Koordinaten in der Kartenebene erhält, auch auf winkeltreue und flächentreue transversal-zylindrische Abbildungen übergehen kann, deren Annäherung an die entsprechenden ellipsoidischen Verhältnisse enger ist, als man nach der Veränderlichkeit der Krümmungshalbmesser (s. u.) vermuten möchte. Anwendungen auf azimutale Abbildungen spielen hier, im Gegensatz zum I. Heft, keine Rolle mehr.

II. Die Tafel II und ihre Anwendung. Kugelhalbmesser. Winkeltreue und flächentreue Karten.

1. Einrichtung der Tafel II. Über die Einrichtung dieser ausführlichen 10′-Tafel im Vergleich mit der 1°-Tafel im I. Heft sind wohl eingehendere Erläuterungen überflüssig, da die Unterschiede ohne weiteres ersichtlich sind. Diese konnten nicht überall zugunsten der Tafel II ausfallen. Insbesondere ist für den Gebrauch gelegentlich etwas störend, daß bei der Notwendigkeit, die Werte ξ und η für die Unterteile 10′, 20′, ... 50′ in φ je auf eine Zeile nebeneinander zu stellen und bei der für eine gewisse konstante Grenze in η (hier 5°) nicht konstanten Zahl der zu berücksichtigenden λ, die Zahl der für einen bestimmten Grad in φ erforderlichen Zeilen nicht konstant ist; so beansprucht z. B. der Grad $\varphi = 30°$ bis 31° 36 Zeilen, der Grad $\varphi = 59°$ bis 60° dagegen 60. Es war deshalb nicht möglich, jeden Grad in φ auf einer Seite zu erledigen; und bei der weitern Notwendigkeit, den Raum möglichst zu sparen, konnte auch nicht bei jedem neuen Grad mit einer neuen Seite begonnen werden, so daß die Anfänge neuer Grade in φ auf verschiednen Höhen der Seiten stehen. Doch wird dies kaum zu einem Versehen Anlaß geben können, wenn auch, wie schon gesagt, eine gewisse geringere Bequemlichkeit des Gebrauchs dieser Tafel im Vergleich mit I. zuzugeben ist.

Da es sich bei der Anwendung der Tafel II. nur um Karten größerer Maßstäbe handeln kann, die dann vielfach auch nicht mehr einblättrig sein, sondern nach Koordinatennetzlinien der Kartenebene in mehrere gleich große Blätter zu zerschneiden sein werden, so spielt hier die bei der Anwendung der Tafel I. im Vergleich mit der Berechnung ebener rechtwinkliger Koordinaten in den Vordergrund gerückte unmittelbare Konstruktion des Kartennetzes durch einen einfachen Längen- oder Transversalmaßstab (vgl. S. 20, 28 daselbst) die weniger wichtige Rolle; es werden vielmehr in den Fällen eines 10′-, 20′- oder 30′-Netzes, für die die Tafel II. ja gleichzeitig sorgt, immer die rechtwinkligen ebenen Koordinaten der Netzpunkte auszurechnen sein, was ja auch nur ganz kurze Zeit in Anspruch nimmt.

