Die Tafeln I der (ξ, η) sind am **Schluß** dieses Buchs auf Seite [1] bis [60] zusammengestellt, weil damit bestimmte Zahlen in ihnen leichter aufzusuchen sind. Die S. [1] bis [30] geben die ξ, [31] bis [60] die η; auf jeder Seite steht ferner oben ξ oder η, endlich wird auch die Verschiedenheit der Umrahmungen Verwechslungen ausschließen helfen.

IV. Unmittelbare kartographische Anwendung der Tafeln in III.: vermittelnde, dann aber auch mit Benützung der folgenden kleinen Hilfstafeln A, B winkeltreue und flächentreue 1°-Netze transversalzylindrischer Abbildungen.

Von Teilen der Erdoberfläche in der Gestalt verhältnismäßig schmaler Meridianstreifen liefert nun die Tafel I eine brauchbare (vermittelnde) Abbildung durch einfaches Auftragen der Werte (ξ, η) als rechtwinkliger ebener Koordinaten in der Kartenebene. Schon vor $1\frac{1}{2}$ Jahrzehnten habe ich gelegentlich von Referaten über kartographische Arbeiten in den Gothaer P.M. ein Hilfsmittel in Aussicht gestellt, das für viele Zwecke genügende 1°-Netze geographischer Karten von beliebigen kleinern Stücken der Erdoberfläche unmittelbar, ohne jede Rechnung, aufzutragen gestatten werde; merkwürdigerweise, ohne daß diese Ankündigung, trotz Wiederholung, Interesse erregt zu haben scheint. Dieses Hilfsmittel ist nun hier in den (ξ, η) der Tafel I geboten; vielleicht wird es nunmehr, wo es tatsächlich anwendbar geworden ist, mehr Beachtung finden.

Wenn ein Gebietsstreifen längs dem Erdäquator in beliebiger Erstreckung von W nach O, aber bei nicht zu großem Bereich zu beiden Seiten des Äquators, vermittelnd auf die Ebene abgebildet werden soll (vermittelnd, d. h. mit geringerer Flächenverzerrung, als sie der winkeltreuen zylindrischen oder Mercator-Abbildung und mit geringerer Winkelverzerrung, als sie der flächentreuen zylindrischen [Lambert-] Abbildung eigen ist), so ist das geometrisch unmittelbar Gegebene, daß als abwickelbare Hilfsfläche der die Erde im Äquator berührend umhüllende Kreiszylinder benützt wird, wie bei Mercator und bei Lambert, auf dessen Mantellinien aber die Erdmeridiane rektifiziert aufgetragen werden, so daß nach der Abwicklung in die Kartenebene die Meridianbilder längentreu sind; während bei Mercator die Meridianbögen vergrößert, bei Lambert verkleinert aufgetragen werden müssen, sind die Äquatorabschnitte in allen drei Entwürfen identisch (längentreues Äquatorbild). Es entsteht die in der Nautik so benannte Plattkarte, und zwar die quadratische Karte dieser Art; über die rechtwinklige siehe unten. Wird diese Karte bis zu $\varphi = 15°$ N und S vom Äquator ausgedehnt, so ist in den Punkten dieses Parallelkreisbildes (15°) erst eine

Max.-Winkelverzerrung $\left(\text{mit } \sin\omega = tg^2 \frac{\varphi}{2}\right)$ von $2\omega = 1°\,59'$,

