abgelesen werden die Zahlen

$$\frac{15\,970 \text{ (mm)}}{206\,300''} \,.\, 4'' = 0{,}31 \text{ mm}; \quad -\,.\,16'' = 1{,}24 \text{ mm}; \quad -\,.\,35'' = 2{,}71 \text{ mm},$$

vgl. die entsprechenden Zahlen in der vorigen Nr. **1.** Ferner ergibt sich die Strecke für 15′ Breitenunterschied auf dem geradlinigen Mittelmeridianbild, mit $\log r_2 = 4\,.\,20339$ zu 69,70 mm, also für $\frac{1}{2}^{\circ}$ 139,4 mm und für 1° 278,8 mm, so daß sich nach N und nach S vom Kartenmittelpunkt 48° 15′ auf dem Mittelmeridianbild abzutragende Strecken diesmal werden:

48° 30′	+ 69,7 mm	48° 00′	— 69,7 mm	Probe:
49° 00′	+ 209,1 mm	47° 30′	— 209,1 mm	5 . 139,4
49° 30′	+ 348,5 mm	47° 00′	— 348,5 mm	= 697,0 = 2 . 348,5.

Die Bestimmung der y in ganz derselben Weise wie in **1.**, nur diesmal mit $\log\left[r_2 \cdot \frac{1}{206\,265}\right] = 8.88896$ (statt in **1.** 8.88801) gibt folgende Werte (Tabelle 4.), die zeigen, daß die Ordinatenlängen in dieser neuen Rechnung selbst für $\lambda = 1\frac{1}{2}^{\circ}$ sich nur um 0,1 mm von den amerikanischen unterscheiden, für kleinere λ also verschwindend wenig. Dagegen wird nun hier, rein sphärisch gerechnet, die Meridianstrecke von 1°, die oben in der Rechnung **1.** mit 278,2 mm nur um 0,2 mm größer war als die Strecke 278,0 mm in 1 : 400 000 auf dem Clarkeschen (und ebenso auf dem Besselschen) Ellipsoid zwischen den Parallelkreisen 47° 0′, 48° 0′ und 49° 0′, abermals beträchtlich verlängert, nämlich auf 278,8 mm, so

Tabelle 4 (die y in mm).

φ	$\lambda = 1/2°$	$\lambda = 1°$	$\lambda = 1 1/2°$		Amerik. Tafel (Clarke) für 1 1/2°
47°	95,05	190,1	285,1		285,2
				2,6	
47 1/2°	94,15	188,35	282,5		—
				2,8	
48°	93,25	186,5	279,7		279,8
				2,7	
48 1/2°	92,35	184,7	277,0		—
				2,7	
49°	91,45	182,9	274,3		274,4
				2,8	
49 1/2°	90,55	181,0	271,5		—

daß es sich also um eine Längenverstreckung in der Richtung NS um 0,8 mm auf 278,8 mm oder $\frac{1}{350}$ oder 0,3 v. H. der Länge handelt. Dies kann immerhin etwas Bedenken erwecken, wenn es sich nicht um Karten handelt, die lithographisch auf befeuchtetes Papier abgezogen, sondern die trocken gedruckt werden. Im ersten Fall, Druck auf feuchtes Papier, kann jene Längenverstreckung nämlich u. U. geradezu von Vorteil sein: Man kann bei der Verschiedenheit des Papiereingangs in verschiednen Richtungen auf dem Papier nach dem Trocknen erreichen, daß der getrocknete Abdruck im ganzen ein wenn auch etwas verkleinertes, so doch weniger durch Papiereinlauf verzerrtes Bild gibt, als wenn auch in der Richtung NS, nicht nur in der Richtung WO in dem Entwurf des Netzes selbst, und damit also der Originalzeichnung auf dem Stein, durchaus richtiges Längenmaß vorhanden wäre. Die Unterschiede im Einlauf des Papiers feucht gedruckter Karten sind bedeutender, als meist angenommen wird; es sind in der Regel zwei Hauptrichtungen für diesen Papierschwund vorhanden, ein Maximum in der Richtung, in der das Papier beim Druck durch die Walze gelaufen ist und ein Minimum in der Richtung senkrecht dazu. Der Unterschied zwischen beiden Einläufen ist bei den gewöhnlichen lithographischen Druckpapieren meist etwa 0,4 bis 0,7 v. H. (aber auch 1 v. H. kommt vor), so daß z. B. in der Richtung des Papierlaufs durch die Walze die Karte um 1 oder 1,2 v. H. zu kleine Abmessungen zeigt, in der Richtung senkrecht dazu nur 0,5 v. H. od. dgl. Bei den geringen Kartendruckpapieren, mit denen wir uns in der letzten Zeit vielfach begnügen mußten, die aber jetzt hoffentlich abgetan sind, habe ich Unterschiede im Papiereingang bis zu $2\frac{1}{2}$ v. H. $\left(\frac{1}{40}\right.$ der Längen auf dem Papier!$\left.\right)$ gefunden (und absolute Eingänge in der Richtung des Maximums von über 3 v. H.). Bei den mehr und mehr sich einbürgernden Trockendrucken erreicht der Unterschied der Längenänderung in den verschiednen Richtungen durch das Drucken in der Regel nicht $\frac{1}{2}$ v. H., und gerade hier gilt das oben Gesagte, daß man die Verschlechterung des Kartenentwurfs durch einen mit Rücksicht auf die Druckveränderungen bei Beachtung der Richtung des Walzenlaufs angenommenen sphärischen Halbmesser in einen Vorteil verwandeln kann.