2. Wahl des Kugelhalbmessers. Von noch größerer Bedeutung als bei den 1°-Netzen (Tafel I) ist hier, bei Anwendung der Tafel II, die richtige Wahl des Halbmessers der Kugel, die für das abzubildende Stück der Ellipsoidoberfläche diese ersetzen soll. Es ist natürlich ganz verkehrt, für geographische oder kartographische Rechnungen, die sich den wirklichen Abmessungen auf der Erdoberfläche besser anpassen sollen als es die elementarsten Bedürfnisse der Schule verlangen, einen ein für allemal konstanten „mittlern“ Halbmesser der ganzen Erdkugel verwenden zu wollen. Daß sich solche „mittlere“ Halbmesser für die Erdkugel mit gleicher Oberfläche und die mit gleichem Volumen mit dem Erdellipsoid sehr wenig voneinander unterscheiden (z. B. für Bessel 6370,29 und 6370,28 km), und daß sogar der Halbmesser des Kreises von demselben Umfang mit der Meridianellipse nur ganz wenige Kilometer kleiner ist (bei Bessel 6366,74 km), berechtigt zwar, für die ersten Schulrechnungen $r = 6370$ km konstant anzunehmen; aber für praktische kartographische Rechnungen, besonders großer Maßstäbe, geht dies selbstverständlich nicht mehr an. Die beträchtliche Verschiedenheit der Krümmungshalbmesser des Erdellipsoids in Punkten mit verschiednen geographischen Breiten und für ein und denselben Punkt in verschiednen Richtungen (Azimuten) wird oft unterschätzt, weshalb hier einige Bemerkungen und Zahlen darüber eingeschaltet werden mögen. Es sei zunächst daran erinnert, daß der größte Krümmungshalbmesser, der an der Oberfläche des durch Umdrehung der Ellipse mit den Halbachsen a und b ($b < a$, und zwar, wenn e^2 das Quadrat der numerischen Exzentrizität der Ellipse, $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ bedeutet, $b = a\sqrt{1 - e^2}$) um die kleine Achse entstehenden Ellipsoids vorhanden ist, in den Erdpolen, $\varphi = \pm 90°$, sich findet; er ist dort zudem nach jeder beliebigen Richtung hin derselbe, nämlich $\frac{a^2}{b} = \frac{a^2}{a\sqrt{1-e^2}} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}$, und ferner dort mit der Breite wenig veränderlich, so daß man in den Polarregionen weitgehend und auch für die feinern Rechnungen ein Stück der ellipsoidischen Erdoberfläche durch eine Kugelfläche von dem eben angegebenen, oder, für etwas größern Abstand vom Pol, mit einem nur wenig verringerten Halbmesser ersetzen kann. In einem Punkt mit beliebiger anderer geographischer Breite als $\varphi = 90°$ oder nahezu 90° dagegen sind die Krümmungshalbmesser in verschiednen Richtungen (Azimuten) in diesem Punkt verschieden: es ist unter den ∞-vielen Krümmungshalbmessern in diesem Punkt stets ein Minimalwert vorhanden, und zwar in der Richtung des Meridians liegend (Meridiankrümmungshalbmesser, dem Maximum der Krümmung in dem Punkt entsprechend), und ebenso ein Maximalwert der Krümmungshalbmesser (in der Richtung senkrecht zur Meridianlinie in dem Punkt liegend, Querkrümmungshalbmesser oder Krümmungshalbmesser im I. Vertikal, dem Minimum der Krümmung in dem Punkt entsprechend). Der Unterschied zwischen dem kleinsten (Meridian-) Krümmungshalbmesser und größten (Quer-) Krümmungshalbmesser, der in einem Punkt mit der Breite φ vorhanden ist (für $\varphi = 90°$ ist wie oben angegeben dieser Unterschied 0, alle Krümmungshalbmesser gleich groß), steigert sich mit abnehmender geographischer Breite und erreicht seinen größten Wert in einem Punkte des Äquators, $\varphi = 0$. In einem solchen Punkt $\varphi = 0$ ist der Meridiankrümmungshalbmesser (Minimum; der kleinste Krümmungshalbmesser, der auf der ganzen Erdoberfläche vorhanden ist) $\frac{b^2}{a} = \frac{a^2(1-e^2)}{a} = a(1-e^2)$, der Querkrümmungshalbmesser (Maximum daselbst) offenbar $= a =$ Äquatorhalbmesser. Diesen Veränderungen der Krümmungshalbmesser gemäß treten Unterschiede in der Länge der Großkreisbögen und in den Flächen bei sphärischer Rechnung im Vergleich mit den entsprechenden Längen der geodätischen Linien und den Flächen der Ellipsoidoberfläche ein, wie man auch den Halbmesser der Rechnungskugel wählen mag. Vgl. zu dem Vorstehenden u. a. meinen elementaren Aufsatz „Über die Fehler bei Ersetzung der ellipsoidischen Erdoberfläche durch eine Kugelfläche“, Zeitschr. für Schulgeogr. (Becker, Wien), Jahrg. 1900 (Bd. XXI), S. 161—172; auch meine Notiz „Einige Bemerkungen über die Krümmungshalbmesser am Erdellipsoid“ in der Zeitschr. für Vermessungswesen 1906, S. 434—439.