ferner eine Max.-Dehnung des Parallelkreisbildes (15°) [mit $a = \sec\varphi$] von $a_{15°} = 1{,}035$ oder $3^1/_2$ v. H. vorhanden, während in der Meridianrichtung überall richtiges Längenmaß herrscht; es ist also auch das Flächenverhältnis $S = a\,.\,1 = a = \sec\varphi$ bei $\varphi = 15°$ noch nicht über eine Flächenverzerrung von $3^1/_2$ v. H. der Flächen hinausgegangen. Auf dem Parallelkreisbild (30°) steigern sich die angeschriebenen Zahlen allerdings bereits auf das Vierfache, $2\,\omega_{30°} = 8^1/_4{}°$, $a_{30} - 1 = S_{30} - 1 = 0{,}155$, über 15 v. H.; dagegen gehen auf dem Parallelkreisbild (10°) die Zahlen auf $\frac{4}{9}$ der erstgenannten Beträge, also unter die Hälfte herab. Für Atlaskarten kleiner Maßstäbe kommen also bei Ausdehnung der quadratischen Plattkarte in normaler Lage bis zu 10° N und S vom Äquator die Abbildungsverzerrungen so gut wie nicht in Betracht.

Was nun die geographischen Koordinaten $(\lambda\,,\,\varphi)$ bei der „normalen Lage" der Projektion, d. h. der Abbildung eines verhältnismäßig schmalen Äquatorstreifens, für die Einfachheit der Zeichnung der zylindrischen Entwürfe leisten, bieten die vorliegenden $(\xi\,,\,\eta)$-Tafeln ebenso unmittelbar für die „transversale Lage" zylindrischer Projektionen, d. h. für die Abbildung schmaler Gebietsstreifen längs einem bestimmten Mittelmeridian: alles, was für die $(\lambda\,,\,\varphi)$ bei den normalen zylindrischen Entwürfen gilt, gilt ganz genau ebenso für die $(\xi\,,\,\eta)$ bei den transversalen zylindrischen Entwürfen, wobei allerdings im zweiten Fall noch von der Abplattung der Erdoberfläche (Elliptizität der Erdmeridiane) abgesehen wird, was bei richtiger Wahl des Kugelhalbmessers für die kleinern Maßstäbe, die bei 1°-Netzen allein in Betracht kommen, keinen Anstand hat. Die $(\xi\,,\,\eta)$ der Tafel I liefern also z. B. ganz in derselben Art das 1°-Netz einer transversalen Plattkarte, wie die $(\lambda\,,\,\varphi)$ in der normalen Lage (Äquatoriallage) der Projektion; daß man dort (transversal) durch die $(\xi\,,\,\eta)$ als rechtwinklige ebene Koordinaten nur die Lage der 1°-$(\lambda\,,\,\varphi)$-Punkte erhält, und diese Punkte noch durch Kurven verbunden werden müssen, um die Bilder der Meridiane und Parallelkreise zu erhalten (was aber meist, wenigstens für die Meridiane, mit dem Lineal noch angeht), während hier (normale oder äquatoriale Lage) das Lineal sogleich das fertige Bild der Netzlinien liefert, ist ohne grundsätzliche Bedeutung. Für die Abbildungsverzerrungen gelten die oben für die normale Lage angegebenen Zahlen, wenn man nur die dortigen φ-Werte durch die gleichen η-Werte ersetzt.

Bemerkenswert und deshalb noch besonders hervorzuheben ist für diese unmittelbare Verwendung der transversalen (ξ, η) in derselben Art, in der man in der normalen Lage die (λ, φ) verwendet, daß man dort ebensowenig wie hier notwendig hat, für z. B. die vermittelnde zylindrische Abbildung die ξ- (oder die $\xi' = \xi - \varphi_0$) und die η-Werte rechnerisch in die aufzutragenden Koordinaten-Strecken (mm) der Karte zu verwandeln (obwohl diese Arbeit gering ist, vgl. Abschnitt **V.**), nämlich, wenn $1:M$ den Längenmaßstab der Karte in den Punkten des Mittelmeridians und längs jedem Hauptkreisbild und R den Kugelhalbmesser bedeutet, nicht zu berechnen braucht:

$$(5) \qquad \mathfrak{x}\,(\text{Karte}) = \frac{(\xi \text{ oder } \xi')''}{\varrho''} \cdot \frac{R}{M} \quad \text{und}$$

$$(6) \qquad \mathfrak{y}\,(\text{Karte}) = \frac{\eta''}{\varrho''} \cdot \frac{R}{M}\,, \quad \text{wobei } (\xi \text{ oder } \xi')''$$

und η'' die in $''$ verwandelten (ξ, η)-Werte der Tafel oder auch nur zweckmäßig abgestufte runde Werte von (ξ, η), und ferner $\varrho'' = 206\,265''$ bedeuten. Man kann sich vielmehr, was viele für die noch geringere Mühe ansehen werden, rasch einen gewöhnlichen Strich-Längenmaßstab oder auch einen Transversalmaßstab herstellen, der zunächst für eine Anzahl runder Werte von $(\gamma)''$ mit genügend kleinem Intervall die entsprechenden Kartenstrecken

$$(7) \qquad \mathfrak{c}\,(\text{Karte}) = \frac{(\gamma)''}{\varrho''} \cdot \frac{R}{M}$$

aufgetragen enthält, und kann diesem Maßstab durch augenmaßschätzende (einfacher Streckenmaßstab) oder durch Transversaleneinteilung für beliebige nicht runde ξ und η die Kartenstrecken entnehmen. Die Herstellung eines solchen Maßstabs mit $\frac{R}{M} \cdot \frac{1^\circ}{\varrho^\circ}$ od. dgl. als Grundzahl ist, auch wenn Transversallinien verwendet werden sollen, das Werk weniger Minuten; und mit seiner Hilfe ist das Auftragen einer transversal-zylindrischen vermittelnden Abbildung eines nicht zu breiten Meridianstreifens in einem 1°-Netz mit Hilfe der (ξ, η) von Tafel I fast ebenso bequem wie die des Netzes für einen normalen (äquatorialen) Streifen mit Benützung der (λ, φ) der 1°-Punkte. Einiges Nähere folgt noch im Abschnitt **V.** bei den dortigen Beispielen.

Rechteckige Plattkarten. Es bedarf für den aufmerksamen Leser des Vorstehenden wohl kaum der besondern Erinnerung, daß man es mit der (ξ, η)-Tafel auch in der Hand hat, ebenso einfach, wie es für die normale Lage der Projektion mit den (λ, φ) möglich ist, eine transversale rechteckige Plattkarte statt der bisher betrachteten quadratischen zu zeichnen. Man hat dazu nur die ξ oder $\xi' = \xi - \varphi_0$ in einem etwas kleinern Maßstab aufzutragen als die η. Ist $1:M$ der Längenmaßstab der η, d. h. der jedenfalls längentreu aufzutragenden Hauptkreise, und will man statt des Meridianbilds $\eta = 0$ (Grundkreis) den Kleinkreis im sphärischen Abstand η_0 vom Grundkreis längentreu auftragen, so daß in den Punkten dieser beiden Kleinkreise η_0 links und rechts vom Mittelmeridianbild die Längenverzerrungen, Winkelverzerrungen, Flächenverzerrung verschwinden, so braucht man nur die ξ im Längenmaßstab $1:M_0 = 1:n\,.\,M$ $\left(\text{mit } n > 1,\ \text{nämlich } n = \frac{1}{\cos \eta_0}\right)$ aufzutragen; sei es nun, daß man von den ξ oder $\xi' = \xi - \varphi_0$ der Tafel den Teil $(n-1)\,.\,\xi$ oder $(n-1)\,.\,\xi'$ abzieht, um die so verminderten Zahlen mit demselben Maßstab $1:M$ wie die η auftragen zu können, sei es, daß man neben dem Maßstab $1:M$ für die η einen zweiten Maßstab $1:M_0$ für die unverändert gelassenen Zahlen ξ oder ξ' zeichnet. Die oben für den Fall $\eta_{max} = 15°$ angegebenen Verzerrungen lassen sich so auf Beträge herabdrücken, die z. B. für Schulkarten und für die meisten praktischen und selbst für wissenschaftliche Zwecke ohne Bedeutung sind.