3. Dritte Rechnung. An sich hindert ja nun nichts daran, ganz auf die durchaus sphärische Rechnung mit durchaus demselben Kugelhalbmesser für die ξ und die η zu verzichten, nämlich so zu verfahren, daß zwar für die einzelnen Parallelkreisbilder in ihren Teilsystemen die

aus den ($\xi - \varphi$)- und η-Werten der Tafel hervorgehenden Koordinatenzahlen zur Rechnung und Zeichnung verwendet werden, die Abstände der x-Achsen der Teilsysteme aber, d. h. die Abstände der Schnittpunkte der einzelnen Parallelkreisbilder mit dem geradlinigen Meridianbild, den richtigen Meridianbogenlängen auf dem Ellipsoid entsprechend abgesetzt werden. Es handelt sich also hier dann um Verbindung ellipsoidischer fertig berechneter Zahlen; für Bessel z. B. zwischen 41° und 56° Breite mit dem Intervall 1′, Meridianbogenlängen auf 1 mm genau, im Handbuch der Vermessungskunde von Jordan-Eggert, III. Bd., 7. Aufl. 1923, S. [55] bis [58] (eine 10′-Tafel zwischen 40° und 56° ebd. S. [38] und S. [39] kann mit benützt werden). Solche Tafeln der Meridianbogenlängen sind auch an zahlreichen andern Orten, z. B. bei Hartl in den Mitteilungen des frühern österreichischen militärgeogr. Instituts (ebenfalls für Bessel) für die wichtigsten Referenzellipsoide fertig berechnet vorhanden. Die Festlegung der Teilkoordinatensysteme für die einzelnen Parallelkreisbilder verursacht also keine große Mühe und jedenfalls gar keine Rechnung.

Für die sphärische Rechnung der sehr kleinen x in den uns hier beschäftigenden Kartenentwürfen, für die meist der Rechenschieber genügt, ist dann die Annahme des Kugelhalbmessers innerhalb weiter Grenzen, wegen der Kleinheit der Abszissen, gleichgültig; zur sphärischen Berechnung der y für die einzelnen Parallelkreispunkte aber wird man jedenfalls den Querkrümmungshalbmesser der Ellipsoidfläche in der Breite φ_0 wählen, $r_{o,n}$. Rücksicht auf die Veränderlichkeit der Querkrümmungshalbmesser mit der Breite ist selbst für ziemlich große Gebiete nicht notwendig; die Veränderlichkeit ist ja viel geringer als die Veränderlichkeit der Meridiankrümmungshalbmesser r_m mit der Breite. Daß jener konstante $r_{o,n}$, obwohl er als Meridiankrümmungshalbmesser ziemlich zu groß wäre, trotzdem zur Rechnung der kleinen x dienen kann, ist bereits angedeutet. Die Rechnung der y ist selbst für ziemlich große Kartenflächen durchaus genügend mit 5-stelligen Logarithmen zu führen.

Mit den erwähnten Meridianbogentafeln für das Besselsche Ellipsoid erhält man als Abstände der Nullpunkte der Koordinatenteilsysteme für $\frac{1}{2}^\circ$-Parallelkreise, d. h. als Strecken zwischen dem Kartenmittelpunkt ($\varphi_0 = 48° 15'$) und den einzelnen Schnittpunkten der Parallelkreisbilder mit dem Mittelmeridian die folgenden Zahlen (Bessel):

49° 30′	+ 347,5 mm	48° 0′	— 69,5 mm
49° 0′	+ 208,5 mm	47° 30′	— 208,4$_5$ mm
48° 30′	+ 69,5 mm	47° 0′	— 347,4 mm .