Weder in die Polarregionen mit den für rein sphärische Rechnung günstigsten noch in die Äquatorregion mit den für diese Annahme ungünstigsten Krümmungsverhältnissen reicht nun die vorliegende Tafel II hinein; ihre Grenzen in Breite sind vielmehr 30° und 60°. Trotzdem ist in die folgende kleine Zahlenübersicht der Hauptkrümmungshalbmesser für das Besselsche Ellipsoid ($a = 6377{,}4$ km, $b = 6356{,}1$ km) auch $\varphi = 0°$ und $\varphi = 90°$ aufgenommen; r_m bezeichnet je den Meridiankrümmungshalbmesser (Minimum), r_n den Querkrümmungshalbmesser (Maximum) im Punkt mit der Breite φ. Der relative Unterschied beider Werte steigt von $\varphi = 90°$ (Pol) mit 0 bis zu $\varphi = 0°$ (Äquator) auf ein $\frac{1}{150}$ der r an. Der Unterschied zwischen größtem (Pol) und kleinstem Krümmungshalbmesser (Äquatorpunkt, in Meridianrichtung) auf der Erdoberfläche überhaupt beträgt 64 km oder rund $\frac{1}{100}$ (1 v. H.) eines Mittelwerts der Krümmungshalbmesser. Der Meridiankrümmungshalbmesser steigt vom Äquator bis zum Pol um eben diesen gleichen Betrag von rund 64 km oder also rund $\frac{1}{100}$ seiner Länge, der Querkrümmungshalbmesser nur um 21,4 km oder rund $\frac{1}{300}$ der Länge.

Wählt man also für ein bestimmtes kleines Stück des Ellipsoids, in der Absicht, mit den (ξ, η) rein sphärisch rechnen zu können, als Kugelhalbmesser den in der Mittelbreite φ_0 vorhandenen Betrag r_{m,φ_0} oder r_{n,φ_0}, so fallen bei der $\left\{\begin{matrix}\text{ersten}\\ \text{zweiten}\end{matrix}\right\}$ Annahme die Abmessungen in der Richtung des Meridians oder NS $\left\{\begin{matrix}\text{nahezu richtig}\\ \text{zu groß}\end{matrix}\right\}$, die Abmessungen in der Richtung senkrecht dazu oder WO dagegen $\left\{\begin{matrix}\text{zu klein}\\ \text{nahezu richtig}\end{matrix}\right\}$ aus,

φ	r_m (km)	r_n (km)	Unterschied (km)	Unterschied (rund relativ)
0°	6334,8	6377,4	42,6	$\frac{1}{150}$ von r
30°	6350,7	6382,7	32,0	$\frac{1}{200}$ „ „
45°	6366,7	6388,1	21,4	$\frac{1}{300}$ „ „
60°	6382,7	6393,4	10,7	$\frac{1}{600}$ „ „
90°	6398,8	6398,8	0	0