Winkeltreue und flächentreue transversal-zylindrische 1°-Netze, ebenfalls mit unmittelbarer Benützung der (ξ, η)-Zahlen der Tafel I.

Ebenso bemerkenswert wie die vorstehend angegebenen Maßstab-Einrichtungen für die aufzutragenden rechtwinkligen Koordinaten der Kartenebene statt der direkten Berechnung aller einzelnen Karten-$\mathfrak{x}$- und -$\mathfrak{y}$-Strecken aus den ξ und η ist nun aber noch, daß man mit Hilfe zweier sehr einfach herzustellenden und im folgenden fertig gegebenen Zahlentäfelchen auch ebensoleicht wie vermittelnde transversal-zylindrische Abbildungen aus unserer (ξ, η) Tafel I auch transversal-zylindrische winkeltreue und transversal-zylindrische flächentreue 1°-Netze zeichnen kann.

Erinnern wir uns, daß für den Fall normaler Lage der Projektion (Äquatorial-Streifen) die rechtwinkligen Koordinaten des Kugelpunkts (λ, φ) in der Kartenebene, den Nullpunkt des Systems in dem Punkt des Äquatorbildes angenommen, von dem aus die λ gezählt werden und die Abszissenachse in diesem Äquatorbild, lauten (Kugelhalbmesser R, Längenmaßstab der Karte $1:M$)

$$x = \frac{R}{M}\,.\,arc\,\lambda \tag{8}$$

für alle normal-zylindrischen Abbildungen mit längentreuem Äquatorbild, während die y für die drei Fälle: vermittelnde Abbildung, winkeltreue Abbildung (Mercator-Karte), flächentreue Abbildung (Lamberts „isozylindrische Projektion") werden

$$(9)\quad \begin{cases} y_1 \text{ (vermittelnd)} = \dfrac{R}{M} \cdot arc\, \varphi \\ y_2 \text{ (winkeltreu)} = \dfrac{R}{M} \cdot l_n\, tg \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2}\right) \text{ (Mercatorfunktion)} \\ y_3 \text{ (flächentreu)} = \dfrac{R}{M} \sin \varphi \,. \end{cases}$$

Mit von Null aus wachsenden φ-Werten wachsen die y_2 immer stärker über die y_1 und sinken die y_3 immer stärker unter die y_1; für kleinere Werte von φ, z. B. bis zu 10° oder selbst etwas mehr, werden die Unterschiede der y für viele Zwecke ohne Bedeutung.

Genau dieselben Gleichungen (8) und (9) gelten nun für die transversal-zylindrischen Abbildungen vermittelnd, winkeltreu, flächentreu, wenn man in ihnen

λ durch ξ oder durch $\xi' = \xi - \varphi_0$ (mit φ_0 als an sich ganz beliebigem Anfangsbreitenpunkt auf dem Mittelmeridian) und ebenso

φ durch η ersetzt und das rechtwinklige ebene Koordinatensystem so annimmt, daß der Nullpunkt für die x in der Breite φ_0 und die x-Achse in der Richtung des Mittelmeridianbildes liegt. Die „Vermittlung" der zwischen winkeltreu und flächentreu (s. u.) stehenden Abbildungen, von denen hier allein die wichtigste y_1 in Betracht gezogen wird, die die Hauptkreise der η längentreu abbildet, und die allesamt kleinere Flächenverzerrung als die winkeltreue und kleinere Winkelverzerrung als die flächentreue Abbildung haben, zeigt sich darin, daß

$$y_2 > y_1 > y_3 \quad \text{(also} \quad y_1 < y_2 \quad \text{und} \quad y_1 > y_3) \quad \text{ist.}$$

Es liegt nun nahe, besonders für den wichtigsten Fall kleinerer Werte von η, die Unterschiede

$$(10)\quad \begin{cases} l_n\, tg \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\eta}{2}\right) - arc\, \varphi \quad \text{und} \\ arc\, \varphi - \sin \varphi \quad \text{oder besser sogleich die Unterschiede} \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} \left[l_n\, tg \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\eta}{2}\right) - arc\, \varphi\right] . \varrho'' \quad \text{und} \\ (arc\, \varphi - \sin \varphi) . \varrho'' \quad \text{mit} \quad \varrho'' = 206\,264'',8 \end{cases}$$

ein für allemal mit genügend kleinen Intervallen auszurechnen und in je einer kleinen Hilfstafel zusammenzustellen. Man hat dann zusammen mit der Haupttafel der (ξ, η) ein Mittel, nicht nur vermittelnde transversal-zylindrische, sondern fast ganz ebenso bequem auch winkeltreue und flächentreue transversal-zylindrische 1°-Netze ohne jede Rechnung auftragen zu können und ohne mehr Mühe als bei der normalen Lage. Zur Berechnung dieser zwei kleinen Hilfstafeln kann man die Verwendung einer Tafel der Mercatorfunktion und einer Tafel der natürlichen Werte der Sinus voraussetzen, ebenso einfach ist aber auch, besonders für kleine Werte von η, die Anwendung der zwei Reihenentwicklungen für die Klammern in der zweiten Form (11) von (10) (vgl. das erste Beispiel im Abschnitt **V.**, wo der Rechenschieber verwendet ist); dies braucht hier wohl nicht ausführlicher dargestellt zu werden. Für größere Werte von η ist die unmittelbare Rechnung bequemer, besonders für die erste Gleichung (11) und beim Vorhandensein einer genügend ausführlichen Tafel der Mercatorfunktion (so etwa der von Börgen, Archiv der Deutschen Seewarte, 21. Jahrg., Hamburg 1898). In den folgenden zwei Tafeln A und B werden die zwei Hilfstafeln fertig ausgerechnet geboten, allerdings nur je bis zu $\eta = 11°$ ausgedehnt; wer die Tafeln innerhalb weiterer Ausdehnung, etwa bis $\eta = 20°$ oder gar 30° (noch größere η kommen sicher nicht in Betracht), braucht, mag die kleine Mühe der Berechnung nicht scheuen: Fortsetzung von A mit Börgens Tafel, Fortsetzung von B mit 6stelligen Tafeln der natürlichen Sinus-Werte, und für beide 6stelliger *arcus*-Werte. Die Unterschiede, die die Tafeln A und B liefern sollen, sind hier auf 0″,1 abgerundet angeschrieben; im Original sind sie, mit engern Intervallen, sogar auf 0″,01 berechnet, nämlich für die Zwecke der Zugrundlegung der später erscheinenden (ξ, η)-Tafel II mit 10′ Intervallen in λ und in φ und der beabsichtigten 0″,1-Genauigkeit in den (ξ, η) selbst.

Tafel A. Unterschiede $\left(l_n\, tg\left(45° + \frac{\eta}{2}\right) - arc\, \eta\right) . \varrho''$;

für winkeltreue Abbildung zu η zu addieren.

η	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′
0°	0″,0			0″,0			0″,2
1	0 ,2			0 ,6			1 ,5
2	1 ,5			2 ,9			4 ,9
3	4 ,9	5,8	6,8	7 ,8	9,0	10,3	11 ,7
4	11 ,7	13,2	14,9	16 ,7	18,6	20,7	22 ,9
5	22 ,9	25,3	27,8	30 ,5	33,3	36,4	39 ,6
6	39 ,6	43,0	46,6	50 ,4	54,3	58,5	1′ 2″,9
7	1′ 2″,9	1′ 7″,5	1′ 12″,4	1′ 17″,4	1′ 22″,7	1′ 28″,3	1 34 ,0
8	1 34 ,0	1 40 ,1	1 46 ,3	1 52 ,9	1 59 ,7	2 6 ,7	2 14 ,1
9	2 14 ,1	2 21 ,7	2 29 ,6	2 37 ,8	2 46 ,3	2 55 ,1	3 4 ,2
10	3 4 ,2	3 13 ,6	3 23 ,3	3 33 ,4	3 43 ,8	3 54 ,5	4 5 ,5

Tafel B. Unterschiede $(arc\,\eta - sin\,\eta)\,.\,\varrho''$; für flächentreue Abbildung von η abzuziehen.

η	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′
0°	0″,0			0″,0			0″,2
1	0 ,2			0 ,6			1 ,5
2	1 ,5			2 ,9			4 ,9
3	4 ,9	5,8	6,8	7 ,8	9,0	10,3	11 ,7
4	11 ,7	13,2	14,9	16 ,7	18,6	20,6	22 ,8
5	22 ,8	25,2	27,7	30 ,4	33,2	36,3	39 ,5
6	39 ,5	42,8	46,4	50 ,2	54,1	58,3	1′ 2″,6
7	1′ 2″,6	1′ 7″,2	1′ 12″,0	1′ 17″,0	1′ 22″,3	1′ 27″,8	1′ 33″,5
8	1 33 ,5	1 39 ,5	1 45 ,7	1 52 ,1	1 58 ,8	2 5 ,8	2 13 ,1
9	2 13 ,1	2 20 ,6	2 28 ,4	2 36 ,5	2 44 ,9	2 53 ,5	3 2 ,5
10	3 2 ,5	3 11 ,8	3 21 ,3	3 31 ,2	3 41 ,4	3 52 ,0	4 2 ,8

Bei $\eta = 5°$ beträgt die Differenz der absoluten Zahlenwerte der Tafeln A und B nur 0″,05, bei $\eta = 7°$ nur 0″,3, bei $\eta = 9°$ nur 1″, bei $\eta = 11°$ gegen 3″. Nach dem Überschlag S. 11 fallen ferner selbst bis zu $\eta =$ mehreren Graden für die Kartenmaßstäbe 1 : 1 Mill. und sogar noch 1 : 500 000 die drei zylindrischen Abbildungen: vermittelnd, winkeltreu und flächentreu innerhalb der Zeichnungsgenauigkeit noch vollständig zusammen, erst bei größern η, oder bei größern Maßstäben schon früher, wird der Unterschied in den Ordinaten merklich. Die Tafeln A und B werden ausführlicher und noch genauer berechnet s. Z. mit Tafel II (10′-Tafel) nochmals veröffentlicht werden.

V. Einige Beispiele zu IV.

Zu der in **IV.** behandelten unmittelbaren Verwendung der (ξ, η) Tafel I für die Zeichnung transversal-zylindrischer 1°-Netze mögen zunächst zwei Beispiele von Atlaskarten (also in kleinen bis sehr kleinen Maßstäben) durchgeführt werden.

Wir wollen dabei vorerst der durch die geometrischen Grundlagen gegebenen Voraussetzung eingedenk bleiben: je schmäler der abzubildende Meridianstreifen zu beiden Seiten des Mittelmeridians ist, d. h. je kleiner die η bleiben, desto günstiger fallen die Abbildungsverzerrungen aus.

1. Atlaskarte kleinern Maßstabs und nur mit 5°-Netz (so daß Tafel I nicht notwendig wäre, vielmehr meine Tafel für $\varphi_0 = 0$ in den „Kartenprojektionen" von 1889 für die $[\xi, \eta]$-Werte der Netzpunkte ausreichen würde).

Es soll eine Karte der Nilländer in dem kleinen Maßstab 1 : 15 Mill. und etwa in der Ausdehnung wie auf Seite 96 des „Schweizerischen Atlas für Mittelschulen" entworfen werden: Breiten von etwa $-5°$ bis