Berechnet man dazu, in derselben Weise wie es oben geschehen ist, die Kartenebenen-Koordinaten (x, y) in den einzelnen Teilsystemen mit dem konstanten Halbmesser: Querkrümmungshalbmesser in $\varphi_0 = 48° 15'$ Breite, $\log r_{o,n} = 6.80545$ (m), oder Halbmesser im Kartenmaßstab $r_2 = 15973$ mm (wie bemerkt für die x zu groß, aber bei der Kleinheit dieser Abszissen ganz dieselben Zahlenwerte wie die Berechnung **1.** und **2.** mit kleinern Halbmessern liefernd), so findet man für die x aller einzelnen Parallelkreisbilder die Zahlen:

0,3 ; 1,2 ; 2,7 mm (s. oben),

und für die y wieder mit Hilfe der η-Zahlen die Werte der Tabelle 4. Alle diese Werte, die Abszissen x (auch von dem Kartenmittelpunkt aus gerechnet) und die Ordinaten y, unterscheiden sich auf der ganzen Kartenfläche nirgends um mehr als 0,1 mm (— die Verschiedenheit der Ellipsoide spielt gar keine Rolle —) von den Zahlen, die die unmittelbare Anwendung der Projektions-Koordinaten der amerikanischen Tafeln (Clarkes Ellipsoid von 1866) liefert. Man erhält auf diesem Weg Abbildungen von Ellipsoidflächenstücken mit ziemlich beträchtlicher Ausdehnung (mehrere Grade in der Richtung NS und ebenso WO), die als genähert längentreu schlechtweg, also als annähernd winkeltreu und flächentreu zugleich, als in den kleinsten Teilen nahezu kongruent angesehen werden können.

Diese dritte und letzte Art der Rechnung unsres kleinen Netzes und ähnlicher Netze mit Hilfe der vorliegenden $10'$-(ξ, η)-Koordinatentafeln: Einteilung der Schnittpunkte der Parallelkreisbilder mit dem geradlinigen Mittelmeridianbild gemäß den ellipsoidischen Längen der Meridianbögen und sodann Berechnung der ebenen rechtwinkligen Koordinaten der (x, y) in diesen Koordinaten-Teilsystemen für die einzelnen Parallelkreisbildpunkte mit Hilfe der (ξ, η) und einem mittlern Querkrümmungshalbmesser sei als die zweckmäßigste am meisten empfohlen. Man braucht zu ihr außer der vorliegenden (ξ, η)-Tafel nur eine Tafel der Querkrümmungshalbmesser des Referenzellipsoids, die weite Intervalle haben kann, und eine Tafel der ausgerechneten Meridianbogenlängen, deren Intervall ebenfalls nicht eng zu sein braucht. Daß es ganz ohne Bedeutung ist, außer den y, für die sich die 5-stellige Rechnung mit dem Querkrümmungshalbmesser (für ziemlich bedeutende Breitenunterschiede genügend als konstant anzusehen) von selbst versteht, auch die $x = \frac{(\xi - \varphi)'' \cdot r}{\varrho''}$, bei denen r eigentlich gleich dem Meridiankrümmungshalbmesser zu nehmen wäre, mit dem Querkrümmungshalbmesser zu rechnen, ist schon oben, angesichts der stets ganz geringen Werte dieser x, als zulässig nachgewiesen. Ist nur eine Tafel der Ellipsoidkrümmungshalbmesser im Meridian und im I. Vertikal zur Hand, aber keine Tabelle der Meridianbogenlängen, so ist noch daran zu erinnern, daß man, selbst für bedeutende Ausdehnung der Karte in der Richtung SN, die Meridianbogenstücke zwischen nicht zu weit voneinander entfernten Parallelkreisen φ_1 und φ_2 näherungsweise rechnen kann als Kreisbögen, deren Zentriwinkel der Unterschied der Breiten jener Parallelen $(\varphi_2 - \varphi_1)$ und deren Halbmesser der Krümmungshalbmesser des Meridians in der Mittelbreite $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ ist. Rektifiziert man auf diese Art einen Meridianbogen von 1° Amplitude, d. h. nimmt man als Länge des Meridianbogens zwischen den Breiten $\varphi - \frac{1}{2}^\circ$ und $\varphi + \frac{1}{2}^\circ$ den Wert

$$M_{1^\circ} = r_m \cdot \frac{1}{\varrho^\circ},$$

wo r_m den Meridiankrümmungshalbmesser in der Breite φ bedeutet, so ist der damit in M_{1° begangene Fehler genähert nur