wobei die Beträge dieses zu groß oder zu klein nach der vorstehenden kleinen Übersicht überschlagen werden können. Man wird demnach, wenn tatsächlich an der rein sphärischen Rechnung festgehalten werden soll, jedenfalls ein r wählen, das zwischen r_{m,φ_0} und r_{n,φ_0} liegt, am besten $r = \sqrt{r_{m,\varphi_0} \cdot r_{n,\varphi_0}}$. Man wird sich aber auch gelegentlich dazu entschließen, überhaupt auf die Anwendung eines Halbmessers bei sphärischer Rechnung zu verzichten, nämlich die x aus den ξ mit Hilfe von r_{m,φ_0}, die y aus den η dagegen mit Hilfe von r_{n,φ_0} berechnen, d. h. so verfahren, wie man es in einer der Elementaraufgaben der höhern Geodäsie, Berechnung von geographischen (ellipsoidischen) Koordinaten aus gegebenen rechtwinkligen Koordinaten auf nicht sehr großem Gebiet, zu machen pflegt. Oder kartographisch noch anders gesprochen: Man wird in diesen Fällen, wenn, wie es meist zutreffen wird, eine Tafel der ellipsoidischen Meridianbogenlängen des Referenzellipsoids zur Hand ist, die Schnittpunkte der einzelnen Parallelkreisbilder mit dem genau gradlinigen Mittelmeridianbild auf diesem dem Kartenmaßstab entsprechend auftragen und sodann für jedes einzelne Parallelkreisbild der Karte ein besondres ebenes Teilkoordinatensystem annehmen; in diesen Teilsystemen kommen dann nur so kleine x vor, daß sie von der Wahl des Kugelhalbmessers fast ganz unabhängig werden und mit dem Rechenschieber aus den $(\xi - \varphi)$ berechnet werden können, während für die Berechnung der y aus der Tafel der η der Querkrümmungshalbmesser zu benützen ist, der dann in fast allen praktischen Fällen als konstant und der Mittelbreite entsprechend als r_{n}, φ_0 angenommen werden kann. Dieses Verfahren wird ein den richtigen Ellipsoidabmessungen am besten sich anschließendes Kartenbild liefern. Welche dieser Möglichkeiten im einzelnen Fall zu wählen ist als hinreichend oder notwendig, muß für diesen Fall entschieden werden; vgl. dazu auch das Beispiel im Abschnitt III.

3. Winkeltreue und flächentreue transversal-zylindrische Karten. Die in **2.** besprochene unmittelbare Anwendung der ξ und η liefert zunächst eine vermittelnde transversal-zylindrische Abbildung des nicht großen Gebiets, von dem im allgemeinen wieder angenommen wird, daß es sich in der Richtung des Mittelmeridians ziemlich weiter als in der Richtung WO erstreckt. Es hat nun natürlich keinen Anstand, ganz wie im I. Heft die Abbildung auch hier besser genähert winkeltreu oder aber genähert flächentreu zu machen. Man hat in beiden Fällen die ξ oder $(\xi - \varphi)$ unverändert der Tafel II. zu entnehmen, den Tafel-η dagegen im ersten Fall kleine positive, im zweiten ebenso kleine negative Zuschläge beizulegen. Diese Vergrößerungen oder Verkleinerungen sind noch für $\eta = 2°$ für alle kartographischen Zwecke unmerklich, wachsen aber mit η rasch, so daß sie bei $\eta = 5\frac{1}{2}°$ rund $\frac{1}{2}'$ erreichen. Vgl. die kleinen Zahlentafeln A und B im I. Heft, S. 17 und 18, die hier in der Ausdehnung für die η, die dem vorliegenden II. Heft als Grenze gesetzt ist, wiederholt und, ebenfalls mit der Genauigkeit auf 0'',1, etwas ergänzt angeschrieben werden. (Die Schlußbemerkung S. 18 im I. Heft erledigt sich durch das in der obenstehenden Einleitung **I.** über die Abänderungen der Tafel II. im Vergleich mit dem im frühern Programm Gesagten.)

Tafel A. Unterschiede $\left\{ l_n\, tg \left(45° + \frac{\eta}{2}\right) - arc\, \eta \right\} . \varrho''$;

für winkeltreue Abbildung zu η zu addieren.

