

II. Die neuen Tafeln

im folgenden kommen u. a. auch diesem Wunsch einigermaßen entgegen. Obwohl sie nämlich zunächst und unmittelbar nur die Verwandlung der geographischen (und zwar sphärischen) Koordinaten, d. h. also sphärischer Polarkoordinaten mit dem Nullpunkt in $\varphi_0 = 90^\circ$, in transversale sphärische Koordinaten oder also sphärische Polarkoordinaten mit $\varphi_0 = 0$ liefern, und zwar für ein 1° -Netz, sind sie nicht nur unmittelbar geeignet für Entwürfe transversal-zylindrischer 1° -Netze (und wie schon hier bemerkt sein mag, nicht nur vermittelnd, sondern auch winkeltreu und flächentreu) ohne jede weitere Rechnung (nur die Zeichnung eines Maßstabs, einfacher Längenmaßstab oder Transversalmaßstab kommt in Betracht), sie erleichtern vielmehr auch sehr merklich die rechnerische Vorbereitung der Zeichnung schiefachsigt-azimutaler 1° -Netze, wie unten näher zu zeigen sein wird.

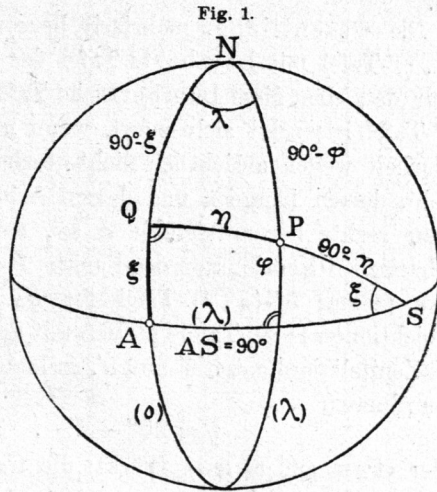
Für die zuletzt genannten 1° -Netze Zahlentafeln zu entwerfen in der Art meiner am Schluß von I. erwähnten Tafeln für 5° -Netze, und ebenso für Hauptpunktsbreiten mit 1° - statt 5° -Abstufung würde, auch bei Beschränkung der δ -Grenze auf je etwa $\delta = 30^\circ$ oder 40° vom Hauptpunkt, eine gar zu große Rechenarbeit verlangen und zurzeit fast unerschwingliche Druckkosten solcher Tafeln verursachen. Aber der Wunsch nach Aufstellung der folgenden Tafeln, zunächst der 1° -Tafel (sachlich gleichbedeutend mit Erweiterung der am Schluß von I. angeführten Lambert'schen Tafel auf das 1° -Intervall) wird hoffentlich durch die untenstehenden Darlegungen gerechtfertigt*).

Von solchen Zahlentafeln zur Umwandlung geographischer sphärischer Koordinaten in transversale gedenke ich nämlich zwei zu bieten: außer der folgenden, die ganze Kugeloberfläche umfassenden Tafel I, 1° -Tafel, später noch eine ebenfalls bereits fertig vorliegende Tafel II, mit $10'$ -Intervall für große Maßstäbe der Abbildung, jedoch nur auf die mittlern Breiten von $\varphi = 30^\circ$ bis 60° und auf nicht bedeutende Entfernung vom Grundmeridian ausgedehnt.

Das Folgende bezieht sich zunächst auf die Tafel I mit 1° -Intervallen. Die Tafel verwandelt die geographischen sphärischen Koordinaten eines beliebigen 1° -Punkts P oder (λ, φ) in die entsprechenden, auf den 0-Meridian der λ -Zählung bezogenen transversalen sphärischen Koordinaten (ξ, η) , vgl. die Figur 1 (S. 7.). Dabei sind die ξ auf dem Nullmeridian

*) Eine Mitteilung einer wichtigen auswärtigen amtlichen Stelle sprach mir kürzlich noch Zweifel am Nutzen einer solchen Erweiterung der in der Anmerkung *** S. 5 angeführten Tafel auf das 1° -Intervall aus.

der λ vom Äquator aus gezählt (bis zum Fußpunkt Q des sphärischen Lots PQ von P auf jenen Nullmeridian, Großkreis durch P senkrecht zum Nullmeridian) von 0° bis 90° ; die λ dagegen gemessen als Bögen je auf diesem sphärischen Lot PQ , vom Fußpunkt Q aus bis zum Punkt P oder (λ, φ) . In die Figur sind auch die Komplemente von φ , ξ , η eingetragen, ferner λ auch als Äquatorbogen und ξ außer als Meridianbogen auch als Winkel in S angegeben; dadurch wird ohne weiteres die oben mehrfach gestreifte, wesentliche Identität der Lambertschen Transformationstafel mit der folgenden transversalen deutlich (s. u.).



Zwischen den Argumenten (λ, φ) des Punkts P und den transversalen Koordinaten (ξ, η) bestehen die Gleichungen

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \lambda = \frac{\sin \eta}{\sin (90^\circ - \varphi)} \quad \text{oder also} \quad \underline{\sin \eta = \sin \lambda \cos \varphi} \\ \cos \lambda = \frac{\operatorname{tg} (90^\circ - \xi)}{\operatorname{tg} (90^\circ - \varphi)} \quad \text{,, ,,} \quad \underline{\operatorname{ctg} \xi = \cos \lambda \operatorname{ctg} \varphi} \end{array} \right\} \quad (2)$$

Nach diesen Gleichungen (2) sind die Tafeln I mit 6stelligen Logarithmen berechnet, und zwar ist in η und in ξ je auf $1''$ abgerundet; für die Abrundung zweifelhafte Fälle sind 7- bis 8stellig nachgerechnet. (Die später folgenden Tafeln II, Heft II und Schluß dieser Fortsetzung meiner „Kartenprojektionen“ von 1889 für das Gesamtbreitenintervall 30° bis 60° und bis zu $\eta = 10^\circ$ zu beiden Seiten des Mittelmeridians, ferner mit dem Intervall $10'$ in den Argumenten λ und φ , werden die ξ, η der $10'$ -Punkte ebenfalls auf $1''$ abgerundet liefern). Die Tafel I ist auf den ganzen Kugeloktanten mit dem Intervall 1° je in φ und in λ ausgedehnt. Was die Anordnung betrifft, so hatte ich zunächst beabsichtigt, die für den 1° -Punkt (λ, φ) gültigen (ξ, η) -Zahlen zusammen zu geben (unmittelbar übereinander oder nebeneinander zu setzen), habe aber dann doch, zum Teil aus Raumrücksichten, vorgezogen, für jeden der zwei Werte ξ und η eine besondere Tafel je mit Vorsetzung der Argumente (λ, φ) anzulegen, ganz ebenso, wie es für die zenitalen Koordinaten (α, δ) in den 5° -Tafeln der „Geogr. wichtigsten Kartenprojektionen 1889“ ge-

schehen ist. Ich denke, diese Einrichtung auch für die später folgende 10'-Tafel II festzuhalten. Einiges Weitere über die Anordnung der Tafel folgt unten.

Die wesentliche, mehrfach hervorgehobene Identität dieser neuen (ξ, η) -Tafel mit Lamberts Tafel der zenitalen Koordinaten für $\varphi_0 = 0$ (nur daß eben diese Lambertsche Tafel eine 5°-Tafel war, die neue eine 1°-Tafel ist) zeigt sich sofort, wenn man in der Figur 1 (was dort der Klarheit wegen absichtlich nicht geschehen ist) den Großkreisbogen AP zieht, dessen Länge δ und dessen Azimut in A , von AQ als Nullrichtung rechts herum gezählt α sei, so daß (α, δ) die für A zenitalen sphärischen Koordinaten des Punkts $P = (\lambda, \varphi) = (\xi, \eta)$ sind. Entnimmt man meiner 5°- (α, δ) -Tafel für $\varphi_0 = 0^\circ$ (Geogr. wichtigste Kartenprojektionen 1889, Tafel [1], [2]) mit den Argumenten φ und $\lambda' = 90^\circ - \lambda$ die Zenitalkoordinaten δ' und α' , so lauten für den Punkt (λ, φ) die (ξ, η) -Koordinaten

$$\eta = 90^\circ - \delta' \quad , \quad \xi = 90^\circ - \alpha' \quad (3)$$

oder etwas anders ausgedrückt: die transversalen (ξ, η) -Koordinaten des Punkts (λ, φ) erhält man aus jener (α, δ) -Tafel für $\varphi = 0^\circ$ mit Hilfe der Gleichung

$$\left. \begin{aligned} \eta_{\lambda, \varphi} &= (90^\circ - \delta)_{90^\circ - \lambda, \varphi} \\ \xi_{\lambda, \varphi} &= (90^\circ - \alpha)_{90^\circ - \lambda, \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Zum Überblick über die Beziehungen zwischen (λ, φ) und (ξ, η) lasse ich hier (S. 9) zunächst einen 10°-Punktauszug aus meiner (ξ, η) -Tafel folgen (die Werte von ξ und von η sind wie in der folgenden Haupttafel auf 1" abgerundet) und bitte, diese Tabellen 1a und 1b mit jenen zwei Tafeln [1] und [2] für $\varphi_0 = 0^\circ$ meines Buchs von 1889 mit Rücksicht auf (4) zu vergleichen. Einige Abweichungen bedeuten kleine Rechen- oder Abrundungsfehler in [1] und [2].

(Siehe Tafeln 1a und 1b S. 9.)

Die Anordnung der Argumente in dieser 10°-Übersicht ist in derselben Art gemacht wie in der folgenden Haupttafel I und entgegengesetzt der Anordnung in den zwei 5°-Tafeln [1] und [2] von 1889; nämlich oben herüber stehen die Breiten φ , links herunter stehen die λ . Verschiedene Rechner und Benützer der Tafeln werden verschiedener Ansicht über die Zweckmäßigkeit der einen und andern Anordnung sein.

Es mag hier auch noch ein Wort über andere „Transformatoren“ gegebener „sphärischer geographischer Koordinaten“ (oder am Himmel gegebener Äquatorialkoordinaten) in transversale sphärische Koordinaten (oder zölestisch Azimutal- oder Zenital-Koordinaten) beigelegt sein.

Tafel 1a: Werte der ξ für ein 10°-Netz (λ, φ).

λ	$\varphi =$									
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	00° 00' 00"	10° 00' 00"	20° 00' 00"	30° 00' 00"	40° 00' 00"	50° 00' 00"	60° 00' 00"	70° 00' 00"	80° 00' 00"	90° 00' 00"
10°	00 00 00	10 09 04	20 17 01	30 22 53	40 25 57	50 25 53	60 22 42	70 16 49	80 08 56	90 00 00
20°	00 00 00	10 37 39	20 10 22	31 34 00	41 45 48	51 44 40	61 31 08	71 07 06	80 35 31	90 00 00
30°	00 00 00	11 30 30	22 47 45	33 41 24	44 05 43	53 59 41	63 26 06	72 30 17	81 19 04	90 00 00
40°	00 00 00	12 57 45	25 24 50	37 00 16	47 36 21	57 16 03	66 08 29	74 25 14	82 18 27	90 00 00
50°	00 00 00	15 20 23	29 31 13	41 55 48	52 32 47	61 39 33	69 38 22	76 49 56	83 32 01	90 00 00
60°	00 00 00	17 25 31	36 03 09	49 06 24	59 12 37	67 14 22	73 53 52	79 41 09	84 57 42	90 00 00
70°	00 00 00	20 16 23	46 46 51	59 21 28	67 49 26	73 59 14	78 49 47	82 54 14	86 32 56	90 00 00
80°	00 00 00	45 26 19	64 29 40	73 15 38	78 18 29	81 42 36	84 16 30	86 23 01	88 14 46	90 00 00
90°	00 00 00	90 00 00	90 00 00	90 00 00	90 00 00	90 00 00	90 00 00	90 00 00	90 00 00	90 00 00

Tafel 1b: Werte der η für ein 10°-Netz (λ, φ).

λ	$\varphi =$									
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	00° 00' 00"	00° 00' 00"	00° 00' 00"	00° 00' 00"	00° 00' 00"	00° 00' 00"	00° 00' 00"	00° 00' 00"	00° 00' 00"	00° 00' 00"
10°	10 00 00	9 50 48	9 23 29	8 38 57	7 38 39	6 24 31	4 58 51	3 24 18	1 43 41	00 00 00
20°	20 00 00	19 41 01	18 44 50	17 13 46	15 11 20	12 42 00	9 50 48	6 43 04	3 24 18	00 00 00
30°	30 00 00	29 29 55	28 01 28	25 39 32	22 31 16	18 44 50	14 28 39	9 50 48	4 58 51	00 00 00
40°	40 00 00	39 16 24	37 09 31	33 49 33	29 29 55	24 24 16	18 44 50	12 42 00	6 24 31	00 00 00
50°	50 00 00	48 58 25	46 02 30	41 33 39	35 55 55	29 29 55	22 31 16	15 11 20	7 38 39	00 00 00
60°	60 00 00	58 31 30	54 28 07	48 35 25	41 33 39	33 49 33	25 39 32	17 13 46	8 38 57	00 00 00
70°	70 00 00	67 43 53	62 00 33	54 28 07	46 02 30	37 09 31	28 01 28	18 44 50	9 23 29	00 00 00
80°	80 00 00	75 53 38	67 43 53	58 31 30	48 58 25	39 16 24	29 29 55	19 41 01	9 50 48	00 00 00
90°	90 00 00	80 00 00	70 00 00	60 00 00	50 00 00	40 00 00	30 00 00	20 00 00	10 00 00	00 00 00

Solche Vorrichtungen sind außer in der Form von Zahlentafeln besonders auch in der Form von graphischen Tafeln (meist als Diagramme bezeichnet) in allen Genauigkeitsstufen, ferner in Form graphisch-mechanischer und rein mechanischer Hilfsmittel zahlreich hergestellt worden, und bereits vorhandene werden immer wieder erfunden. So hat z. B. der zu früh geschiedene K. Schwarzschild den von ihm in der Zeitschr. für Instr. Band 30, S. 75, 1910 veröffentlichten „Transformator“ für neu gehalten, während er bereits schon seit Jahrzehnten und in allen Genauigkeitsgraden der Ausführung zur Verwandlung von zölestischen Äquatorialkoordinaten in Azimutalkoordinaten, besonders für nautische, aber auch kartographische Anwendungen vorhanden und im Gebrauch war; vgl. die von Schwarzschild selbst herrührende berichtigende Notiz in demselben Band der Zeitschr. für Instr., S. 204, ferner etwa meine Trigonometrie (5. Aufl., Stuttgart 1923, S. 444), wo auch dieser Transformator im 5°-Netz abgebildet ist. — Auf andere Zahlentafeln als Transformatoren sphärischer Koordinaten, so besonders die zahlreichen Azimut- und Höhentafeln der Nautik, gehe ich hier gar nicht ein.

III. Die Tafeln der ξ , η für ein sphärisch-geographisches 1°-Netz

folgen nun auf den Seiten [1] bis [60] **am Ende dieses Buchs** in der in II. angegebenen Anordnung und Rechenschärfe. Es ist kaum etwas mehr hinzuzufügen, als ein Wort der prophylaktischen Entgegnung auf den Vorwurf der überflüssig großen Ausdehnung der Tafeln. Wenn sie nur kartographischen Zwecken dienen sollten, so würde allerdings für transversal-zylindrische Abbildungen die Ausdehnung bis zu $\eta = 20^\circ$ oder 25° oder höchstens 30° genügen, während für schiefachsige azimutale Abbildungen jedenfalls der Umfang bis zu $\eta = 40^\circ$ oder ähnlich (entsprechend dem auch in $\xi - \varphi_0$) ausreichen würde; denn wenn je im zweiten Fall noch etwas größere λ in Betracht kommen sollten, so braucht man auch für den Entwurf kein 1°-Netz mehr, sondern kann mit einem 5°-Netz auskommen, und für solche Netze ist, wie in II. angegeben, anderweit gesorgt. Da jedoch die Tafel I auch noch andern Zwecken dienen soll (wenn diese auch hier nicht eingehend zu besprechen sind), so glaube ich sie in Ausdehnung auf die ganze Kugeloberfläche geben zu sollen, d. h. die η durchaus bis zu 90° zu führen, wenn damit auch einige Seiten mehr in Anspruch genommen werden.

Unter diesen allgemeineren Zwecken der Tafel I sei hier wenigstens hervorgehoben die mit ihr gegebene vollständige Zusammenstellung von rechtwinkligen sphärischen Dreiecken (wenigstens solchen mit lauter spitzwinkligen Stücken). Die Tafel gibt unmittelbar die Auflösung