$$\triangle M_{1^\circ} = r_m \cdot \frac{1}{8} e^2 \cdot \frac{1}{(57,3)^3} \cdot \cos 2\varphi,$$

d. h. dieser Fehler beträgt an den Grenzen $\varphi = 30^\circ$ und $\varphi = 60^\circ$ der Tafel II. $\left(\text{also mit } \cos 2\varphi = \frac{1}{2} \text{ und } \cos 2\varphi = -\frac{1}{2}\right)$ nur etwa $1\frac{1}{2}$ cm, ist also für alle kartographischen Zwecke völlig gleichgültig. Auch Meridianbögen mit 2° (wo der Fehler aufs 8fache wächst) und selbst Meridianbögen mit 10° Amplitude $\left(\text{Fehler 1000mal so groß, d. h. rund 15 m oder etwa } \frac{1}{2}'' \text{ Breitenunterschied}\right)$ wird man für kartographische Zwecke stets auf die angegebene Art, sphärische Rechnung mit dem Meridiankrümmungshalbmesser der Mittelbreite und Zentriwinkel gleich dem Breitenunterschied der Endpunkte, verstrecken dürfen.

Diese dritte Art der Berechnung des kartographischen Netzes unsres nicht sehr großen Gebiets liefert eine Abbildung, die praktisch genau nicht verschieden ist von der Darstellung, die durch unmittelbare Anwendung der amerikanischen „Projection Tables" entsteht, falls diese Tafeln zur Hand sind. Es sei für die genäherte Darstellung nach dieser polykonischen Abbildung, falls die eben angeführten Tafeln nicht verfügbar sind, wohl aber Tabellen der Ellipsoidabmessungen, die außer den Meridianbogenlängen auch die Parallelkreisbogenlängen enthalten, auch nochmals angeführt mein bereits früher genannter Aufsatz „Zur Vergleichung der Gauß-Krügerschen Meridianstreifenprojektion mit der polykonischen Abbildung usw.", Zeitschr. für Vermessungswesen, Bd. 52

(1923) S. 241 bis 250, wo für den zuletzt genannten Fall abermals ein Abbildungsverfahren entwickelt ist, das so gut wie keine Rechnung erfordert und selbstverständlich ein Ergebnis liefert, das sich von dem jeder andern „vernünftigen" Projektionsart desselben Gebiets bei ∞-klein werdendem Gebiet nicht, bei kleinem Gebiet also sehr wenig unterscheidet.

4. Verzerrungen. Um endlich noch einen Überblick über die durch die Projektion verursachten Verzerrungen in unsrem eben behandelten Beispiel zu geben, bei dem sich das abzubildende Gebiet nur über $2\frac{1}{2}^\circ$ in Breite und über $< 1\frac{1}{2}^\circ$ in Länge zu beiden Seiten des Mittelmeridians erstreckt, seien in Tabelle 5. die Zahlen für die vermittelnde transversalzylindrische Abbildung für die Punkte mit Abständen von $\eta = \frac{1}{2}^\circ$, 1° und $1\frac{1}{2}^\circ$ vom Mittelmeridian angeschrieben, und zwar bei der hier selbstverständlich zulässigen Annahme sphärischer Rechnung. Sie zeigen, daß in $1\frac{1}{2}^\circ$ Abstand vom Mittelmeridian (also bereits jenseits des O- und W-Randes unsrer Karte) die Längenverstreckung in der Richtung N S (Maximum) nicht über $\frac{1}{3000}$ der Längen geht (in der Richtung W O ist sie überall Null) und diese Zahl ist zugleich die für die Flächenverzerrung. Die größte Schnittwinkelverzerrung endlich beträgt in Punkten mit $\eta = 1\frac{1}{2}^\circ$ vom Mittelmeridian wenig über $1'$, d. h. sie kommt ebenfalls für Messungen auf der Karte in keiner Weise in Betracht.

Tabelle 5.

η	$a = S$	b	Größte Längenverstreckung (N S)	Flächenverzerrung	Größte Schnittwinkelverzerrung
0°	1.00 000	1.00 000	0	relativ ebenso	$0''$
$\frac{1}{2}^\circ$	1.00 004	1.00 000	$\frac{1}{25\,000}$ der Länge	groß wie die	$8''$
1°	1.00 015	1.00 000	$\frac{1}{6500}$ „ „	links daneben-	$31'' = 0',5$
$1\frac{1}{2}^\circ$	1.00 034	1.00 000	$\frac{1}{3000}$ „ „	stehende Zahl	$70'' = 1',2.$