η	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'
0°	0'',0	0'',0	0'',0	0'',0	0'',1	0'',1	0'',2
1°	0 ,2	0 ,3	0 ,4	0 ,6	0 ,8	1 ,1	1 ,5
2°	1 ,5	1 ,9	2 ,3	2 ,9	3 ,5	4 ,2	4 ,9
3°	4 ,9	5 ,8	6 ,8	7 ,8	9 ,0	10 ,3	11 ,7
4°	11 ,7	13 ,2	14 ,9	16 ,7	18 ,6	20 ,7	22 ,9
5°	22 ,9	25 ,3	27 ,8	30 ,5	33 ,3	36 ,4	39 ,6

Tafel B. Unterschiede $\{arc\,\eta - sin\,\eta\}\,.\,\varrho''$;
für flächentreue Abbildung von η abzuziehen.

η	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′
0°	0″,0	0″,0	0″,0	0″,0	0″,0	0″,1	0″,2
1°	0 ,2	0 ,3	0 ,4	0 ,6	0 ,8	1 ,1	1 ,5
2°	1 ,5	1 ,9	2 ,3	2 ,9	3 ,5	4 ,2	4 ,9
3°	4 ,9	5 ,8	6 ,8	7 ,8	9 ,0	10 ,3	11 ,7
4°	11 ,7	13 ,2	14 ,9	16 ,7	18 ,6	20 ,6	22 ,8
5°	22 ,8	25 ,2	27 ,7	30 ,4	33 ,2	36 ,3	39 ,5

Wie man sieht, stimmen die Zahlen der zwei Tafeln **A.** und **B.** bis zu $\eta = 4°\,40'$ bis auf die 0″,1 überein, erst von da an sind, bis zu $\eta = 6°\,0'$, die Zahlen von **B.** je um 0″,1 kleiner als die von **A.** Über die Relativität der Ausdrücke winkeltreue und flächentreue Abbildung, die streng richtig nur für den Fall wären, daß es sich um die Abbildung eines Kugel-Meridianstreifens, nicht eines Ellipsoid-Meridianstreifens auf die Ebene handeln würde, werden nach den Erläuterungen in **2.** keine Angaben mehr notwendig sein.

III. Zahlenbeispiel.

Übersichtskarte von Württemberg in 1:400000.

Um an Raum zu sparen, muß hier, im Gegensatz zum I. Heft, ein einziges Beispiel genügen. Es mag dazu eine einblättrige Karte gewählt werden; das Zerschneiden einer größern Karte nach runden, rechtwinkligen Koordinatennetzlinien der Kartenebene in gleich große Blätter bringt ja keine Schwierigkeit.

Die vom Württembergischen Statistischen Landesamt herausgegebne Übersichtskarte von Württemberg im Längenmaßstab 1:400000 enthält im S noch den Züricher See und reicht im N bis Walldürn in Baden und Neustadt in Bayern, im W bis zu der Linie Aarau-Bergzabern, im O bis über die Linie Kaufbeuren-Öttingen hinaus. Es soll ein Halbgradnetz für die Karte entworfen werden, und zwar den angegebnen Grenzen entsprechend in Breite von 47° 0′ bis 49° 30′ gehend (im S also etwas über die notwendige Linie hinaus) und, mit 27° 0′ östlich von Ferro als Mittelmeridian, in Länge von 25° 30′ bis 28° 30′. Die Netzpunkte sind also $\lambda = 0°\,30'$, $1°\,0'$ und $1°\,30'$ zu beiden Seiten des Mittelmeridians für die 6 Parallelkreise 47° 0′, 47° 30′, 48° 0′, 48° 30′ 49° 0′ und 49° 30′.

Wir entnehmen vor allem der Tafel II. folgenden Auszug (Tabelle 1.) für unser Gebiet, wobei allemal $(\xi - \varphi)$ die obere und η die untere Zahl ist: