Daniel Tanke, BSc

Regime-Switching im Black-Scholes-Modell

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

Finanz- und Versicherungsmathematik

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer:
Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Wolfgang Müller

Institut für Statistik

Graz, Dezember 2015

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

AFFIDAVIT

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly indicated all material which has been quoted either literally or by content from the sources used. The text document uploaded to TUGRAZonline is identical to the present master's thesis.

Datum/Date	Unterschrift/Signature

Kurzfassung

Diese Masterarbeit beschäftigt sich mit einem Regime-Switching-Modell, das als Erweiterung des gewöhnlichen Black-Scholes-Modells interpretiert werden kann. Da dieses Regime-Switching-Modell unvollständig ist, beschreiben wir zunächst einmal die Menge aller äquivalenten Martingalmaße. Dabei gehen wir besonders auf das Minimale-Entropie-Martingalmaß und das Esscher-Martingalmaß ein. Dann betrachten wir einen spieltheoretischen Ansatz, um ein „geeignetes" Bepreisungsmaß zu bestimmen. Dieser Ansatz beschreibt ein stochastisches Spiel zwischen zwei Spielern, nämlich einem repräsentativen Agenten, der eine selbstfinanzierende Handelsstrategie wählt, um seinen erwarteten Nutzen zu maximieren, und dem Markt, der durch Wahl eines realen Wahrscheinlichkeitsmaßes den Nutzen des Agenten minimiert. Das daraus resultierende Maß ergibt sich durch Lösen einer Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs-Gleichung und erfüllt die Martingalbedingung.
Daraufhin werden wir das Regime-Switching-Modell vervollständigen, indem wir den Markt durch eine Reihe zusätzlicher Finanzgüter erweitern. Dadurch können alle integrierbaren Forderungen gehedgt werden.
Anschließend bestimmen wir eine Formel zur Berechnung des Preises einer europäischen Call-Option. Diese Formel beruht auf der charakteristischen Funktion des logarithmierten Aktienpreises. Um Optionen effizient bewerten zu können, stellen wir den FFT-Algorithmus vor. Hierbei gehen wir besonders auf die Bepreisung von Optionen mit sehr kurzen Laufzeiten ein und diskutieren die damit verbundenen numerischen Schwierigkeiten aufgrund von stark oszillierenden Integranden. Weiters analysieren wir die Unterschiede, die sich bei der Bewertung von Call-Optionen je nach Wahl des Bepreisungsmaßes ergeben. Dabei untersuchen wir die Bepreisung des sogenannten Regime-Switching-Risikos. Außerdem zeigen wir, dass im Gegensatz zum Black-Scholes-Modell ein Volatilitäts-Smile generiert werden kann. Bedingt auf ein Regime mit niedriger Volatilität ist der Smile wesentlich deutlicher ausgeprägt als bedingt auf ein Regime mit hoher Volatilität.
Schließlich kalibrieren wir unser Marktmodell bezüglich real beobachteter Optionspreise. Wir interpretieren das Problem der Kalibrierung als inverses Problem zur Bepreisung von Optionen. Durch Lösen des inversen Problems bestimmen wir die gesuchten Modellparameter und ein Bepreisungsmaß. Wir stellen auch noch eine Markov-Chain-Monte-Carlo-Methode vor, um die unbekannten Modellparameter aus einem Datensatz von beobachteten Log-Returns zu schätzen. Mit beiden Ansätzen können wir jeweils sehr zufriedenstellende Ergebnisse erzielen.

Abstract

This master thesis examines a regime-switching model, that can be seen as an extension of the classic Black-Scholes model. Since this regime-switching model is incomplete, we initially describe the set of all equivalent martingale measures. In doing so, we deal with the minimal entropy martingale measure and the Esscher martingale measure in great detail. Thereafter, we consider a game theoretic approach to determine a „reasonable“ pricing measure. This approach describes a stochastic game with two players, namely, a representative agent, who maximizes his expected utility by choosing a self-financing trading strategy and the market, that minimizes the agent's utility by selecting a real-world probability measure. The resulting measure is found by solving a Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs equation and satisfies the martingale condition.

Thereon, we complete the regime-switching model by augmenting the market with a set of additional assets enabling us to replicate every integrable claim perfectly.

Afterwards, we determine a pricing formula for European call options. This formula is based on the characteristic function of the log asset price. In order to value options efficiently, we introduce the FFT algorithm. In this respect, we consider option pricing for very short maturities and discuss the resulting numerical difficulties, caused by highly oscillating integrands. Furthermore, we analyze the differences, that result from valuing call options under various pricing measures. In doing so, we examine the so-called regime-switching risk. We also show, in contrast to the Black-Scholes model, that it is possible to generate a volatility smile. Given a regime with low volatility the smile is significantly steeper than given a regime with high volatility.

Finally, we calibrate our market model to real observed option prices. We understand the problem of calibration as the inverse problem associated to option pricing. By solving the inverse problem we determine the required model parameters and a pricing measure. We also introduce a Markov chain Monte Carlo method to estimate the unknown model parameters given a data set of observed log returns. In both approaches we achieve very satisfying results.

Danksagung

Zuallerst möchte ich meinem Betreuer, Prof. Wolfgang Müller, herzlich danken. Er nahm sich stets Zeit, um alle meine Fragen geduldig zu beantworten, und vermittelte mir durch seine fachliche Kompetenz neue Denkansätze.
Weiters möchte ich ganz besonders meinen liebevollen Eltern danken, die mir stets zur Seite standen und mir durch ihre Unterstützung die Fertigstellung dieser Arbeit ermöglicht haben.

Graz, Dezember 2015

Daniel Tanke

Inhaltsverzeichnis

1 Regime-Switching-Modell (RSM)

1.1 Motivation

In der Literatur werden zahlreiche unterschiedliche Marktmodelle diskutiert, um die Dynamik am Kapitalmarkt zu beschreiben. Dabei gilt vor allem das von Fischer Black und Myron Scholes im Jahr 1973 entwickelte Black-Scholes-Modell als ein Meilenstein der Finanzmathematik [4]. In diesem Modell wird angenommen, dass der Preis einer Aktie durch die Differentialgleichung

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_0 > 0$$

bestimmt ist. Dieses sehr einfach gehaltene Modell weist jedoch zahlreiche Schwächen auf und kann die am Markt beobachtete, reale Preisentwicklung nicht vernünftig wiedergeben, da sich sowohl Trend als auch Volatilität in der Realität keineswegs konstant über die Zeit verhalten. Aufgrund von politischen, sozialen und technologischen Entwicklungen können sich nämlich die makroökonomischen Bedingungen und damit einhergehend auch die Preisentwicklung am Kapitalmarkt jederzeit grundlegend ändern.

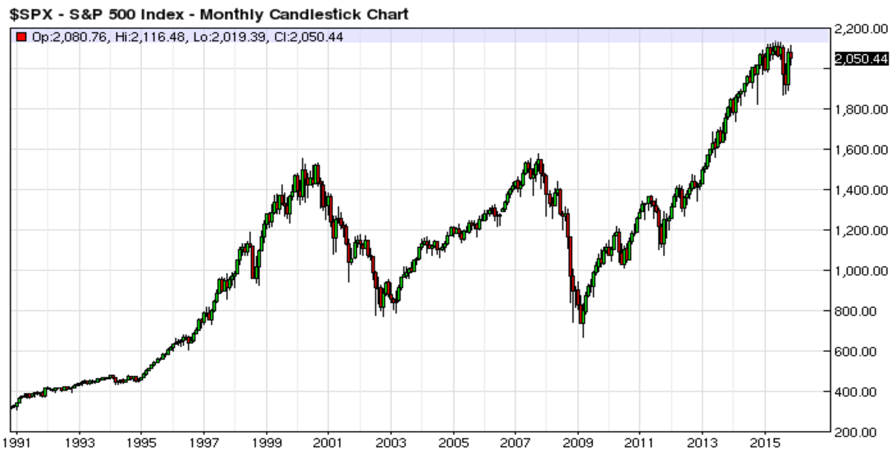


Abb. 1.1: Entwicklung des S&P 500 seit Beginn der 1990er, Quelle: http://www.barchart.com.

In der Darstellung des Standard & Poor's 500 der letzten 25 Jahre lassen sich zwei zyklisch wiederkehrende Muster erkennen: Einerseits gibt es Phasen mit positiver Marktentwicklung und geringer Volatilität. Diese sind durch optimistische Investoren geprägt. Wir sprechen dabei vom sogenannten Bull-Markt. Anderseits finden sich auch Phasen mit generell negativer Entwicklung und höherer Volatilität vor. In diesen Phasen herrscht allgemeiner Pessimismus. Wir bezeichnen einen solchen Markt als Bear-Markt.

Beginn	Ende	Dauer (in Monaten)	Jährliche Rendite
16/07/1990	11/10/1990	3	-60.6%
24/03/2000	09/10/2002	30	-23.3%
09/10/2007	09/03/2009	17	-44.7%

Tab. 1.1: S&P 500 Bear-Märkte seit Beginn der 1990er [24].

Beginn	Ende	Dauer (in Monaten)	Jährliche Rendite
11/10/1990	24/03/2000	113	19.0%
09/10/2002	09/10/2007	60	15.0%
09/03/2009	-	-	-

Tab. 1.2: S&P 500 Bull-Märkte seit Beginn der 1990er [24].

Damit wir die Existenz von Bull- und Bear-Märkten erklären können, werden wir in dieser Arbeit das sogenannte Regime-Switching-Modell diskutieren. In diesem Marktmodell steuert eine zeitstetige Markovkette mit endlichem Zustandsraum die Parameter μ und σ.

1.2 Modelldynamik

Betrachten wir ein zeitstetiges Marktmodell, in dem zwei Finanzgüter über einen endlichen Zeitraum $\tau = [0, T]$ gehandelt werden können: eine Aktie mit Preisprozess $S = (S_t)_{t\in\tau}$ und ein risikoloser Bond, dessen Preisprozess durch $B = (B_t)_{t\in\tau}$ gegeben ist. Beschrieben wird das Modell durch einen vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, wobei $\mathbb{P}$ das reale Wahrscheinlichkeitsmaß ist.
Sei $W = (W_t)_{t\in\tau}$ eine Brownsche Bewegung und $\mathcal{F}^W = (\mathcal{F}_t^W)_{t\in\tau}$ die von W erzeugte und bezüglich $\mathbb{P}$ vervollständigte, rechtsstetige Filtration. Weiters sei $Y = (Y_t)_{t\in\tau}$ eine zeitstetige, homogene, irreduzible Markovkette und $\mathcal{F}^Y = (\mathcal{F}_t^Y)_{t\in\tau}$ die von Y erzeugte und bezüglich $\mathbb{P}$ vervollständigte, rechtsstetige Filtration. Außerdem bezeichnen wir mit $\{1, \dots, d\}$ den endlichen Zustandsraum von Y und mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,d} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1} & a_{d,2} & \dots & a_{d,d} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

die dazugehörige Intensitätsmatrix, wobei

$$a_{i,j} \geq 0 \quad \text{für } i \neq j, \quad a_{i,i} = -\sum_{j\neq i} a_{i,j} < 0. \tag{1.1}$$

Wir bezeichnen die Matrix A auch als den infinitesimalen Generator von Y. Die Übergangsintensitäten $a_{i,j}$ mit $i \neq j$ legen die Verteilung von Y durch

$$\mathbb{P}(Y_{t+\Delta t} = j | Y_t = i) = a_{i,j}\Delta t + \mathrm{o}(\Delta t)$$

für $\Delta t \to 0$ fest. Wir schreiben $(P(s,t))_{s\leq t\in\mathcal{T}}$ für das System von Übergangsmatrizen der Markovkette Y, wobei die stochastische Matrix

$$P(s,t) = \begin{pmatrix} p_{1,1}(s,t) & p_{1,2}(s,t) & \dots & p_{1,d}(s,t) \\ p_{2,1}(s,t) & p_{2,2}(s,t) & \dots & p_{2,d}(s,t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{d,1}(s,t) & p_{d,2}(s,t) & \dots & p_{d,d}(s,t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{i,j}(s,t) = \mathbb{P}(Y_t = j | Y_s = i) = \mathbb{P}(Y_{t-s} = j | Y_0 = i)$$

für $s \leq t$ beinhaltet. Der Zusammenhang zwischen Intensitätsmatrix und Übergangsmatrix der Markovkette Y ist durch die Kolmogorov-Vorwärtsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} P(s,t) = P(s,t)A, \quad P(s,s) = I \tag{1.2}$$

bzw. durch die Kolmogorov-Rückwärtsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial s} P(s,t) = -AP(s,t), \quad P(t,t) = I \tag{1.3}$$

gegeben, wobei I die $(d \times d)$-Einheitsmatrix bezeichnet. Die beiden Gleichungen werden eindeutig durch $P(s,t) = \exp((t-s)A)$ gelöst [3]. Die Zustandswechsel von Y werden durch die wachsende Folge von Zeitpunkten $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$\tau_0 := 0, \quad \tau_{n+1} := \inf\{t > \tau_n : Y_t \neq Y_{\tau_n}\}$$

und die dabei von Y besuchten Zustände durch die Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschrieben. Wir verwenden die Konvention $\inf\{\emptyset\} := \infty$. Der Einfachheit der Notation halber identifizieren wir jeden Zustand mit einem Einheitsvektor, d.h. wir werden den i-ten Zustand mit

$$e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^d$$

identifizieren und $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_d\}$ ist dann der Zustandsraum. Das Pfadverhalten von Y lässt sich wie folgt erklären:
Angenommen, die Markovkette Y startet im Zustand Z_0, so verweilt Y bis zum Zeitpunkt τ_1 in Z_0. Die Verweildauer $T_1 = \tau_1 - \tau_0$ in Z_0 ist exponentialverteilt mit Parameter $|a_{Z_0,Z_0}|$. Zum Zeitpunkt τ_1 erfolgt ein Zustandswechsel gemäß der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{1,2}}{|a_{1,1}|} & \dots & \frac{a_{1,d}}{|a_{1,1}|} \\ \frac{a_{2,1}}{|a_{2,2}|} & 0 & \dots & \frac{a_{2,d}}{|a_{2,2}|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{d,1}}{|a_{d,d}|} & \frac{a_{d,2}}{|a_{d,d}|} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei Z_1 der neu angenommene Zustand von Y. Die Verweildauer in Z_1 wird durch die mit Parameter $|a_{Z_1,Z_1}|$ exponentialverteilte Zufallsvariable T_2 beschrieben. Zum Zeitpunkt $\tau_2 = \tau_1 + T_2$

erfolgt erneut ein Zustandswechsel gemäß der Übergangsmatrix P. Die Abb. 1.2 illustriert dieses Pfadverhalten:

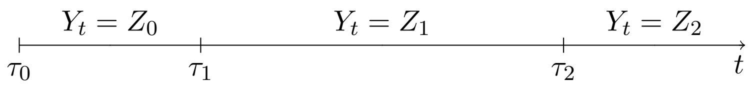


Abb. 1.2: Pfadverhalten der zeitstetigen Markovkette Y.

Sei r der risikolose Zinssatz. Die Dynamik des Bonds ist wie im gewöhnlichen Black-Scholes-Modell durch

$$dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1 \tag{1.4}$$

gegeben. Der Aktienpreisprozess S entwickelt sich im Regime-Switching-Modell hingegen gemäß der Differentialgleichung

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t), \quad S_0 > 0. \tag{1.5}$$

Dabei werden die Prozesse $(\mu_t)_{t\in\mathcal{T}}$ und $(\sigma_t)_{t\in\mathcal{T}}$ durch die Markovkette Y gesteuert und haben die Form

$$\mu_t = \langle \mu, Y_t \rangle, \quad \sigma_t = \langle \sigma, Y_t \rangle,$$

wobei

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d)^T \in \mathbb{R}^d, \quad \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_d)^T \in \mathbb{R}^d$$

mit $\sigma_i > 0$. Der Ausdruck $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^d$. Somit ist die Dynamik des Aktienpreisprozesses im Zustand e_i durch den Trend $\mu_i \in \mathbb{R}$ und die Volatilität $\sigma_i \in \mathbb{R}^+$ bestimmt. Mit der Itô-Formel (Satz B.8) erhalten wir

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \mu_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2 ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \right) = S_0 \exp(X_t), \tag{1.6}$$

wobei der Prozess $X = (X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ mit $X_0 = 0$ durch

$$X_t = \int_0^t \mu_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2 ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \tag{1.7}$$

gegeben ist. Weiters nehmen wir an, dass die Prozesse W und Y unter dem Maß $\mathbb{P}$ unabhängig sind. Sei $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ die von (W, Y) erzeugte Filtration, d.h. $\mathcal{G}_t = \sigma(\mathcal{F}_t^W, \mathcal{F}_t^Y)$.

Bemerkung. Beobachtet man den Prozess S, so kann man auch den Prozess X und dessen quadratische Variation $[X]_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds$ beobachten. Falls die Parameter σ_i paarweise verschieden sind, kennt man dann außerdem den Prozess $Y_- = (Y_{t-})_{t\in\mathcal{T}}$. Dabei sei $Y_{0-} := Y_0$.

Satz 1.1. Unter $\mathbb{P}$ ist der Prozess Y eine zeitstetige Markovkette bezüglich $\mathcal{G}$ und W eine Brownsche Bewegung bezüglich $\mathcal{G}$. Damit ist W insbesonders ein $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-Martingal.

Beweis. Sei $s < t$ und $e_j \in \mathcal{E}$. Weil wir angenommen haben, dass die Prozesse W und Y unabhängig sind, ist auch

$$\sigma(\sigma(1_{\{Y_t=e_i\}}), \mathcal{F}_s^Y) \subseteq \mathcal{F}_t^Y$$

unabhängig von $\mathcal{F}_s^W$. Mit Hilfe der Proposition B.1 und da Y eine Markovkette bezüglich $\mathcal{F}^Y$ ist, erhalten wir

$$\mathbb{E}_\mathbb{P}[1_{\{Y_t=e_i\}}|\mathcal{G}_s] = \mathbb{E}_\mathbb{P}[1_{\{Y_t=e_i\}}|\sigma(\mathcal{F}_s^W, \mathcal{F}_s^Y)] = \mathbb{E}_\mathbb{P}[1_{\{Y_t=e_i\}}|\mathcal{F}_s^Y] = \mathbb{E}_\mathbb{P}[1_{\{Y_t=e_i\}}|Y_s].$$

Somit ist Y eine zeitstetige Markovkette bezüglich $\mathcal{G}$ unter $\mathbb{P}$ [40]. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ können wir analog zeigen, dass

$$\mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(W_t-W_s)}\middle|\mathcal{G}_s\right] = \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(W_t-W_s)}\middle|\mathcal{F}_s^W\right] = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}(t-s)}$$

gilt, weshalb W eine Brownsche Bewegung bezüglich $\mathcal{G}$ unter $\mathbb{P}$ ist. □

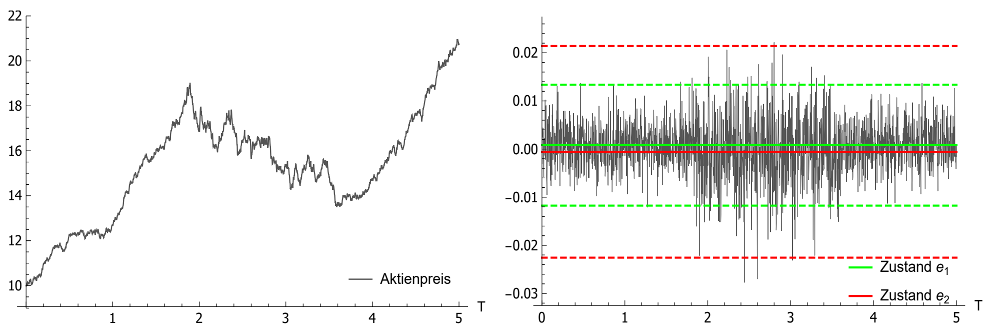
Modellbeispiel 1.2. Betrachten wir ein RSM über einen Zeitraum von $T = 5$ Jahren mit Anfangswert $S_0 = 10$. Die zeitstetige, homogene Markovkette Y hat $d = 2$ Zustände und folgt der Intensitätsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -a_{1,2} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & -a_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.25 & -0.25 \end{pmatrix}.$$

Weiters ist der Startzustand von Y gleichverteilt. Die Trend- und Volatilitätsparameter sind durch

$$\mu = (0.3, -0.2)^T \quad \text{und} \quad \sigma = (0.08, 0.14)^T$$

bestimmt. Die nachfolgende Abbildung zeigt einen realisierten Aktienpreisprozess mit Startwert $Y_0 = e_1$.



(a) (b)

Abb. 1.3: Realisation des Aktienpreisprozesses (a) bzw. die entsprechenden täglichen Log-Returns mit den Referenzlinien: Erwartungswert der Log-Returns ± 3-mal deren Standardabweichung im Zustand e_1 bzw. e_2 (b).

In Abb. 1.3 können wir die Zustandswechsel zu den Zeitpunkten $\tau_1 = 1.80$ und $\tau_2 = 3.57$ aufgrund des jeweiligen Trends (positiv bzw. negativ) sowie der unterschiedlichen Volatilität deutlich erkennen.

Eine Handelsstrategie H ist durch einen $\mathbb{R}^2$-wertigen, vorhersehbaren Prozess $((H_t^0, H_t^1))_{t\in\tau}$ definiert, deren Wertprozess $V(H) = (V_t(H))_{t\in\tau}$ durch

$$V_t(H) = H_t^0 B_t + H_t^1 S_t$$

gegeben ist. Wir bezeichnen eine Handelsstrategie H als selbstfinanzierend, falls

$$dV_t(H) = H_t^0 dB_t + H_t^1 dS_t \quad \text{bzw.}$$
$$V_t(H) = V_0(H) + \int_0^t H_s^0 dB_s + \int_0^t H_s^1 dS_s$$

für $t \in \tau$. Dabei beschreibt $V_0(H)$ das Startkapital und der Prozess $G(H) = (G(H))_{t\in\tau}$ mit

$$G_t(H) = \int_0^t H_s^0 dB_s + \int_0^t H_s^1 dS_s$$

den Vermögenszuwachs einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie H bis zum Zeitpunkt t. Damit diese Definitionen sinnvoll sind, müssen die Bedingungen

$$\int_0^T |H_s^0| ds < \infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \text{und} \quad \int_0^T |H_s^1|^2 ds < \infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

erfüllt sein. Gibt es außerdem eine Konstante $M \in \mathbb{R}$, sodass

$$V_t(H) > -M \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für $t \in \tau$, so sprechen wir von einer zulässigen Handelsstrategie.

Definition 1.3. Eine selbstfinanzierende, zulässige Handelsstrategie H heißt Arbitrage, falls

$$V_0(H) \leq 0, \quad V_T(H) \geq 0, \quad \mathbb{P}(V_T(H) > 0) > 0$$

gilt. Ein Modell, in dem keine solche Handelsstrategie H existiert, heißt arbitragefrei.

Anmerkung. Fortan werden die mit der konstanten Zinsrate r diskontierten Preisprozesse jeweils mit einer Tilde versehen, z.B. ist dann durch

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t((\mu_t - r)dt + \sigma_t dW_t) \tag{1.8}$$

die Dynamik des diskontierten Aktienpreisprozesses $\tilde{S} = (\tilde{S})_{t\in\tau}$ bzw. durch

$$d\tilde{V}_t(H) = H_t^1 d\tilde{S}_t \tag{1.9}$$

die Dynamik des diskontierten Wertprozesses $\tilde{V}(H) = (\tilde{V}(H))_{t\in\tau}$ einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie H gegeben.

Laut dem ersten Hauptsatz der Preistheorie ist ein Modell genau dann arbitragefrei, falls ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$ existiert [12]. Wir werden im nächsten Kapitel sehen, dass im Fall des Regime-Switching-Modells stets ein äquivalentes Martingalmaß existiert, weshalb das RSM arbitragefrei ist.

Da das Maß $\mathbb{Q}$ aber nicht eindeutig bestimmt sein wird, ist das Modell nach dem zweiten Hauptsatz der Preistheorie nicht vollständig [12]. Jedes äquivalente Martingalmaß $\mathbb{Q}$ legt folgendes System von arbitragefreien Preisen fest:
Für eine $\mathbb{Q}$-integrierbare und zum Zeitpunkt T fällige Forderung C_T wird der faire Preis zum Zeitpunkt $t \in \tau$ durch

$$\Pi_t(C_T) := \mathrm{e}^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_T | \mathcal{G}_t]$$

definiert. Diese Preisfestlegung genügt stets dem No-Arbitrage-Prinzip. Daher lässt sich mit dem No-Arbitrage-Prinzip alleine das Bepreisungsmaß $\mathbb{Q}$ nicht eindeutig bestimmen. Mögliche Ansätze zur Wahl eines „geeigneten" Maßes $\mathbb{Q}$ werden wir in Kapitel 2 diskutieren. Dabei werden wir zunächst die Menge aller äquivalenten Martingalmaße $\mathbb{Q}$ im RSM beschreiben.

2 Wahl eines Bepreisungsmaßes im RSM

2.1 Menge aller äquivalenten Martingalmaße

Sei $\mathbb{Q}$ ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Martingalmaß auf $(\Omega, \mathcal{G}_T)$, das durch die Radon-Nikodým-Dichte

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\mathcal{G}_T} = \Lambda_T$$

charakterisiert wird. Wir bezeichnen mit $\Lambda = (\Lambda_t)_{t\in\mathcal{T}}$ den dazugehörigen Dichteprozess, wobei

$$\Lambda_t := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Lambda_T|\mathcal{G}_t].$$

Der Prozess Λ ist per Definition ein strikt positives $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-Martingal mit $\Lambda_0 = 1$. Um die Menge aller zu $\mathbb{P}$ äquivalenten Martingalmaße bestimmen zu können, benutzen wir einen Darstellungssatz für $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-Martingale, der in [16] bewiesen wurde. Dieser Darstellungssatz besagt, dass sich ein lokales Martingal bezüglich einer Filtration, die von einer Brownschen Bewegung und einem unabhängigen Sprungprozess erzeugt wird, als Summe eines Integrals bezüglich der Brownschen Bewegung und eines Integrals bezüglich dem durch den Sprungprozess induzierten kompensierten Zufallsmaß schreiben lässt.

In unserem Fall ist die Filtration $\mathcal{G}$ durch die Brownsche Bewegung W und die Markovkette Y erzeugt und W und Y sind voneinander unabhängig. Der Prozess $M = (M_t)_{t\in\mathcal{T}}$ mit

$$M_t := Y_t - Y_0 - \int_0^t A^T Y_s ds$$

ist ein $\mathbb{R}^d$-wertiges $(\mathcal{F}^Y, \mathbb{P})$-Martingal mit $M_0 = 0$ [18]. Sei $u \le t$, dann folgt die Behauptung aufgrund der Markoveigenschaft aus

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M_t - M_u|\mathcal{F}_u^Y] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[Y_t - Y_u - \int_u^t A^T Y_s ds \middle| \mathcal{F}_u^Y\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y_t|Y_u] - Y_u - \int_u^t A^T \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y_s|Y_u] ds \\
&= P(u,t)^T Y_u - Y_u - \int_u^t A^T P(u,s)^T Y_u ds \\
&\overset{(1.2)}{=} P(u,t)^T Y_u - Y_u - \int_u^t \frac{\partial}{\partial s} P(u,s)^T Y_u ds \\
&= P(u,t)^T Y_u - Y_u - P(u,t)^T Y_u + P(u,u)^T Y_u = 0.
\end{aligned}$$

Der Prozess Y besitzt somit auch die Darstellung

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t A^T Y_s ds + M_t. \tag{2.1}$$

Sei

$$E := \{(i,j) : i \in \{1,\dots,d\}, j \in \{1,\dots,d\}, i \neq j\},$$

dann ist für jedes Paar $(i,j) \in E$ ein stochastischer Prozess $N^{i,j} = (N_t^{i,j})_{t\in\mathcal{T}}$ durch

$$N_t^{i,j} := \# \text{ Sprünge vom Zustand } e_i \text{ in den Zustand } e_j \text{ bis zum Zeitpunkt } t$$

definiert. Aufgrund von $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-}$ und der Darstellung (2.1) erhalten wir

$$\begin{aligned}
N_t^{i,j} &= \sum_{0<s\le t} \langle Y_{s-}, e_i\rangle \langle Y_s, e_j\rangle \\
&= \sum_{0<s\le t} \langle Y_{s-}, e_i\rangle \langle \Delta Y_s, e_j\rangle \\
&= \int_0^t \langle Y_{s-}, e_i\rangle \langle dY_s, e_j\rangle \\
&= \int_0^t \langle Y_{s-}, e_i\rangle \langle A^T Y_{s-}, e_j\rangle ds + \int_0^t \langle Y_{s-}, e_i\rangle \langle dM_s, e_j\rangle \\
&= \int_0^t \langle Y_{s-}, e_i\rangle \langle A^T e_i, e_j\rangle ds + M_t^{i,j} \\
&= \int_0^t 1_{\{Y_{s-}=e_i\}} a_{i,j} ds + M_t^{i,j},
\end{aligned}$$

wobei der Prozess $M^{i,j} = (M_t^{i,j})_{t\in\mathcal{T}}$ mit

$$M_t^{i,j} = N_t^{i,j} - \int_0^t 1_{\{Y_{s-}=e_i\}} a_{i,j} ds = \int_0^t \langle Y_{s-}, e_i\rangle \langle dM_s, e_j\rangle \tag{2.2}$$

für $(i,j) \in E$ ein $\mathbb{R}$-wertiges $(\mathcal{F}^Y, \mathbb{P})$-Martingal ist [60]. Darüber hinaus ist $M^{i,j}$ wegen der Unabhängigkeit von W und Y sogar ein $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-Martingal. Um den Darstellungssatz für lokale $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-Martingale formulieren zu können, benötigen wir die folgenden Definitionen, siehe [16] und [60]. Dabei ist der betrachtete Beobachtungszeitraum zunächst $[0,\infty)$.

Definition 2.1. $L^2(W)$ ist der Raum reellwertiger, $\mathcal{G}$-vorhersehbarer Prozesse $(h_t)_{t\ge 0}$ mit

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_0^\infty |h_s|^2 d\,[W]_s\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_0^\infty |h_s|^2 ds\right] < \infty.$$

Definition 2.2. $L^2_{loc}(W)$ ist der Raum von Prozessen $(h_t)_{t\ge 0}$, für die es eine monoton wachsende Folge von Stoppzeiten $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die $\mathbb{P}$-f.s. gegen unendlich strebt, sodass für jede Stoppzeit T_n die Bedingung

$$(h_t 1_{\{t<T_n\}})_{t\ge 0} \in L^2(W)$$

erfüllt ist.

Definition 2.3. Für jedes Paar $(i,j) \in E$ ist $L^1(N^{i,j})$ der Raum reellwertiger, $\mathcal{G}$-vorhersehbarer Prozesse $(h_t^{i,j})_{t\geq 0}$ mit

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\int_0^\infty |h_s^{i,j}| d[N^{i,j}]_s\Big] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\int_0^\infty |h_s^{i,j}| dN_s^{i,j}\Big] < \infty.$$

Definition 2.4. Für jedes Paar $(i,j) \in E$ ist $L^1_{loc}(N^{i,j})$ der Raum von Prozessen $(h_t^{i,j})_{t\geq 0}$, für die es eine monoton wachsende Folge von Stoppzeiten $(T_n^{i,j})_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die $\mathbb{P}$-f.s. gegen unendlich strebt, sodass für jede Stoppzeit $T_n^{i,j}$ die Bedingung

$$(h_t^{i,j} 1_{\{t<T_n^{i,j}\}})_{t\geq 0} \in L^1(N^{i,j})$$

erfüllt ist.

Satz 2.5. Sei $L = (L_t)_{t\geq 0}$ ein lokales $(\mathcal{G},\mathbb{P})$-Martingal. Dann existieren eindeutig bestimmte Prozesse

$$(h_t)_{t\geq 0} \in L^2_{loc}(W) \quad \text{und} \quad (h_t^{i,j})_{t\geq 0} \in L^1_{loc}(N^{i,j}) \tag{2.3}$$

für $(i,j) \in E$, sodass der Prozess L die Darstellung

$$L_t = L_0 + \int_0^t h_s dW_s + \sum_{(i,j)\in E} \int_0^t h_s^{i,j} dM_s^{i,j} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{2.4}$$

für $t \geq 0$ besitzt [16].

Folgend ist $\mathbb{Q}$ ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Martingalmaß und $\Lambda = (\Lambda_t)_{t\geq 0}$ bezeichnet den Dichteprozess. Da dieser Prozess ein $(\mathcal{G},\mathbb{P})$-Martingal ist, existieren aufgrund von Satz 2.5 eindeutig bestimmte Prozesse $(h_t)_{t\geq 0} \in L^2_{loc}(W)$ und $(h_t^{i,j})_{t\geq 0} \in L^1_{loc}(N^{i,j})$, sodass

$$\Lambda_t = 1 + \int_0^t h_s dW_s + \sum_{(i,j)\in E} \int_0^t h_s^{i,j} dM_s^{i,j}.$$

Sei $\Lambda_{0-} := 1$, dann ist $\Lambda_{t-} := \lim_{s\uparrow t} \Lambda_s > 0$ $\mathbb{P}$-f.s. erfüllt. Dies ist richtig, da für eine Folge von Stoppzeiten $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$U_n := \inf\Big\{t \geq 0 : \Lambda_t < \frac{1}{n}\Big\},$$

wir

$$\mathbb{Q}(U_n < \infty) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Lambda_{U_n} 1_{\{U_n<\infty\}}] \leq \frac{1}{n}$$

und

$$\mathbb{Q}\Big(\inf_{t\geq 0} \Lambda_t > 0\Big) = 1 - \mathbb{Q}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{U_n < \infty\}\Big) = 1$$

erhalten [37]. Also ist insbesonders $\Lambda_{t-} > 0$ $\mathbb{Q}$-f.s. für $t \geq 0$. Weil $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{P}$ äquivalent sind, folgt die Behauptung und wir können durch

$$\theta_t := \frac{h_t}{\Lambda_{t-}} \quad \text{und} \quad \eta_t^{i,j} := \frac{h_t^{i,j}}{\Lambda_{t-}}$$

$\mathcal{G}$-vorhersehbare Prozesse definieren. Des Weiteren sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge von Stoppzeiten, sodass

$$(h_t 1_{\{t<T_n\}})_{t\geq 0} \in L^2(W).$$

Die Folge von Stoppzeiten $(\bar{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\bar{U}_n := \min\{U_n, T_n\}$$

strebt $\mathbb{P}$-f.s. gegen unendlich und erfüllt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_0^\infty |\theta_s 1_{\{s<\bar{U}_n\}}|^2 ds\right] \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[n^2 \int_0^\infty |h_s 1_{\{s<T_n\}}|^2 ds\right] < \infty.$$

Somit ist $(\theta_t)_{t\geq 0} \in L^2_{loc}(W)$ und analog dazu $(\eta_t^{i,j})_{t\geq 0} \in L^1_{loc}(N^{i,j})$. Für den Dichteprozess Λ können wir folglich

$$\Lambda_t = 1 + \int_0^t \Lambda_{s-}\theta_s dW_s + \sum_{(i,j)\in E} \int_0^t \Lambda_{s-}\eta_s^{i,j} dM_s^{i,j}$$

bzw.

$$\Lambda_t = 1 + \int_0^t \Lambda_{s-} d\Upsilon_s$$

mit

$$\Upsilon_t = \int_0^t \theta_s dW_s + \sum_{(i,j)\in E} \int_0^t \eta_s^{i,j} dM_s^{i,j}$$

und $\Upsilon_0 = 0$ schreiben. Die Lösung dieser stochastischen DGL ist aufgrund von (2.2) durch das Doléans-Dade-Exponential (Satz B.5)

$$\Lambda_t = \mathcal{E}(\Upsilon)_t = \exp\left(\Upsilon_t - \frac{1}{2}[\Upsilon]_t^c\right) \prod_{s\leq t}(1+\Delta\Upsilon_s)\mathrm{e}^{-\Delta\Upsilon_s} \tag{2.5}$$

$$= \exp\left(\int_0^t \theta_s dW_s + \sum_{(i,j)\in E}\int_0^t \eta_s^{i,j} dM_s^{i,j} - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds + \sum_{(i,j)\in E}\int_0^t (\ln(1+\eta_s^{i,j}) - \eta_s^{i,j}) dN_s^{i,j}\right)$$

$$= \exp\left(\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds + \sum_{(i,j)\in E}\int_0^t \ln(1+\eta_s^{i,j}) dM_s^{i,j} \right.$$
$$\left. + \sum_{(i,j)\in E}\int_0^t (\ln(1+\eta_s^{i,j}) - \eta_s^{i,j}) 1_{\{Y_{s-}=e_i\}} a_{i,j} ds\right) \tag{2.6}$$

gegeben. Aufgrund der Form der Lösung (2.5) und der Tatsache, dass $\Lambda_t > 0$ $\mathbb{P}$-f.s. gilt, muss

$$1 + \eta_t^{i,j} > 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{2.7}$$

für $t \geq 0$ und $(i,j) \in E$ erfüllt sein. Das ermöglicht die in (2.6) angegebene Schreibweise.

Nun zur Umkehrung: Die Prozesse $(\theta_t)_{t\in\tau} \in L^2_{loc}(W)$ und $(\eta_t^{i,j})_{t\in\tau} \in L^1_{loc}(N^{i,j})$ sind beliebig gewählt und dadurch ist ein Prozess $\Lambda^{\theta,\eta} = (\Lambda_t^{\theta,\eta})_{t\in\tau}$ mit

$$\Lambda_t^{\theta,\eta} := 1 + \int_0^t \Lambda_{s-}^{\theta,\eta}\theta_s dW_s + \sum_{(i,j)\in E} \int_0^t \Lambda_{s-}^{\theta,\eta}\eta_s^{i,j} dM_s^{i,j} \tag{2.8}$$

festgelegt. Der Prozess $\Lambda^{\theta,\eta}$ ist dann und nur dann $\mathbb{P}$-f.s. strikt positiv, falls (2.7) gilt. Da $\Lambda^{\theta,\eta}$ per Konstruktion ein lokales $(\mathcal{G},\mathbb{P})$-Martingal, aber im Allgemeinen kein echtes $(\mathcal{G},\mathbb{P})$-Martingal ist, benötigen wir

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Lambda_t^{\theta,\eta}] = 1 \tag{2.9}$$

für $t \in \tau$ als zusätzliche Bedingung, vgl. Lemma B.6. Dann ist $\Lambda^{\theta,\eta}$ ein Dichteprozess und es kann ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{G}_T)$ durch

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}^{\theta,\eta}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{G}_T} := \Lambda_T^{\theta,\eta}$$

definiert werden. Das so konstruierte Maß $\mathbb{Q}^{\theta,\eta}$ ist klarerweise im Allgemeinen kein Martingalmaß. Dafür muss der diskontierte Preisprozess der Aktie $\tilde{S}$ ein lokales $(\mathcal{G},\mathbb{Q}^{\theta,\eta})$-Martingal sein, bzw. äquivalent dazu muss der Prozess $\Lambda^{\theta,\eta}\tilde{S}$ ein lokales $(\mathcal{G},\mathbb{P})$-Martingal sein. Aufgrund der Stetigkeit von S erhalten wir mittels partieller Integration aus (1.8) und (2.8)

$$\begin{aligned}
\Lambda_t^{\theta,\eta}\tilde{S}_t &= \Lambda_0^{\theta,\eta}\tilde{S}_0 + \int_0^t \Lambda_{s-}^{\theta,\eta} d\tilde{S}_s + \int_0^t \tilde{S}_{s-} d\Lambda_s^{\theta,\eta} + [\Lambda^{\theta,\eta}, \tilde{S}]_t \\
&= \Lambda_0^{\theta,\eta}\tilde{S}_0 + \int_0^t \Lambda_{s-}^{\theta,\eta}\tilde{S}_{s-}(\mu_s - r + \theta_s\sigma_s)ds + \int_0^t \Lambda_{s-}^{\theta,\eta}\tilde{S}_{s-}(\sigma_s + \theta_s)dW_s \\
&\quad + \sum_{(i,j)\in E} \int_0^t \Lambda_{s-}^{\theta,\eta}\tilde{S}_{s-}\eta_s^{i,j} dM_s^{i,j}.
\end{aligned}$$

Somit ist der Prozess $\tilde{S}$ ein lokales $(\mathcal{G},\mathbb{Q}^{\theta,\eta})$-Martingal bzw. $\mathbb{Q}^{\theta,\eta}$ ein Martingalmaß, falls die Gleichung

$$\mu_t - r + \theta_t\sigma_t = 0$$

bzw. falls

$$\theta_t = \frac{r - \mu_{t-}}{\sigma_{t-}} \tag{2.10}$$

für $t \in \tau$ erfüllt ist. Der Prozess $(\theta_t)_{t\in\tau}$ ist damit $\mathcal{G}$-vorhersehbar und aus $L^2_{loc}(W)$. Dabei haben wir verwendet, dass $Y_t(\omega) = Y_{t-}(\omega)$ und folglich auch $\mu_t(\omega) = \mu_{t-}(\omega)$ bzw. $\sigma_t(\omega) = \sigma_{t-}(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ und für alle bis auf abzählbar viele $t \in \tau$ gilt.

Durch die Bedingungen (2.7), (2.9) und (2.10) können wir im Regime-Switching-Modell die Menge aller zu $\mathbb{P}$ äquivalenten Martingalmaße beschreiben:

Satz 2.6. Sei $(\hat{\theta}_t)_{t\in\tau}$ der $\mathcal{G}$-vorhersehbare Prozess $\hat{\theta}_t = \langle\hat{\theta}, Y_{t-}\rangle$ mit $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_d)^T \in \mathbb{R}^d$, wobei

$$\hat{\theta}_i = \frac{r - \mu_i}{\sigma_i}$$

für $i = 1, \dots, d$. Dann kann der Raum der zu $\mathbb{P}$ äquivalenten Martingalmaße auf $(\Omega, \mathcal{G}_T)$ durch

$$\mathcal{M}_e := \left\{ \mathbb{Q}^{\hat{\eta}} := \mathbb{Q}^{\hat{\theta},\hat{\eta}} \middle| (\hat{\eta}^{i,j}_t)_{t\in\tau} \in L^1_{loc}(N^{i,j}) \text{ mit } 1 + \hat{\eta}^{i,j}_t > 0 \text{ } \mathbb{P}\text{-f.s. und } \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Lambda^{\hat{\eta}}_t] = 1 \text{ für } t \in \tau \right\}$$

beschrieben werden, wobei das Maß $\mathbb{Q}^{\hat{\eta}}$ durch den Dichteprozess $\Lambda^{\hat{\eta}} = (\Lambda^{\hat{\eta}}_t)_{t\in\tau}$ mit

$$\Lambda^{\hat{\eta}}_t = 1 + \int_0^t \Lambda^{\hat{\eta}}_{s-} d\hat{\Upsilon}_s \tag{2.11}$$

und

$$\hat{\Upsilon}_t = \int_0^t \hat{\theta}_s dW_s + \sum_{(i,j)\in E} \int_0^t \hat{\eta}^{i,j}_s dM^{i,j}_s$$

festgelegt wird. Als Lösung dieser DGL erhalten wir das Doléans-Dade-Exponential (Satz B.5)

$$\begin{aligned}\Lambda^{\hat{\eta}}_t = \mathcal{E}(\hat{\Upsilon})_t = \exp\Bigg(&\int_0^t \hat{\theta}_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \hat{\theta}^2_s ds + \sum_{(i,j)\in E} \int_0^t \ln(1 + \hat{\eta}^{i,j}_s) dM^{i,j}_s \\ &+ \sum_{(i,j)\in E} \int_0^t (\ln(1 + \hat{\eta}^{i,j}_s) - \hat{\eta}^{i,j}_s) 1_{\{Y_{s-}=e_i\}} a_{i,j} ds \Bigg).\end{aligned} \tag{2.12}$$

Wir können erkennen, dass in der Charakterisierung von $\mathbb{Q}^{\hat{\eta}}$ die Prozesse $(\hat{\eta}^{i,j}_t)_{t\in\tau}$ für $(i,j) \in E$ recht frei wählbar sind. Damit ist das äquivalente Martingalmaß im Regime-Switching-Modell nicht eindeutig bestimmt und das Modell ist nicht vollständig. Bevor wir mögliche Ansätze zur Bestimmung eines „geeigneten“ Bepreisungsmaßes näher vorstellen, untersuchen wir die Verteilungseigenschaften von W und Y unter dem Maß $\mathbb{Q}^{\hat{\eta}}$.

2.2 Verteilung der Prozesse W und Y unter $\mathbb{Q}^{\hat{\eta}}$

Im Folgenden beschränken wir uns auf Martingalmaße $\mathbb{Q}^{\hat{\eta}} \in \mathcal{M}_e$, die durch $\mathcal{G}$-vorhersehbare Prozesse $(\hat{\eta}^{i,j}_t)_{t\in\tau} \in L^1_{loc}(N^{i,j})$ der speziellen Form

$$\hat{\eta}^{i,j}_t = \bar{\eta}^{i,j}(t, Y_{t-}) \tag{2.13}$$

festgelegt werden. Dabei sind die Funktionen $\bar{\eta}^{i,j} : \tau \times \mathcal{E} \mapsto (-1, \infty)$ allesamt beschränkt. In diesem Fall sind die Voraussetzungen des Satzes 2.6 an die Prozesse $(\hat{\eta}^{i,j}_t)_{t\in\tau}$ trivialerweise

erfüllt. Wir werden später in Proposition 2.8 sehen, dass die Verteilung der Markovkette Y unverändert bleibt, falls $\bar{\eta}^{i,j} \equiv 0$ für $(i,j) \in E$.
Zunächst bestimmen wir aber die Verteilung von W unter $\mathbb{Q}^{\hat{\eta}}$. Aufgrund der Eigenschaften der vorhersehbaren quadratischen Variation (Satz B.3) und des Satzes von Girsanov (Satz B.7) ist der Prozess $\hat{W} = (\hat{W}_t)_{t\in\tau}$ mit

$$\begin{aligned}\hat{W}_t &:= W_t - \langle W, \hat{\Upsilon}\rangle_t = W_t - \int_0^t \hat{\theta}_s d\langle W\rangle_s - \sum_{(i,j)\in E} \int_0^t \hat{\eta}_s^{i,j} d\langle W, M^{i,j}\rangle_s \\ &= W_t - \int_0^t \hat{\theta}_s ds = W_t - \int_0^t \frac{r-\mu_s}{\sigma_s} ds \end{aligned} \tag{2.14}$$

eine Brownsche Bewegung bezüglich $\mathcal{G}$ unter $\mathbb{Q}^{\hat{\eta}}$. Damit haben wir für die Dynamik des Aktienpreisprozesses S unter $\mathbb{Q}^{\hat{\eta}}$

$$dS_t \overset{(1.5)}{=} S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t) = S_t(\mu_t dt + \sigma_t d\hat{W}_t + \sigma_t \hat{\theta}_t dt) = S_t(r dt + \sigma_t d\hat{W}_t). \tag{2.15}$$

Damit wir zeigen können, dass Y auch unter dem Maß $\mathbb{Q}^{\hat{\eta}}$ eine Markovkette ist, die aber im Allgemeinen nicht mehr homogen sein wird, verwenden wir die folgende Proposition, durch die eine Markovkette vollständig charakterisiert wird, siehe [3] und [42].

Proposition 2.7. Der Prozess Y ist genau dann eine zeitstetige, inhomogene Markovkette bezüglich $\mathcal{G}$ unter $\mathbb{P}$ mit Startverteilung π_0 und Intensitätsmatrizen $A = (A_t)_{t\in\tau}$, wenn

(i) $\mathbb{P}(Y_0 = e_i) = \langle \pi_0, e_i\rangle$ für alle Zustände $e_i \in \mathcal{E}$ und

(ii) für jede Funktion $h : \mathcal{E} \mapsto \mathbb{R}$ ist der Prozess $M^h = (M_t^h)_{t\in\tau}$ mit

$$M_t^h := h(Y_t) - \int_0^t (A_s^T h)(Y_s) ds$$

ein $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-Martingal. Dabei ist

$$(A_t^T h)(Y_t) := \sum_{i,j=1}^d 1_{\{Y_t = e_i\}} a_{i,j}(t) h(e_j).$$

Bemerkung. Anstatt die Bedingung (ii) der Proposition 2.7 für alle Funktionen $h : \mathcal{E} \mapsto \mathbb{R}$ zu überprüfen, reicht es zu zeigen, dass für die Wahl $h^k(x) = 1_{\{x=e_k\}}$ der Prozess $M^k = (M_t^k)_{t\in\tau}$ mit

$$\begin{aligned} M_t^k &:= \langle Y_t, e_k\rangle - \sum_{i=1}^d \int_0^t 1_{\{Y_s = e_i\}} a_{i,k}(s) ds \\ &= \langle Y_t, e_k\rangle - \sum_{i=1}^d \int_0^t 1_{\{Y_{s-} = e_i\}} a_{i,k}(s) ds \end{aligned} \tag{2.16}$$

für $k = 1, \ldots, d$ ein $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-Martingal ist. Dies ist offensichtlich richtig, denn für eine jede Funktion $h : \mathcal{E} \mapsto \mathbb{R}$ können wir

$$h(Y_t) = \sum_{k=1}^d h(e_k) \langle Y_t, e_k\rangle$$

schreiben. Falls somit M^k für $k = 1, \dots, d$ ein $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-Martingal ist, dann ist auch M^h ein $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-Martingal und die Bedingung (ii) der Proposition 2.7 ist erfüllt.

Proposition 2.8. Sei $\mathbb{Q}^{\hat{\eta}}$ ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Martingalmaß, sodass die Einschränkung (2.13) erfüllt ist. Dann gelten die folgenden Aussagen [3]:

(i) Der Prozess Y ist eine zeitstetige, inhomogene Markovkette bezüglich $\mathcal{G}$ unter $\mathbb{Q}^{\hat{\eta}}$.

(ii) Die Übergangsintensitäten der Markovkette Y werden unter $\mathbb{Q}^{\hat{\eta}}$ durch das System von deterministischen Intensitätsmatrizen $\hat{A} = (\hat{A}_t)_{t \in \tau}$ mit

$$\hat{a}_{i,j}(t) := (1 + \bar{\eta}^{i,j}(t, e_i))a_{i,j}$$

für $i \neq j$ und

$$\hat{a}_{i,i} := -\sum_{j \neq i} \hat{a}_{i,j} = -\sum_{j \neq i}(1 + \bar{\eta}^{i,j}(t, e_i))a_{i,j}$$

beschrieben.

(iii) Das System von Übergangsmatrizen $(\hat{P}(s,t))_{s \leq t \in \tau}$ der Markovkette Y erfüllt unter $\mathbb{Q}^{\hat{\eta}}$ wieder die Kolmogorov-Vorwärtsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{P}(s,t) = \hat{P}(s,t)\hat{A}_t, \quad \hat{P}(s,s) = I$$

und die Kolmogorov-Rückwärtsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial s}\hat{P}(s,t) = -\hat{A}_s\hat{P}(s,t), \quad \hat{P}(t,t) = I.$$

Beweis. Wir müssen hier nur nachweisen, dass Y eine Markovkette bezüglich $\mathcal{G}$ unter $\mathbb{Q}^{\hat{\eta}}$ ist, deren Übergangsintensitäten durch $\hat{A}$ beschrieben werden. Aufgrund von (1.1) und (2.13) erhalten wir

$$\begin{gathered} \hat{a}_{i,j}(t) \geq 0 \quad \text{für } i \neq j, \quad \hat{a}_{i,i}(t) = -\sum_{j \neq i} \hat{a}_{i,j}(t) < 0, \\ \int_0^t |\hat{a}_{i,j}(s)| ds < \infty \end{gathered} \tag{2.17}$$

für $t \in \tau$, weshalb durch (ii) wirklich Intensitäten einer inhomogenen Markovkette gegeben sind. Weiters erhalten wir die Aussage (iii) aus [15]. Wegen Proposition 2.7 reicht es zu zeigen, dass der Prozess $\hat{M}^k = (\hat{M}^k_t)_{t \in \tau}$ mit

$$\hat{M}^k_t := \langle Y_t, e_k \rangle - \sum_{i=1}^d \int_0^t 1_{\{Y_{s-} = e_i\}} \hat{a}_{i,k}(s) ds \tag{2.18}$$

für $k = 1, \dots, d$ ein $(\mathcal{G}, \mathbb{Q}^{\hat{\eta}})$-Martingal ist. Äquivalent dazu zeigen wir, dass $\Lambda^{\hat{\eta}}\hat{M}^k$ ein $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-Martingal ist. Partielle Integration und die Schreibweise (2.11) liefern

$$\Lambda^{\hat{\eta}}_t \hat{M}^k_t = \Lambda^{\hat{\eta}}_0 \hat{M}^k_0 + \int_0^t \Lambda^{\hat{\eta}}_{s-} d\hat{M}^k_s + \int_0^t \hat{M}^k_{s-}\Lambda^{\hat{\eta}}_{s-}\hat{\theta}_s dW_s + \sum_{(i,j) \in E} \int_0^t \hat{M}^k_{s-}\Lambda^{\hat{\eta}}_{s-}\hat{\eta}^{i,j}_s dM^{i,j}_s + [\Lambda^{\hat{\eta}}, \hat{M}^k]_t.$$

Durch elementare Vereinfachung ergibt sich

$$\begin{aligned}
[\Lambda^{\hat{\eta}}, \hat{M}^k]_t &= \int_0^t \Lambda^{\hat{\eta}}_{s-}\hat{\theta}_s d[W, \hat{M}^k]_s + \sum_{(i,j)\in E} \int_0^t \Lambda^{\hat{\eta}}_{s-}\hat{\eta}^{i,j}_s d[M^{i,j}, \hat{M}^k]_s \\
&= \sum_{(i,j)\in E} \sum_{0<s\le t} \Lambda^{\hat{\eta}}_{s-}\hat{\eta}^{i,j}_s \Delta N^{i,j}_s \Delta\langle Y_s, e_k\rangle \\
&= \sum_{i\neq k} \int_0^t \Lambda^{\hat{\eta}}_{s-}\hat{\eta}^{i,k}_s dN^{i,k}_s - \sum_{j\neq k} \int_0^t \Lambda^{\hat{\eta}}_{s-}\hat{\eta}^{k,j}_s dN^{k,j}_s
\end{aligned}$$

und für den Prozess $\hat{M}^k$ (2.18) schreiben wir

$$\begin{aligned}
\hat{M}^k_t &= \langle Y_t, e_k\rangle - \int_0^t \Big(\sum_{i\neq k} 1_{\{Y_{s-}=e_i\}}\hat{a}_{i,k}(s) + 1_{\{Y_{s-}=e_k\}}\hat{a}_{k,k}(s)\Big)ds \\
&\overset{(2.13)}{=} \langle Y_t, e_k\rangle - \int_0^t \Big(\sum_{i\neq k} 1_{\{Y_{s-}=e_i\}}(1+\hat{\eta}^{i,k}_s)a_{i,k} - \sum_{j\neq k} 1_{\{Y_{s-}=e_k\}}(1+\hat{\eta}^{k,j}_s)a_{k,j}\Big)ds \\
&\overset{(1.1)}{=} \langle Y_t, e_k\rangle - \sum_{i=1}^d \int_0^t 1_{\{Y_{s-}=e_i\}}a_{i,k}ds - \int_0^t \Big(\sum_{i\neq k} 1_{\{Y_{s-}=e_i\}}\hat{\eta}^{i,k}_s a_{i,k} - \sum_{j\neq k} 1_{\{Y_{s-}=e_k\}}\hat{\eta}^{k,j}_s a_{k,j}\Big)ds \\
&\overset{(2.16)}{=} M^k_t - \sum_{i\neq k} \int_0^t \hat{\eta}^{i,k}_s 1_{\{Y_{s-}=e_i\}}a_{i,k}ds + \sum_{j\neq k} \int_0^t \hat{\eta}^{k,j}_s 1_{\{Y_{s-}=e_k\}}a_{k,j}ds,
\end{aligned}$$

wobei sich für das Differential des Prozesses M^k

$$\begin{aligned}
dM^k_t &\overset{(2.16)}{=} \sum_{i\neq k} dN^{i,k}_t - \sum_{j\neq k} dN^{k,j}_t - \sum_{i\neq k} 1_{\{Y_{t-}=e_i\}}a_{i,k}dt + \sum_{j\neq k} 1_{\{Y_{t-}=e_k\}}a_{k,j}dt \\
&\overset{(2.2)}{=} \sum_{i\neq k} dM^{i,k}_t - \sum_{j\neq k} dM^{k,j}_t
\end{aligned}$$

ergibt. Insgesamt erhalten wir mit (2.2)

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\hat{\eta}}_t\hat{M}^k_t &= \Lambda^{\hat{\eta}}_0\hat{M}^k_0 + \sum_{i\neq k}\int_0^t \Lambda^{\hat{\eta}}_{s-}dM^{i,k}_s - \sum_{j\neq k}\int_0^t \Lambda^{\hat{\eta}}_{s-}dM^{k,j}_s - \sum_{i\neq k}\int_0^t \Lambda^{\hat{\eta}}_{s-}\hat{\eta}^{i,k}_s 1_{\{Y_{s-}=e_i\}}a_{i,k}ds \\
&\quad + \sum_{j\neq k}\int_0^t \Lambda^{\hat{\eta}}_{s-}\hat{\eta}^{k,j}_s 1_{\{Y_{s-}=e_k\}}a_{k,j}ds + \int_0^t \hat{M}^k_{s-}\Lambda^{\hat{\eta}}_{s-}\hat{\theta}_s dW_s + \sum_{(i,j)\in E}\int_0^t \hat{M}^k_{s-}\Lambda^{\hat{\eta}}_{s-}\hat{\eta}^{i,j}_s dM^{i,j}_s \\
&\quad + \sum_{i\neq k}\int_0^t \Lambda^{\hat{\eta}}_{s-}\hat{\eta}^{i,k}_s dN^{i,k}_s - \sum_{j\neq k}\int_0^t \Lambda^{\hat{\eta}}_{s-}\hat{\eta}^{k,j}_s dN^{k,j}_s \\
&= \Lambda^{\hat{\eta}}_0\hat{M}^k_0 + \sum_{i\neq k}\int_0^t \Lambda^{\hat{\eta}}_{s-}(1+\hat{\eta}^{i,k}_s)dM^{i,k}_s - \sum_{j\neq k}\int_0^t \Lambda^{\hat{\eta}}_{s-}(1+\hat{\eta}^{k,j}_s)dM^{k,j}_s \\
&\quad + \int_0^t \hat{M}^k_{s-}\Lambda^{\hat{\eta}}_{s-}\hat{\theta}_s dW_s + \sum_{(i,j)\in E}\int_0^t \hat{M}^k_{s-}\Lambda^{\hat{\eta}}_{s-}\hat{\eta}^{i,j}_s dM^{i,j}_s
\end{aligned}$$

$$= \Lambda_0^{\hat{\eta}} \hat{M}_0^k + \int_0^t \Lambda_{s-}^{\hat{\eta}} c_s dW_s + \sum_{(i,j)\in E} \int_0^t \Lambda_{s-}^{\hat{\eta}} c_s^{i,j} dM_s^{i,j}, \tag{2.19}$$

wobei die Prozesse $(c_t)_{t\in\tau}$ und $(c_t^{i,j})_{t\in\tau}$ mit $(i,j) \in E$ beschränkt, reellwertig und $\mathcal{G}$-vorhersehbar sind. Aufgrund der Darstellung (2.2) und (2.12) sowie der Einschränkung (2.13) resultiert

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|\Lambda_t^{\hat{\eta}}|^2] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\exp\Big(\int_0^t 2\hat{\theta}_s dW_s - \int_0^t \hat{\theta}_s^2 ds + \sum_{(i,j)\in E} \int_0^t 2\ln(1+\hat{\eta}_s^{i,j}) dM_s^{i,j} \\
&\qquad + \sum_{(i,j)\in E} \int_0^t 2(\ln(1+\hat{\eta}_s^{i,j}) - \hat{\eta}_s^{i,j}) 1_{\{Y_{s-}=e_i\}} a_{i,j} ds\Big)\Big] \\
&\leq c_1 \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\exp\Big(\int_0^t 2\hat{\theta}_s dW_s + \sum_{(i,j)\in E} \int_0^t 2\ln(1+\hat{\eta}_s^{i,j}) dN_s^{i,j}\Big)\Big] \\
&= c_1 \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\exp\Big(\sum_{(i,j)\in E} \int_0^t 2\ln(1+\hat{\eta}_s^{i,j}) dN_s^{i,j}\Big) \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\exp\Big(\int_0^t 2\hat{\theta}_s dW_s\Big)\Big|\mathcal{F}_t^Y\Big]\Big] \\
&\leq c_1 c_2 \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\exp\Big(\sum_{(i,j)\in E} \int_0^t 2\ln(1+\hat{\eta}_s^{i,j}) dN_s^{i,j}\Big)\Big] \\
&\leq c_1 c_2 \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\exp\Big(c_3 \sum_{(i,j)\in E} N_t^{i,j}\Big)\Big] \overset{(A.7)}{<} \infty
\end{aligned}$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, siehe dafür Abschnitt A.2. Mit dem Satz von Fubini-Tonelli folgt dann umgehend

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\int_0^T |\Lambda_{s-}^{\hat{\eta}} c_s|^2 1_{\{s\leq t\}} d\langle W\rangle_s\Big] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\int_0^T |\Lambda_{s-}^{\hat{\eta}} c_s|^2 1_{\{s\leq t\}} ds\Big] < \infty$$

bzw.

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\int_0^T |\Lambda_{s-}^{\hat{\eta}} c_s^{i,j}|^2 1_{\{s\leq t\}} d\langle M^{i,j}\rangle_s\Big] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\int_0^T |\Lambda_{s-}^{\hat{\eta}} c_s^{i,j}|^2 1_{\{s\leq t\}} 1_{\{Y_{s-}=e_i\}} a_{i,j} ds\Big] < \infty$$

für $t \in \tau$. Damit sind die Voraussetzungen des Lemmas B.4 erfüllt und die Integrale im Ausdruck (2.19) sind $(\mathcal{G},\mathbb{P})$-Martingale. Folglich ist auch der Prozess $\Lambda^{\hat{\eta}}\hat{M}^k$ ein $(\mathcal{G},\mathbb{P})$-Martingal. Somit konnten wir gerade nachweisen, dass Y eine Markovkette bezüglich $\mathcal{G}$ unter $\mathbb{Q}^{\hat{\eta}}$ ist. Deren Übergangsintensitäten werden durch $\hat{A}$ beschrieben. □

Sei $(i,j) \in E$. Mit Hilfe der Proposition 2.8 können wir genau wie in Kapitel 2.1 zeigen, dass der Prozess $\hat{M}^{i,j} = (\hat{M}_t^{i,j})_{t\in\tau}$ mit

$$\hat{M}_t^{i,j} := N_t^{i,j} - \int_0^t 1_{\{Y_{s-}=e_i\}} \hat{a}_{i,j}(s) ds \overset{(2.13)}{=} N_t^{i,j} - \int_0^t 1_{\{Y_{s-}=e_i\}} (1+\hat{\eta}_s^{i,j}) a_{i,j} ds \tag{2.20}$$

ein $(\mathcal{F}^Y, \mathbb{Q}^{\hat{\eta}})$-Martingal und auch ein $(\mathcal{G}, \mathbb{Q}^{\hat{\eta}})$-Martingal ist.

2.3 Minimale-Entropie-Martingalmaß (MEMM)

Im Regime-Switching-Modell gibt es kein eindeutig bestimmtes Martingalmaß $\mathbb{Q}$. Somit stellt sich die Frage, welches Maß, unter allen möglichen, nun am besten „geeignet" ist, um es zur Bepreisung einer Forderung heranzuziehen.
Die grundlegende Idee in diesem Kapitel ist es, die „Distanz" zwischen dem Martingalmaß $\mathbb{Q}$ und dem realen Maß $\mathbb{P}$ zu minimieren. Der „Distanz"-Begriff kann natürlich auf verschiedene Arten festgelegt werden. Der folgende Ansatz benutzt das Konzept der relativen Entropie. Die relative Entropie von $\mathbb{Q}$ bezüglich $\mathbb{P}$ ist durch

$$\mathcal{H}(\mathbb{Q},\mathbb{P}) := \begin{cases} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \ln\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)\right] & \text{falls } \mathbb{Q} \ll \mathbb{P}, \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Die relative Entropie erfüllt die Eigenschaften [53]:

(i) $\mathcal{H}(\mathbb{Q},\mathbb{P}) \geq 0$,

(ii) $\mathcal{H}(\mathbb{Q},\mathbb{P}) = 0$ genau dann, wenn $\mathbb{Q} = \mathbb{P}$, und

(iii) das Funktional $\mathbb{Q} \mapsto \mathcal{H}(\mathbb{Q},\mathbb{P})$ ist strikt konvex.

Die zur Wahl stehenden, verschiedenen Bepreisungsmaße $\mathbb{Q}$ werden durch den gerade eben charakterisierten Raum

$$\mathcal{M}_e = \{\mathbb{Q} \sim \mathbb{P} : \tilde{S} \text{ ist unter } \mathbb{Q} \text{ ein lokales Martingal}\}$$

beschrieben. Wir schreiben

$$\mathcal{M} := \{\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} : \tilde{S} \text{ ist unter } \mathbb{Q} \text{ ein lokales Martingal}\}$$

und

$$\mathcal{M}_f := \{\mathbb{Q} \in \mathcal{M} : \mathcal{H}(\mathbb{Q},\mathbb{P}) < \infty\}.$$

Das Minimale-Entropie-Martingalmaß $\mathbb{Q}^E$ ist als Lösung des Ausdrucks

$$\mathcal{H}(\mathbb{Q}^E,\mathbb{P}) = \min_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}} \mathcal{H}(\mathbb{Q},\mathbb{P})$$

definiert. Falls $\mathcal{M}_f \neq \emptyset$, existiert das MEMM $\mathbb{Q}^E$ und ist aufgrund der strikten Konvexität eindeutig bestimmt [25]. Per Konstruktion muss $\mathbb{Q}^E$ nicht notwendigerweise zu $\mathbb{P}$ äquivalent sein. Dies gilt aber, falls zusätzlich

$$\mathcal{M}_e \cap \mathcal{M}_f \neq \emptyset$$

erfüllt ist [25]. Weiters ist in diesem Fall das MEMM $\mathbb{Q}^E$ durch die Radon-Nikodým-Dichte

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}^E}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{G}_T} = \Lambda_T^E = c_E \exp\left(\int_0^T \xi_s^E d\tilde{S}_s\right) \tag{2.21}$$

bestimmt. Dabei ist c_E eine reelle Konstante und $(\xi_t^E)_{t\in\mathcal{T}}$ ein $\mathcal{G}$-vorhersehbarer, $\tilde{S}$-integrierbarer Prozess, sodass $(\int_0^t \xi_s^E d\tilde{S}_s)_{t\in\mathcal{T}}$ ein $(\mathcal{G},\mathbb{Q}^E)$-Martingal ist [53]. Die Umkehrung gilt hier aber nicht, ein Maßwechsel der Form (2.21) führt nicht unbedingt auf ein Maß, das die relative Entropie bezüglich $\mathbb{P}$ minimiert.

Proposition 2.9. Sei $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_e \cap \mathcal{M}_f$, d.h. $\mathbb{Q}$ sei ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Martingalmaß mit $\mathcal{H}(\mathbb{Q}, \mathbb{P}) < \infty$. Dann ist $\mathbb{Q}$ das MEMM $\mathbb{Q}^E$ genau dann, wenn

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{G}_T} = \Lambda_T = c \exp\left(\int_0^T \xi_s d\tilde{S}_s\right) \tag{2.22}$$

für $c \in \mathbb{R}$ und einen $\tilde{S}$-integrierbaren Prozess $(\xi_t)_{t \in \tau}$ und zusätzlich die Gleichungen

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_0^T \xi_s d\tilde{S}_s\right] = 0, \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^E}\left[\int_0^T \xi_s d\tilde{S}_s\right] = 0 \tag{2.23}$$

erfüllt sind [53].

Aufgrund von (2.21) und der Proposition 2.9 ergibt sich für den Wert der relativen Entropie von $\mathbb{Q}^E$ bezüglich $\mathbb{P}$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\mathbb{Q}^E, \mathbb{P}) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}^E}{d\mathbb{P}} \ln\left(\frac{d\mathbb{Q}^E}{d\mathbb{P}}\right)\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^E}\left[\ln\left(\frac{d\mathbb{Q}^E}{d\mathbb{P}}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^E}\left[\ln(c_E) + \int_0^T \xi_s^E d\tilde{S}_s\right] = \ln(c_E).\end{aligned} \tag{2.24}$$

Da die Bedingung (2.23) für ein unbekanntes MEMM nicht direkt überprüfbar ist, kann die Proposition 2.9 im Allgemeinen auch nicht zur Bestimmung von $\mathbb{Q}^E$ herangezogen werden. Wir betrachten dafür die Proposition:

Proposition 2.10. Sei $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_e \cap \mathcal{M}_f$. Falls $\mathbb{Q}$ durch die Radon-Nikodým-Dichte (2.22) beschrieben wird und

$$\int_0^T \xi_s^2 d[\tilde{S}]_s \in \mathcal{L}_{exp}(\mathbb{P}),$$

wobei der Orlicz-Raum $\mathcal{L}_{exp}(\mathbb{P})$ durch

$$\mathcal{L}_{exp}(\mathbb{P}) := \left\{X : \Omega \mapsto \mathbb{R} \middle| \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\exp(\epsilon|X|)] < \infty \text{ für ein } \epsilon > 0\right\}$$

festgelegt ist, so folgt, dass $\mathbb{Q}$ das MEMM $\mathbb{Q}^E$ ist [53].

Die Wahl des MEMM zur Bepreisung einer Forderung kann außerdem durch die folgende Dualitätsbeziehung motiviert werden [14]:
Sei $H = (H_t)_{t \in \tau}$ die selbstfinanzierende Handelsstrategie eines Agenten und $c \in \mathbb{R}$ sein Startkapital. Der Agent will den diskontierten Endwert von H bezüglich der exponentiellen Nutzenfunktion

$$\mathcal{U}(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha x}$$

mit $\alpha > 0$ maximieren. Falls $\mathcal{M}_e \cap \mathcal{M}_f \neq \emptyset$, gilt die Dualitätsgleichung

$$\sup_{H \in \mathscr{H}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1 - \exp(-\alpha \tilde{V}_T(H))] = 1 - \exp\left(-\inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}} (\mathcal{H}(\mathbb{Q}, \mathbb{P}) + \alpha c)\right)$$

bzw.

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathcal{U}(\tilde{V}_T(H^*))] = 1 - \exp(-\mathcal{H}(\mathbb{Q}^E, \mathbb{P}) - \alpha c).$$

Dabei ist $\mathscr{H}$ ein Raum von selbstfinanzierenden Handelsstrategien wie in [14]. Existiert ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes MEMM $\mathbb{Q}^E$, dann hat auch das dazu duale Problem eine optimale Lösung in Form einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie $H^* \in \mathscr{H}$. Diese maximiert den erwarteten Nutzen des Agenten unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$. Mit (1.9) und (2.24) erhalten wir

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\bigg[1 - \exp\bigg(-\alpha c - \alpha \int_0^T H_s^{*1} d\tilde{S}_s\bigg)\bigg] = 1 - \exp\left(-\log\left(c_E\right) - \alpha c\right)$$

bzw.

$$c_E \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\bigg[\exp\bigg(-\alpha \int_0^T H_s^{*1} d\tilde{S}_s\bigg)\bigg] = 1. \tag{2.25}$$

Mit (2.21) ergibt sich für die Zahl der zum Zeitpunkt t durch die Handelsstrategie H^* gehaltenen Aktien

$$H_t^{*1} = -\frac{1}{\alpha}\xi_t^E.$$

Bemerkung. In der Literatur wird die Verwendung des MEMM auch zur Bepreisung von Forderungen in allgemeineren Modellen, wie beispielsweise im geometrischen Lévy-Modell [46], vorgeschlagen. Hierbei folgt der Aktienpreisprozess S der Dynamik

$$S_t = S_0 \exp(X_t),$$

wobei $X = (X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ein Lévy-Prozess ist. Erfüllt dieser die Voraussetzungen aus [46], dann existiert das MEMM $\mathbb{Q}^E$ mit der Eigenschaft, dass X unter dem Bepreisungsmaß $\mathbb{Q}^E$ wiederum ein Lévy-Prozess ist.

2.3.1 Bestimmung des MEMM

Nun zur Bestimmung des Maßes $\mathbb{Q}^E$ im RSM [5]. Motiviert durch die Darstellung (2.22) wählen wir einen Maßwechsel der Form

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\mathcal{G}_T} := \Lambda_T = c \exp\bigg(\int_0^T \xi_s d\tilde{S}_s\bigg)$$

für $c \in \mathbb{R}$ und einen $\tilde{S}$-integrierbaren Prozess $(\xi_t)_{t\in\mathcal{T}}$. Damit Λ_T wirklich eine Dichte ist, muss die Konstante c die Gleichung

$$\frac{1}{c} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\bigg[\exp\bigg(\int_0^T \xi_s d\tilde{S}_s\bigg)\bigg]$$

erfüllen. Sei $(\theta_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ein Prozess der Form $\theta_t = \langle\theta, Y_t\rangle$ mit $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_d)^T \in \mathbb{R}^d$. Wir wählen speziell

$$\xi_t = \tilde{S}_t^{-1}\theta_t \tag{2.26}$$

für $t \in \tau$. Damit erhalten wir mit (1.8) für die eben festgelegte Radon-Nikodým-Dichte

$$\Lambda_T = c\exp\left(\int_0^T \theta_s(\mu_s - r)ds + \int_0^T \theta_s\sigma_s dW_s\right) = c\mathrm{e}^{U_T}, \tag{2.27}$$

wobei $U_t = \int_0^t \theta_s(\mu_s - r)ds + \int_0^t \theta_s\sigma_s dW_s$. Für den Dichteprozess $\Lambda = (\Lambda_t)_{t\in\tau}$ können wir

$$\Lambda_t = \mathbb{E}_\mathbb{P}[\Lambda_T|\mathcal{G}_t] = c\mathrm{e}^{U_t}\mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\mathrm{e}^{U_T-U_t}\middle|\mathcal{G}_t\right] = c\mathrm{e}^{U_t}\mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\mathrm{e}^{U_T-U_t}\middle|Y_t\right] \overset{(A.3)}{=} c\mathrm{e}^{U_t}Y_t^T\exp((T-t)K(\theta))\mathbb{1}$$

schreiben, wobei

$$K(\theta) = A + \mathrm{diag}\left(\theta_1(\mu_1 - r) + \frac{(\theta_1\sigma_1)^2}{2}, \ldots, \theta_d(\mu_d - r) + \frac{(\theta_d\sigma_d)^2}{2}\right).$$

Weiters soll der diskontierte Aktienpreisprozess $\tilde{S}$ ein lokales $(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$-Martingal sein. Dafür reicht es

$$\mathbb{E}_\mathbb{Q}[\tilde{S}_T|\mathcal{G}_t] = \tilde{S}_t$$

für $t \in \tau$ zu fordern, denn aufgrund der Glättungseigenschaft des Erwartungswerts folgt

$$\mathbb{E}_\mathbb{Q}[\tilde{S}_t|\mathcal{G}_s] = \mathbb{E}_\mathbb{Q}[\mathbb{E}_\mathbb{Q}[\tilde{S}_T|\mathcal{G}_t]|\mathcal{G}_s] = \mathbb{E}_\mathbb{Q}[\tilde{S}_T|\mathcal{G}_s] = \tilde{S}_s$$

für $s \leq t$ und $\tilde{S}$ ist damit sogar ein $(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$-Martingal. Mit der Formel von Bayes (Satz B.9) erhalten wir

$$\mathbb{E}_\mathbb{Q}[\tilde{S}_T|\mathcal{G}_t] = \frac{\mathbb{E}_\mathbb{P}[\Lambda_T\tilde{S}_T|\mathcal{G}_t]}{\mathbb{E}_\mathbb{P}[\Lambda_T|\mathcal{G}_t]} = \tilde{S}_t\frac{c\mathrm{e}^{U_t}\mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\mathrm{e}^{\bar{U}_T-\bar{U}_t}\middle|Y_t\right]}{c\mathrm{e}^{U_t}\mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\mathrm{e}^{U_T-U_t}\middle|Y_t\right]},$$

wobei

$$\bar{U}_t = \int_0^t (\theta_s + 1)(\mu_s - r) - \frac{1}{2}\sigma_s^2 ds + \int_0^t (\theta_s + 1)\sigma_s dW_s.$$

Somit ist $\tilde{S}$ genau dann ein $(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$-Martingal, falls

$$\mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\mathrm{e}^{\bar{U}_T-\bar{U}_t}\middle|Y_t\right] = \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\mathrm{e}^{U_T-U_t}\middle|Y_t\right],$$

bzw. unter Verwendung von (A.3), falls

$$Y_t^T\exp((T-t)\bar{K}(\theta))\mathbb{1} = Y_t^T\exp((T-t)K(\theta))\mathbb{1} \tag{2.28}$$

mit

$$\bar{K}(\theta) = A + \mathrm{diag}\Big((\theta_1 + 1)(\mu_1 - r) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \frac{(\theta_1 + 1)^2\sigma_1^2}{2},$$
$$\ldots, (\theta_d + 1)(\mu_d - r) - \frac{1}{2}\sigma_d^2 + \frac{(\theta_d + 1)^2\sigma_d^2}{2}\Big)$$

erfüllt ist. Sei $e_i \in \mathcal{E}$. Dann ist der Ausdruck (2.28) zu folgendem System von deterministischen Gleichungen

$$e_i^T \exp((T-t)\bar{K}(\theta))\mathbb{1} = e_i^T \exp((T-t)K(\theta))\mathbb{1}$$

äquivalent. Eine Lösung ist einfach dadurch gegeben, falls die Matrizen $\bar{K}(\theta)$ und $K(\theta)$ übereinstimmen, d.h. falls

$$(\theta_i+1)(\mu_i-r) - \frac{1}{2}\sigma_i^2 + \frac{(\theta_i+1)^2\sigma_i^2}{2} = \theta_i(\mu_i-r) + \frac{(\theta_i\sigma_i)^2}{2}$$

für $i = 1, \dots, d$. Wir können daraus folgern, dass $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_e$, falls der Prozess $(\theta_t)_{t\in\mathcal{T}}$ durch

$$\theta_t = \frac{r-\mu_t}{\sigma_t^2}$$

bestimmt ist. Aufgrund von Satz 2.6 und Kapitel 2.2 wissen wir, dass das durch die Dichte

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{Q}'}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\mathcal{G}_T} &= \Lambda_T' = \exp\Big(-\frac{1}{2}\int_0^T \frac{(r-\mu_s)^2}{\sigma_s^2}ds + \int_0^T \frac{r-\mu_s}{\sigma_s}dW_s\Big) \\ &\overset{(2.27)}{=} \frac{1}{c}\Lambda_T \exp\Big(\frac{1}{2}\int_0^T \frac{(r-\mu_s)^2}{\sigma_s^2}ds\Big) \end{aligned}$$

festgelegte Maß $\mathbb{Q}'$ ein Martingalmaß ist, unter dem $W' = (W_t')_{t\in\mathcal{T}}$ mit $W_t' := W_t - \int_0^t \frac{r-\mu_s}{\sigma_s}ds$ eine Brownsche Bewegung ist und die Verteilung von Y unverändert bleibt. Weiters haben wir den Zusammenhang

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Q}'}\bigg|_{\mathcal{G}_T} = c\exp\Big(-\frac{1}{2}\int_0^T \frac{(r-\mu_s)^2}{\sigma_s^2}ds\Big).$$

Weil die Prozesse $(\mu_t)_{t\in\mathcal{T}}$ und $(\sigma_t)_{t\in\mathcal{T}}$ beschränkt sind, erhalten wir für die relative Entropie von $\mathbb{Q}$ bezüglich $\mathbb{P}$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbb{Q},\mathbb{P}) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\ln\Big(c\exp\Big(-\int_0^T \frac{(r-\mu_s)^2}{\sigma_s^2}ds + \int_0^T \frac{r-\mu_s}{\sigma_s}dW_s\Big)\Big)\Big] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\frac{d\mathbb{Q}'}{d\mathbb{P}}\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Q}'}\Big(\ln(c) - \int_0^T \frac{(r-\mu_s)^2}{\sigma_s^2}ds + \int_0^T \frac{r-\mu_s}{\sigma_s}dW_s\Big)\Big] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}\Big[c\exp\Big(-\frac{1}{2}\int_0^T \frac{(r-\mu_s)^2}{\sigma_s^2}ds\Big)\Big(\ln(c) + \int_0^T \frac{r-\mu_s}{\sigma_s}dW_s'\Big)\Big] < \infty. \end{aligned}$$

Aufgrund von $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_e \cap \mathcal{M}_f$, existiert ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes MEMM im RSM. Das Maß $\mathbb{Q}$ hat außerdem die Form (2.22). Aufgrund von (1.8) und (2.26) folgt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\exp\Big(\Big|\int_0^T \xi_s^2 d[\tilde{S}]_s\Big|\Big)\Big] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\exp\Big(\Big|\int_0^T \theta_s^2\sigma_s^2 ds\Big|\Big)\Big] < \infty$$

bzw.

$$\int_0^T \xi_s^2 d[\tilde{S}]_s \in \mathcal{L}_{exp}(\mathbb{P}).$$

Da das Maß $\mathbb{Q}$ alle Voraussetzungen der Proposition 2.10 erfüllt, ist $\mathbb{Q}$ das gesuchte MEMM im RSM. Zusammenfassend können wir sagen, dass das MEMM im RSM existiert, eindeutig bestimmt ist und durch die Radon-Nikodým-Dichte

$$\frac{d\mathbb{Q}^E}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\mathcal{G}_T} = \Lambda_T^E = c_E \exp\bigg(- \int_0^T \frac{(r-\mu_s)^2}{\sigma_s^2} ds + \int_0^T \frac{r-\mu_s}{\sigma_s} dW_s \bigg) = c_E \mathrm{e}^{U_T^E} \tag{2.29}$$

mit

$$\frac{1}{c_E} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\bigg[\exp\bigg(- \frac{1}{2} \int_0^T \frac{(r-\mu_s)^2}{\sigma_s^2} ds \bigg) \bigg]$$

beschrieben wird.

2.3.2 Verteilung der Prozesse W und Y unter dem MEMM

Aufgrund von $\mathbb{Q}^E \in \mathcal{M}_e$ und Kapitel 2.2 wissen wir, dass der Prozess $W^E = (W_t^E)_{t\in\mathcal{T}}$ mit

$$W_t^E := W_t - \int_0^t \frac{r-\mu_s}{\sigma_s} dW_s$$

eine Brownsche Bewegung bezüglich $\mathcal{G}$ unter dem Maß $\mathbb{Q}^E$ ist. Sei $u < t$ und $e_j \in \mathcal{E}$. Um die Verteilung von Y bestimmen zu können, betrachten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^E}[1_{\{Y_t=e_j\}}|\mathcal{G}_u] &= \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1_{\{Y_t=e_j\}}\Lambda_t^E|\mathcal{G}_u]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Lambda_t^E|\mathcal{G}_u]} \\
&= \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[1_{\{Y_t=e_j\}} c_E \mathrm{e}^{U_t^E} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\mathrm{e}^{U_T^E - U_t^E}\Big|Y_t\Big]\Big|Y_u\Big]}{c_E \mathrm{e}^{U_u^E}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\mathrm{e}^{U_T^E-U_u^E}\Big|Y_u\Big]} \\
&= \frac{c_E \mathrm{e}^{U_u^E}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[1_{\{Y_t=e_j\}} \mathrm{e}^{U_t^E - U_u^E} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\mathrm{e}^{U_T^E - U_t^E}\Big|Y_t\Big]\Big|Y_u\Big]}{c_E \mathrm{e}^{U_u^E}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\mathrm{e}^{U_T^E-U_u^E}\Big|Y_u\Big]} \\
&\overset{(A.3)}{=} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[1_{\{Y_t=e_j\}} \mathrm{e}^{U_t^E - U_u^E} Y_t^T \exp((T-t)K_E)\mathbb{1}\Big|Y_u\Big]}{Y_u^T \exp((T-u)K_E)\mathbb{1}} \\
&\overset{(A.3)}{=} Y_u^T \exp((t-u)K_E)e_j\Big(e_j^T \exp((T-t)K_E)\mathbb{1}\Big)\Big(Y_u^T \exp((T-u)K_E)\mathbb{1}\Big)^{-1}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

mit

$$K_E = A - \frac{1}{2}\mathrm{diag}\bigg(\frac{(r-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}, \dots, \frac{(r-\mu_d)^2}{\sigma_d^2}\bigg).$$

Der Prozess Y ist damit eine zeitstetige, inhomogene Markovkette bezüglich $\mathcal{G}$ unter $\mathbb{Q}^E$, da für $u < t$ und $e_j \in \mathcal{E}$ die Bedingung

$$\mathbb{Q}^E(Y_t = e_j|\mathcal{G}_u) \overset{(2.30)}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^E}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^E}[1_{\{Y_t=e_j\}}|\mathcal{G}_u]|Y_u] = \mathbb{Q}^E(Y_t = e_j|Y_u)$$

erfüllt ist [40]. Sei $i \neq j$. Die Übergangsintensitäten $a^E_{i,j}(t)$ der Markovkette Y unter $\mathbb{Q}^E$ sind durch

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Q}^E(Y_{t+\Delta t} = e_j | Y_t = e_i) \\
&\quad \overset{(2.30)}{=} e_i^T \exp((t+\Delta t - t)K_E)e_j \Big(e_j^T \exp((T-(t+\Delta t))K_E)\mathbb{1}\Big)\Big(e_i^T \exp((T-t)K_E)\mathbb{1}\Big)^{-1} \\
&\quad = e_i^T (I + \Delta t K_E) e_j \Big(e_j^T \exp((T-t)K_E)(I - \Delta t K_E)\mathbb{1}\Big)\Big(e_i^T \exp((T-t)K_E)\mathbb{1}\Big)^{-1} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\
&\quad = a_{i,j}\bigg(e_j^T \exp((T-t)K_E)\mathbb{1}\Big(e_i^T \exp((T-t)K_E)\mathbb{1}\Big)^{-1}\bigg)\Delta t + \mathrm{o}(\Delta t) \\
&\quad = a^E_{i,j}(t)\Delta t + \mathrm{o}(\Delta t)
\end{aligned}$$

für $\Delta t \to 0$ gegeben.

2.4 Esscher-Martingalmaß (ESSMM)

Ein weiterer Ansatz zur Bestimmung eines „geeigneten“ Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ für die Bepreisung einer Forderung ist die Esscher-Transformation. Sie wurde 1932 von Esscher [23] eingeführt und ist wie folgt definiert:
Sei $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ eine reelle Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dabei soll für das Maß $\mathbb{P}_X$ eine Dichtefunktion $p(x)$ existieren. Weiters ist θ eine reelle Zahl mit

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathrm{e}^{\theta X}] < \infty.$$

Dann ist die Esscher-Transformation der ursprünglichen Verteilung durch die neue Dichtefunktion

$$q(x) := \frac{\mathrm{e}^{\theta x} p(x)}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathrm{e}^{\theta X}]} \tag{2.31}$$

gegeben. Die Dichte $q(x)$ hängt vom Esscher-Parameter θ ab. Die Methode fand zunächst einmal in der aktuariellen Wissenschaft zur Approximation von Gesamtschadenverteilungen um einen Punkt x_0 Verwendung. Durch geeignete Wahl des Parameters θ kann die Schadensverteilung nämlich derart transformiert werden, dass deren neuer Mittelwert x_0 ist. Anschließend wird die transformierte Schadensverteilung durch eine geeignete Methode approximiert [28].
Die Esscher-Transformation kann auch als Instrument im Bereich der Risikotheorie dienen. Dabei beschreibt die Zufallsvariable X das zu bewertende Risiko und $\mathbb{Q}$ ist das durch die Esscher-Transformation hervorgegangene Maß. Dann ist

$$\rho(X) := -\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X]$$

ein Risikomaß [8]. Im Gegensatz zum häufig verwendeten VaR (Value at Risk) handelt es sich hierbei sogar um ein kohärentes Risikomaß.

Gerber und Siu [28] verwendeten die Esscher-Transformation erstmals im Bereich der Optionsbepreisung. Der Aktienpreisprozess $S = (S_t)_{t\in\mathcal{T}}$ sei durch

$$S_t = S_0 \mathrm{e}^{X_t}, \quad X_0 = 0$$

gegeben, wobei $X = (X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ein Prozess mit unabhängigen, stationären Zuwächsen sein soll. Weiters bezeichnet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ den dazugehörenden Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ die Filtration. Sofern die Bedingung $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{e}^{\theta X_T}\right] < \infty$ erfüllt ist, können wir motiviert durch (2.31) einen Maßwechsel der Form

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{G}_T} := \Lambda_T = \frac{\mathrm{e}^{\theta X_T}}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathrm{e}^{\theta X_T}]} \tag{2.32}$$

vorschlagen. Per Konstruktion ist $\mathbb{Q}$ ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß und der Dichteprozess $\Lambda = (\Lambda_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ist durch

$$\Lambda_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Lambda_T|\mathcal{G}_t] = \frac{\mathrm{e}^{\theta X_t}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{e}^{\theta(X_T - X_t)}\middle|\mathcal{G}_t\right]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{e}^{\theta(X_t - X_0)}\right]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{e}^{\theta(X_T - X_t)}\right]} = \frac{\mathrm{e}^{\theta X_t}}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{e}^{\theta X_t}\right]}$$

gegeben. Lässt sich der Parameter θ derart wählen, sodass der diskontierte Preisprozess $\tilde{S}$ ein lokales $(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$-Martingal ist, so sprechen wir vom Esscher-Martingalmaß.
In diesem Fall bezeichnen wir den Esscher-Parameter mit θ^{ES} und das dadurch bestimmte Wahrscheinlichkeitsmaß mit $\mathbb{Q}^{ES}$. Falls das ESSMM existiert, erfüllt der Parameter θ^{ES} die Gleichung

$$\mathrm{e}^{rt}S_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{ES}}\left[S_t|\mathcal{G}_0\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Lambda_t^{ES} S_t|\mathcal{G}_0] = S_0\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{e}^{(\theta^{ES}+1)X_t}\right]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{e}^{\theta^{ES}X_t}\right]} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[S_t^{\theta^{ES}+1}\right]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[S_t^{\theta^{ES}}\right]} \tag{2.33}$$

für $t \in \mathcal{T}$ und ist eindeutig bestimmt [39]. Falls umgekehrt ein Parameter θ die Gleichung (2.33) löst, so ist das dadurch festgelegte Maß $\mathbb{Q}$ ein Martingalmaß und wir haben $\theta = \theta^{ES}$. Dies ist richtig, da wir aufgrund der unabhängigen, stationären Zuwächse von X zeigen können, dass

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_T|\mathcal{G}_t] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Lambda_T\tilde{S}_T|\mathcal{G}_t]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\Lambda_T|\mathcal{G}_t\right]} \overset{(2.32)}{=} \tilde{S}_t\mathrm{e}^{-r(T-t)}\frac{\mathrm{e}^{\theta X_t}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{e}^{(\theta+1)X_{T-t}}\right]}{\mathrm{e}^{\theta X_t}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{e}^{\theta X_{T-t}}\right]} \overset{(2.33)}{=} \tilde{S}_t$$

für $t \in \mathcal{T}$. Die Verwendung des ESSMM zur Optionsbepreisung können wir auch mittels eines nutzentheoretischen Arguments rechtfertigen [28]. Dabei soll ein risikoaverser, repräsentativer Agent m Stück Aktien besitzen und seine Entscheidungen auf Grund einer streng monoton wachsenden, konkaven und stetig differenzierbaren Nutzenfunktion $\mathcal{U}$ treffen. Die Funktion $\mathcal{U}$ ist für $x > 0$ und $\alpha > 0$ durch

$$\mathcal{U}(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1, \\ \ln(x) & \alpha = 1 \end{cases}$$

gegeben. Weiters ist $C_t = f(S_t)$ eine zum Zeitpunkt t fällige, integrierbare Forderung. Der Preis der Forderung zum Zeitpunkt 0 sei mit $\Pi_0(C_t)$ dermaßen festgelegt, sodass es für den Agenten nutzenoptimal ist, weder Anteile von C_t zu kaufen noch zu verkaufen, d.h. die Funktion

$$\Phi(\pi_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathcal{U}\left(mS_t + \pi_t(C_t - \mathrm{e}^{rt}\Pi_0(C_t))\right)\right]$$

ist für $\pi_t = 0$ maximal. Durch Differenzieren erhalten wir aus

$$\Phi'(\pi_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\mathcal{U}'\left(mS_t + \pi_t(C_t - \mathrm{e}^{rt}\Pi_0(C_t))\right)(C_t - \mathrm{e}^{rt}\Pi_0(C_t))\Big]$$

die notwendige Bedingung

$$\Phi'(0) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\mathcal{U}'(mS_t)(C_t - \mathrm{e}^{rt}\Pi_0(C_t))\Big] = 0$$

bzw. äquivalent dazu

$$\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[C_t\mathcal{U}'(mS_t)\right]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathcal{U}'(mS_t)\right]} = \mathrm{e}^{rt}\Pi_0(C_t).$$

Diese Bedingung ist sogar hinreichend, da $\Phi'' < 0$ weil $\mathcal{U}'' < 0$. Dies soll für Forderungen jeglicher Art in Abhängigkeit von S gelten, so z.B. auch für $C_t = S_t$. Zusammen mit der speziellen Form der Nutzenfunktion des risikoaversen Agenten resultiert die Bedingung

$$\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S_t^{1-\alpha}]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S_t^{-\alpha}]} = \mathrm{e}^{rt}\Pi_0(S_t) = \mathrm{e}^{rt}S_0.$$

Somit ist der Preis einer solchen Forderung C_t als diskontierter Erwartungswert unter dem ESSMM mit $\theta^{ES} = -\alpha$ festgelegt.

2.4.1 Bestimmung des ESSMM

Bestimmen wir nun das Maß $\mathbb{Q}^{ES}$ im RSM, siehe [19] und [59]. Da der Prozess X in (1.7) durch eine Markovkette Y mit $d \geq 2$ Zuständen gesteuert wird, kann X keine unabhängigen, stationären Zuwächse über den gesamten Zeitraum $\tau = [0, T]$ besitzen. Dies gilt jedoch für den Prozess X während der Verweildauer von Y in einem fixen Zustand, weshalb auch der Esscher-Parameter durch Y gesteuert werden muss. Wir suchen somit einen Prozess $(\theta_t)_{t\in\tau}$ der speziellen Form

$$\theta_t = \langle\theta, Y_t\rangle$$

mit $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_d)^T \in \mathbb{R}^d$, d.h. wir suchen für jeden Zustand $e_i \in \mathcal{E}$ einen eigenen Esscher-Parameter θ_i. Damit sei der Maßwechsel durch

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{G}_T} := \Lambda_T = \frac{\exp\left(\int_0^T \theta_s dX_s\right)}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\exp\left(\int_0^T \theta_s dX_s\right)\Big]}$$

bestimmt. Durch (1.7) erhalten wir für die eben vorgeschlagene Radon-Nikodým-Dichte

$$\Lambda_T = c\exp\left(\int_0^T \theta_s\left(\mu_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)ds + \int_0^T \theta_s\sigma_s dW_s\right) \tag{2.34}$$

mit

$$\frac{1}{c} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\int_0^T \theta_s dX_s\right)\right]$$

und für den dazugehörigen Dichteprozess $\Lambda = (\Lambda_t)_{t\in\tau}$ ergibt sich

$$\Lambda_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Lambda_T|\mathcal{G}_t] \overset{(A.3)}{=} c\exp\left(\int_0^t \theta_s dX_s\right)Y_t^T\exp((T-t)K(\theta))\mathbb{1}$$

mit

$$K(\theta) = A + \operatorname{diag}\left(\theta_1\left(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right) + \frac{\theta_1^2\sigma_1^2}{2}, \ldots, \theta_d\left(\mu_d - \frac{1}{2}\sigma_d^2\right) + \frac{\theta_d^2\sigma_d^2}{2}\right).$$

Der Prozess $(\theta_t)_{t\in\tau}$ wird derart bestimmt, dass $\tilde{S}$ ein lokales $(\mathcal{G},\mathbb{Q})$-Martingal ist. Genau wie in Kapitel 2.3.1 erhalten wir

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_T|\mathcal{G}_t] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Lambda_T\tilde{S}_T|\mathcal{G}_t]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Lambda_T|\mathcal{G}_t]} \overset{(1.7)}{=} \tilde{S}_t\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\int_t^T r ds\right)\exp\left(\int_t^T(\theta_s+1)dX_s\right)\Big|Y_t\right]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\int_t^T \theta_s dX_s\right)\Big|Y_t\right]}$$

für $t \in \tau$. Somit ist $\tilde{S}$ genau dann ein $(\mathcal{G},\mathbb{Q})$-Martingal, falls die Gleichung

$$Y_t^T\exp((T-t)\bar{K}(\theta))\mathbb{1} = Y_t^T\exp((T-t)K(\theta))\mathbb{1} \tag{2.35}$$

mit

$$\bar{K}(\theta) = A + \operatorname{diag}\Bigg((\theta_1+1)\left(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right) - r + \frac{(\theta_1+1)^2\sigma_1^2}{2}, \\ \ldots, (\theta_d+1)\left(\mu_d - \frac{1}{2}\sigma_d^2\right) - r + \frac{(\theta_d+1)^2\sigma_d^2}{2}\Bigg)$$

erfüllt ist. Sei $e_i \in \mathcal{E}$. Dann kann der Ausdruck (2.35) als ein System von deterministischen Gleichungen

$$e_i^T\exp((T-t)\bar{K}(\theta))\mathbb{1} = e_i^T\exp((T-t)K(\theta))\mathbb{1}$$

für $i = 1,\ldots,d$ interpretiert werden. Dieses System ist jedenfalls gelöst, falls die Einträge der Matrizen $\bar{K}(\theta)$ und $K(\theta)$ übereinstimmen, d.h. falls

$$(\theta_i+1)\left(\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right) - r + \frac{(\theta_i+1)^2\sigma_i^2}{2} = \theta_i\left(\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right) + \frac{\theta_i^2\sigma_i^2}{2}$$

für $i = 1, \ldots, d$. Daraus erhalten wir für jeden Zustand $e_i \in \mathcal{E}$ einen im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmten Esscher-Parameter

$$\theta_i^{ES} = \frac{r - \mu_i}{\sigma_i^2}.$$

Damit existiert das ESSMM im RSM und wird durch die Radon-Nikodým-Dichte

$$\frac{d\mathbb{Q}^{ES}}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\mathcal{G}_T} = \Lambda_T^{ES} = c_{ES} \exp\left(\int_0^T \left(\frac{r - \mu_s}{\sigma_s^2} \right) \left(\mu_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2 \right) ds + \int_0^T \frac{r - \mu_s}{\sigma_s} dW_s \right) \tag{2.36}$$

mit

$$\frac{1}{c_{ES}} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\int_0^T \left(\frac{r - \mu_s}{\sigma_s^2} \right) \left(\mu_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2 + \frac{r - \mu_s}{2} \right) ds \right) \right]$$

beschrieben.

2.4.2 Verteilung der Prozesse W und Y unter dem ESSMM

Analog zu Kapitel 2.3.2 können wir die Verteilung von W und Y unter $\mathbb{Q}^{ES}$ herleiten. Aufgrund von $\mathbb{Q}^{ES} \in \mathcal{M}_e$, ist der Prozess $W^{ES} = (W_t^{ES})_{t \in \mathcal{T}}$ mit

$$W_t^{ES} := W_t - \int_0^t \frac{r - \mu_s}{\sigma_s} dW_s$$

eine Brownsche Bewegung bezüglich $\mathcal{G}$ unter $\mathbb{Q}^{ES}$. Weiters wissen wir, dass Y eine zeitstetige Markovkette bezüglich $\mathcal{G}$ unter $\mathbb{Q}^{ES}$ ist. Sei $i \neq j$. Die Übergangsintensitäten $a_{i,j}^{ES}(t)$ sind durch

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}^{ES}(Y_{t+\Delta t} = e_j | Y_t = e_i) &= a_{i,j} \left(e_j^T \exp((T-t)K_{ES})\mathbb{1} \left(e_i^T \exp((T-t)K_{ES})\mathbb{1} \right)^{-1} \right) \Delta t + \mathrm{o}(\Delta t) \\
&= a_{i,j}^{ES}(t)\Delta t + \mathrm{o}(\Delta t)
\end{aligned}$$

für $\Delta t \to 0$ gegeben, wobei

$$K_{ES} = A + \mathrm{diag}\left(\left(\frac{r - \mu_1}{\sigma_1^2} \right) \left(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \frac{r - \mu_1}{2} \right), \ldots, \left(\frac{r - \mu_d}{\sigma_d^2} \right) \left(\mu_d - \frac{1}{2}\sigma_d^2 + \frac{r - \mu_d}{2} \right) \right).$$

2.5 Spieltheoretischer Ansatz zur Bestimmung eines Martingalmaßes (SAMM)

Bisher haben wir stets das No-Arbitrage-Prinzip, respektive die Martingalbedingung, benützt, um ein „geeignetes" Bepreisungsmaß festzulegen. Um dies im RSM eindeutig tun zu können, haben wir zusätzlich den Distanzbegriff der relativen Entropie bzw. die Esscher-Transformation eingeführt. Hier wird ein grundlegend anderes Konzept vorgestellt, um ein „geeignetes" Maß

zur Bepreisung einer Forderung bestimmen zu können. Wir betrachten ein stochastisches Spiel zwischen zwei Teilnehmern: Spieler A und Spieler B [58].
Dabei ist Spieler A ein Agent, der alle anderen Teilnehmer am Markt repräsentiert, und Spieler B der Markt selbst. Spieler A wählt seinerseits eine selbstfinanzierende Handelsstrategie, um den erwarteten Nutzen des diskontierten Endwerts dieser Handelsstrategie bezüglich eines realen Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}^\theta$ zu maximieren. Dabei repräsentiert das Maß $\mathbb{P}^\theta$ ein von Spieler B gewähltes „Szenario", wobei Spieler B genau jenes „Szenario" wählt, das den erwarteten Nutzen von Spieler A minimiert. Die Nutzenfunktion $\mathcal{U}$ von Spieler A ist streng monoton wachsend, konkav und zweimal stetig differenzierbar.
Somit resultiert dieses stochastische Spiel in einem Min-Max-Problem. Ziel dieses Kapitels ist es, das Min-Max-Problem zu lösen und die jeweilige optimale Strategie, d.h. für Spieler A die optimale Handelsstrategie bzw. für Spieler B das optimale „Szenario", anzugeben.

Nun zur mathematischen Formulierung unseres Problems: Wir bezeichnen mit $(\theta_t)_{t\in\mathcal{T}}$ einen $\mathcal{G}$-adaptierten Prozess, der

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right)\right] < \infty \tag{2.37}$$

erfüllt, und mit $\Theta := \{(\theta_t)_{t\in\mathcal{T}}\}$ den Raum all dieser Prozesse. Für $(\theta_t)_{t\in\mathcal{T}} \in \Theta$ definieren wir einen Prozess $\Lambda^\theta = (\Lambda_t^\theta)_{t\in\mathcal{T}}$ mit

$$\Lambda_t^\theta = \exp\left(\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right) \tag{2.38}$$

als Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$d\Lambda_t^\theta = \Lambda_t^\theta \theta_t dW_t$$

mit Anfangswert $\Lambda_0^\theta = 1$. Der Prozess Λ^θ ist ein Dichteprozess, da dieser per Konstruktion ein strikt positives, lokales Martingal ist und aufgrund der erfüllten Novikov-Bedingung (2.37) ein Martingal mit $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Lambda_T^\theta] = 1$ ist. Deswegen ist für jeden Prozess $(\theta_t)_{t\in\mathcal{T}} \in \Theta$ durch

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^\theta}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{G}_T} := \Lambda_T^\theta$$

ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Maß gegeben. Der Raum aller möglichen realen Wahrscheinlichkeitsmaße ist fortan durch

$$\mathscr{P} := \{\mathbb{P}^\theta | (\theta_t)_{t\in\mathcal{T}} \in \Theta\}$$

gegeben. Durch diesen Raum sollen die für den Spieler B zur Auswahl stehenden „Szenarien" in unserem stochastischen Spiel beschrieben werden. Die Wahl eines „Szenarios" bzw. die Wahl eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}^\theta$ aus $\mathscr{P}$ ist damit äquivalent zur Wahl des dazugehörigen Prozesses $(\theta_t)_{t\in\mathcal{T}}$ aus Θ.

Sei $(\pi_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ein $\mathcal{G}$-vorhersehbarer Prozess mit $0 \le \pi_t \le 1$. Der Prozess $(\pi_t)_{t\in\mathcal{T}}$ soll dabei den

Aktienanteil einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie H beschreiben. Zum Zeitpunkt $t \in \tau$ hält diese Handelsstrategie

$$H_t^1 = \frac{\pi_t V_t(H)}{S_t}$$

Aktien und

$$H_t^0 = \frac{(1-\pi_t)V_t(H)}{B_t}$$

Bonds. Weiters bezeichnet $\Pi := \{(\pi_t)_{t\in\tau} | 0 \leq \pi_t \leq 1\}$ den Raum all dieser Prozesse. Die selbstfinanzierende Handelsstrategie H ist durch den Prozess $(\pi_t)_{t\in\tau}$ festgelegt, weshalb wir H^π schreiben. Wegen (1.8) und (1.9) erhalten wir für den diskontierten Wertprozess

$$d\tilde{V}_t(H^\pi) = \frac{\pi_t V_t(H^\pi)}{S_t} d\tilde{S}_t = \frac{\pi_t \tilde{V}_t(H^\pi)}{\tilde{S}_t} d\tilde{S}_t = \tilde{V}_t(H^\pi)((\mu_t - r)\pi_t dt + \sigma_t \pi_t dW_t).$$

In unserem stochastischen Spiel sollen alle für den Spieler A zur Auswahl stehenden Strategien einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie H^π entsprechen. Folglich ist die Wahl einer solchen Handelsstrategie äquivalent zur Wahl des dazugehörigen Prozesses $(\pi_t)_{t\in\tau}$ aus Π.

Um das Min-Max-Problem zu lösen, werden die Strategien $(\pi_t^*)_{t\in\tau} \in \Pi$ und $(\theta_t^*)_{t\in\tau} \in \Theta$ und die Funktion

$$\begin{aligned}\Phi(u,y) &:= \inf_{\theta\in\Theta} \sup_{\pi\in\Pi} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\theta}\Big[\mathcal{U}(\tilde{V}_T(H^\pi))\Big| U_0 = u, Y_0 = y\Big] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\theta^*}}\Big[\mathcal{U}(\tilde{V}_T(H^{\pi^*}))\Big| U_0 = u, Y_0 = y\Big]\end{aligned} \tag{2.39}$$

gesucht. Dabei ist u der Anfangswert des Prozesses $U = ((U_t^1, U_t^2, U_t^3))_{t\in\tau}$. Der Prozess U ist durch die Differentialgleichung

$$dU_t = \begin{pmatrix} dt \\ d\Lambda_t^\theta \\ d\tilde{V}(H^\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dt \\ \Lambda_t^\theta \theta_t dW_t \\ \tilde{V}(H^\pi)((\mu_t - r)\pi_t dt + \sigma_t \pi_t dW_t) \end{pmatrix}$$

bestimmt und auf $\mathcal{S} = \tau \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ definiert. Mit y bezeichnen wir den Startzustand der Markovkette Y. In der Optimallösung wählt der Markt das reale Maß $\mathbb{P}^{\theta^*}$ und der Agent handelt gemäß der selbstfinanzierenden Handelsstrategie H^{π^*}.

Um den Ausdruck (2.39) zu lösen, werden wir eine allgemeine Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs-Gleichung (HJBI-Gleichung) für unser stochastisches Spiel formulieren. Dabei wollen wir uns auf Prozesse $(\theta_t)_{t\in\tau} \in \Theta$ und $(\pi_t)_{t\in\tau} \in \Pi$ der Form

$$\theta_t = \bar{\theta}(U_t, Y_t) \quad \text{bzw.} \quad \pi_t = \bar{\pi}(U_t, Y_t)$$

mit

$$\bar{\theta} : \mathcal{S} \times \mathcal{E} \mapsto \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad \bar{\pi} : \mathcal{S} \times \mathcal{E} \mapsto \mathbb{R}$$

beschränken. Wir bezeichnen $\bar{\theta}$ und $\bar{\pi}$ als Kontrollfunktionen. Diese Einschränkung ist dadurch gerechtfertigt, dass es nur schwache Zusatzbedingungen in der Formulierung unseres Min-Max-Problems benötigt, um die gleiche Optimallösung wie ohne diese Einschränkung zu erzielen [48]. Wir werden für μ_t und σ_t die Schreibweise $\mu(Y_t)$ und $\sigma(Y_t)$ verwenden. Weiters werden wir der Einfachheit der Notation halber nicht zwischen θ und $\bar{\theta}$ bzw. π und $\bar{\pi}$ unterscheiden. Betrachten wir eine Funktion

$$\varphi : \mathcal{S} \times \mathcal{E} \mapsto \mathbb{R} \quad \text{mit } \varphi(\cdot, y) \in C^2(\mathcal{S}) \cap C(\bar{\mathcal{S}}) \tag{2.40}$$

für $y \in \mathcal{E}$. Dann können wir für den Prozess U den sogenannten Regime-Switching-Generator $L^{\theta,\pi}$ durch

$$\begin{aligned} L^{\theta,\pi}\varphi(u,y) := {}& \frac{\partial \varphi}{\partial s}(u,y) + u_3(\mu(y)-r)\pi\frac{\partial \varphi}{\partial u_3}(u,y) + \frac{1}{2}u_2^2\theta^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2^2}(u,y) \\ & + \frac{1}{2}u_3^2\sigma^2(y)\pi^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_3^2}(u,y) + u_2u_3\theta\sigma(y)\pi\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2\partial u_3}(u,y) \\ & + \Big\langle \Big(\varphi(u,e_1),\dots,\varphi(u,e_d)\Big)^T, A^T y\Big\rangle \end{aligned} \tag{2.41}$$

definieren, wobei $u = (u_1,u_2,u_3) = (s,u_2,u_3) \in \mathcal{S}$ und $y \in \mathcal{E}$ [58].

Satz 2.11 (HJBI-Gleichung). Angenommen, es existieren Kontrollfunktionen θ^* und π^* mit

$$(\theta^*(U_t,Y_t))_{t\in\tau} \in \Theta, \quad (\pi^*(U_t,Y_t))_{t\in\tau} \in \Pi$$

und eine Funktion $\varphi : \mathcal{S} \times \mathcal{E} \mapsto \mathbb{R}$ mit $\varphi(\cdot,y) \in C^2(\mathcal{S}) \cap C(\bar{\mathcal{S}})$ für $y \in \mathcal{E}$ und

$$\mathcal{S} = (0,T) \times (0,\infty) \times (0,\infty),$$

sodass die folgenden Bedingungen allesamt erfüllt sind:

(i) $L^{\theta,\pi^*(u,y)}\varphi(u,y) \geq 0,$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$ und $(u,y) \in \mathcal{S} \times \mathcal{E}$.

(ii) $L^{\theta^*(u,y),\pi}\varphi(u,y) \leq 0,$ für alle $\pi \in \mathbb{R}$ und $(u,y) \in \mathcal{S} \times \mathcal{E}$.

(iii) $L^{\theta^*(u,y),\pi^*(u,y)}\varphi(u,y) = 0,$ für alle $(u,y) \in \mathcal{S} \times \mathcal{E}$.

(iv) $\lim_{t\to T^-} \varphi(U_t,Y_t) = U_T^2\mathcal{U}(U_T^3)$

(v) Die Familie $\{\varphi(U_{\mathfrak{T}},Y_{\mathfrak{T}}) : \mathfrak{T} \text{ ist eine Stoppzeit mit } \mathfrak{T} \leq T\}$ ist gleichgradig integrierbar.

Für $(u,y) \in \mathcal{S} \times \mathcal{E}$ definieren wir

$$J^{\theta,\pi}(u,y) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[U_T^2\mathcal{U}(U_T^3)\Big|U_0 = u, Y_0 = y\Big] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\theta}\Big[\mathcal{U}(\tilde{V}_T(H^\pi))\Big|U_0 = u, Y_0 = y\Big].$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi(u,y) = \Phi(u,y) &= \inf_{\theta\in\Theta}\Big(\sup_{\pi\in\Pi} J^{\theta,\pi}(u,y)\Big) = \sup_{\pi\in\Pi}\Big(\inf_{\theta\in\Theta} J^{\theta,\pi}(u,y)\Big) \\ &= \sup_{\pi\in\Pi} J^{\theta^*,\pi}(u,y) = \inf_{\theta\in\Theta} J^{\theta,\pi^*}(u,y) = J^{\theta^*,\pi^*}(u,y) \end{aligned} \tag{2.42}$$

und folglich sind durch θ^* und π^* die optimalen Kontrollfunktionen des gerade beschriebenen Problems gegeben [43].

Bemerkung. Anstelle der Bedingungen (i) - (iii) aus Satz 2.11 können wir äquivalent dazu

$$\begin{aligned}
&\inf_{\theta\in\mathbb{R}} L^{\theta,\pi^*(u,y)}\varphi(u,y) = L^{\theta^*(u,y),\pi^*(u,y)}\varphi(u,y) = 0,\\
&\sup_{\pi\in\mathbb{R}} L^{\theta^*(u,y),\pi}\varphi(u,y) = L^{\theta^*(u,y),\pi^*(u,y)}\varphi(u,y) = 0
\end{aligned}$$

für $(u,y)\in\mathcal{S}\times\mathcal{E}$ verwenden.

Nun zur Lösung des eben vorgestellten stochastischen Spiels zwischen dem Agenten und dem Markt, siehe [49] und [58]. Motiviert durch den Ausdruck (iv) des Satzes 2.11 wählen wir für die Funktion φ den Ansatz

$$\varphi(u,y) = u_2\mathcal{U}(u_3 f(s,y))$$

für $(u,y)\in\mathcal{S}\times\mathcal{E}$ mit $u=(s,u_2,u_3)$, wobei f eine nicht verschwindende, deterministische Funktion mit $f(T,y)=1$ für $y\in\mathcal{E}$ sein soll. Für den Regime-Switching-Generator $L^{\theta,\pi}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
L^{\theta,\pi}\varphi(u,y) = {} & u_2\mathcal{U}'(u_3 f(s,y))u_3\frac{\partial f}{\partial s}(s,y) + u_3(\mu(y)-r)\pi u_2\mathcal{U}'(u_3 f(s,y))f(s,y)\\
&+\frac{1}{2}u_3^2\sigma^2(y)\pi^2 u_2\mathcal{U}''(u_3 f(s,y))f^2(s,y) + u_2u_3\theta\sigma(y)\pi\mathcal{U}'(u_3 f(s,y))f(s,y)\\
&+\Big\langle \Big(u_2\mathcal{U}(u_3 f(s,e_1)),\ldots,u_2\mathcal{U}(u_3 f(s,e_d))\Big)^T, A^T y\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Die Minimierung von $L^{\theta,\pi^*(u,y)}\varphi(u,y)$ bezüglich θ liefert die notwendige Bedingung

$$u_2u_3\sigma(y)\pi^*(u,y)\mathcal{U}'(u_3 f(s,y))f(s,y) = 0.$$

Da $\mathcal{U}'>0$ und f per Konstruktion eine nicht verschwindende Funktion ist, muss $\pi^*(u,y)=0$ gelten. Analog dazu liefert die Maximierung von $L^{\theta^*(u,y),\pi}\varphi(u,y)$ bezüglich π die notwendige Bedingung

$$\begin{aligned}
&u_3(\mu(y)-r)u_2\mathcal{U}'(u_3 f(s,y))f(s,y) + u_3^2\sigma^2(y)\pi u_2\mathcal{U}''(u_3 f(s,y))f^2(s,y)\\
&+u_2u_3\theta^*(u,y)\sigma(y)\mathcal{U}'(u_3 f(s,y))f(s,y) = 0.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $\pi^*(u,y)=0$ erhalten wir daraus

$$\theta^*(u,y) = \frac{r-\mu(y)}{\sigma(y)}.$$

Diese Bedingung ist aufgrund der Konkavität von $\mathcal{U}$ sogar hinreichend für das Vorliegen eines Maximums. Weiters soll schließlich noch $L^{\theta^*(u,y),\pi^*(u,y)}\varphi(u,y)=0$ erfüllt sein, d.h. es soll

$$u_2\mathcal{U}'(u_3 f(s,y))u_3\frac{\partial f}{\partial s}(s,y) + \Big\langle \Big(u_2\mathcal{U}(u_3 f(s,e_1)),\ldots,u_2\mathcal{U}(u_3 f(s,e_d))\Big)^T, A^T y\Big\rangle = 0$$

gelten. Sei $f_i(t) := f(t, e_i)$ für $e_i \in \mathcal{E}$. Dann ist der vorige Ausdruck zu folgendem System von gewöhnlichen DGL

$$\mathcal{U}'(u_3 f_i(s)) u_3 f_i'(s) + \sum_{j=1}^{d} \mathcal{U}(u_3 f_j(s)) a_{i,j} = 0 \tag{2.43}$$

für $i = 1, \ldots, d$ äquivalent. Wählen wir $f_i(s) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, d$. Damit ist das Gleichungssystem (2.43) gelöst und es gilt $c = 1$ aufgrund der Randbedingung $f_i(T) = 1$. Da die Nutzenfunktion U zweimal stetig differenzierbar ist, haben wir mit

$$\varphi(u, y) = u_2 \mathcal{U}(u_3) \tag{2.44}$$

eine Funktion und mit

$$\theta^*(u, y) = \frac{r - \mu(y)}{\sigma(y)}, \quad \pi^*(u, y) = 0 \tag{2.45}$$

zwei Kontrollfunktionen gefunden, sodass die Bedingungen des Satzes 2.11 erfüllt sind. Folglich liegt durch θ^* und π^* eine Optimallösung der HJBI-Gleichung vor.

Das Startkapital des Agenten bezeichnen wir mit $c > 0$. Aufgrund der Stetigkeit von φ auf $\bar{S}$ erhalten wir für die Anfangswerte $u = (0, 1, c) \in \bar{S}$ und $y \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned}
\Phi(u, y) &= \inf_{\theta \in \Theta} \sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\theta}\Big[\mathcal{U}(\tilde{V}_T(H^\pi)) \Big| U_0 = u, Y_0 = y\Big] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\theta^*}}\Big[\mathcal{U}(\tilde{V}_T(H^{\pi^*})) \Big| U_0 = u, Y_0 = y\Big] = \mathcal{U}(c).
\end{aligned}$$

Die optimale Strategie $(\pi_t^*)_{t \in \mathcal{T}} \in \Pi$ für Spieler A bzw. $(\theta_t^*)_{t \in \mathcal{T}} \in \Theta$ für Spieler B ist weiters durch

$$\pi_t^* = 0, \quad \theta_t^* = \frac{r - \mu_t}{\sigma_t}$$

bestimmt. Einerseits ist es für den repräsentativen, risikoaversen Agenten optimal, sein gesamtes Kapital in den risikolosen Bond zu investieren, d.h. der Agent wählt die selbstfinanzierende Handelsstrategie

$$H_t^{\pi^*} = \Big(\frac{V_t(H^{\pi^*})}{B_t}, 0\Big).$$

Andererseits ist es für den Markt optimal, ein „Szenario", das durch die Radon-Nikodým-Dichte

$$\frac{d\mathbb{P}^{\theta^*}}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\mathcal{G}_T} = \Lambda_T^{\theta^*} = \exp\Big(- \frac{1}{2} \int_0^T \frac{(r - \mu_s)^2}{\sigma_s^2} ds + \int_0^T \frac{r - \mu_s}{\sigma_s} dW_s \Big) \tag{2.46}$$

beschrieben wird, zu wählen. Wie wir erkennen können, ist das durch den Markt gewählte reale Wahrscheinlichkeitsmaß sogar ein Martingalmaß, obwohl wir in diesem Ansatz auf das No-Arbitrage-Prinzip bzw. die Martingalbedingung bewusst verzichtet haben. Außerdem ist der durch die beiden optimalen Strategien resultierende erwartete Nutzen des Agenten gleich dem Nutzen des Startkapitals.

Aufgrund von $\mathbb{P}^{\theta^*} \in \mathcal{M}_e$ und dem Kapitel 2.2 wissen wir, dass der Prozess $W^{\theta^*} = (W_t^{\theta^*})_{t \in \tau}$ mit

$$W_t^{\theta^*} := W_t - \int_0^t \theta_s^* ds = W_t - \int_0^t \frac{r - \mu_s}{\sigma_s} ds$$

eine Brownsche Bewegung bezüglich $\mathcal{G}$ unter $\mathbb{P}^{\theta^*}$ ist. Die Verteilung der zeitstetigen Markovkette Y bleibt unter $\mathbb{P}^{\theta^*}$ hingegen unverändert.

Bemerkung. Wir haben durch drei verschiedene Ansätze zur Bestimmung eines „geeigneten“ Bepreisungsmaßes drei verschiedene Martingalmaße erhalten: das MEMM, das ESSMM und das durch einen spieltheoretischen Ansatz motivierte Martingalmaß $\mathbb{P}^{\theta^*}$, kurz SAMM.
Im Folgenden werden wir für das SAMM die Notation $\mathbb{Q}^{SA}$ verwenden und für die dazugehörige Radon-Nikodým-Dichte Λ_T^{SA} schreiben. Jedes dieser drei Bepreisungsmaße erfüllt außerdem die Einschränkung (2.13).

3 Vervollständigung des RSM

Wie wir im vorigen Kapitel gezeigt haben, handelt es sich beim RSM um ein nicht vollständiges Marktmodell. Da es somit durch das No-Arbitrage-Argument alleine nicht möglich war, das Bepreisungsmaß $\mathbb{Q} := \mathbb{Q}^{\hat{\eta}}$ eindeutig festzulegen, wurden verschiedene Ansätze für die Bestimmung eines solchen Maßes vorgestellt. Das Maß $\mathbb{Q}$ soll hier wieder die Einschränkung (2.13) erfüllen.

In diesem Kapitel werden wir das Regime-Switching-Modell mittels einer Erweiterung durch zusätzliche Finanzgüter in dem Sinne vervollständigen, dass dadurch jede integrierbare und zum Zeitpunkt T fällige Forderung C_T durch eine selbstfinanzierende Handelsstrategie perfekt abgesichert werden kann, siehe [13] und [62]. Diese Handelsstrategie wird sich aus Bonds, Aktien und den zusätzlich hinzugefügten Finanzgütern zusammensetzen.

Wir erweitern unser bisheriges Marktmodell für jedes Paar $(i,j) \in E$ mit einem „künstlichen“ Finanzgut, dessen Preisprozess durch

$$K_t^{i,j} := \mathrm{e}^{rt} \hat{M}_t^{i,j}$$

gegeben sei (2.20). Wie wir bereits wissen, ist der diskontierte Preisprozess eines jeden solchen Finanzguts per Konstruktion ein lokales $(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$-Martingal. Wir wissen außerdem noch, dass der Aktienpreisprozess S

$$dS_t \overset{(2.15)}{=} S_t(rdt + \sigma_t d\hat{W}_t) = S_t dZ_t \tag{3.1}$$

erfüllt, wobei $Z_t = \int_0^t rds + \int_0^t \sigma_s d\hat{W}_s$ mit $Z_0 = 0$. Weiters ist der Prozess $\tilde{Z} = (\tilde{Z})_{t\in\tau}$ durch

$$\tilde{Z}_t = Z_t - \int_0^t rds$$

gegeben. Dann erhalten wir für S

$$dS_t = S_t(d\tilde{Z}_t + rdt) = S_t\Big(d\tilde{Z}_t + \frac{dB_t}{B_t}\Big). \tag{3.2}$$

Da der diskontierte Aktienpreisprozess $\tilde{S}$ ein lokales $(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$-Martingal ist, muss folglich auch der Prozess $\tilde{Z}$ ein lokales $(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$-Martingal sein. Aufgrund der Stetigkeit von $\tilde{Z}$ erhalten wir mit Satz 2.5 die Darstellung

$$\tilde{Z}_t = \tilde{Z}_0 + \int_0^t h_s \hat{W}_s = \int_0^t h_s \hat{W}_s \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.}, \tag{3.3}$$

wobei der Prozess $(h_t)_{t\in\tau} \in L^2_{loc}(\hat{W})$ eindeutig bestimmt ist. Wir nehmen dabei an, dass $h_t \neq 0$ für $t \in \tau$ erfüllt ist.

Folgend ist C_T eine $\mathbb{Q}$-integrierbare und zum Zeitpunkt T fällige Forderung. Dann ist durch den Ausdruck

$$\bar{C}_t := \mathrm{e}^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_T|\mathcal{G}_t]$$

per Konstruktion ein $(\mathcal{G},\mathbb{Q})$-Martingal definiert. Wiederum mit Hilfe des Satzes 2.5 können wir

$$\bar{C}_t = \bar{C}_0 + \int_0^t \bar{h}_s d\hat{W}_s + \sum_{(i,j)\in E}\int_0^t \bar{h}_s^{i,j} d\hat{M}_s^{i,j} \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.}$$

schreiben, wobei $(\bar{h}_t)_{t\in\tau} \in L^2_{loc}(\hat{W})$ und $(\bar{h}_t^{i,j})_{t\in\tau} \in L^1_{loc}(N^{i,j})$ für $(i,j) \in E$ eindeutig bestimmt sind. Aufgrund des Ausdrucks (3.3) und der Forderung $h_t \neq 0$ für $t \in \tau$ erhalten wir umgehend

$$\bar{C}_t = \bar{C}_0 + \int_0^t \frac{\bar{h}_s}{h_s} d\tilde{Z}_s + \sum_{(i,j)\in E}\int_0^t \bar{h}_s^{i,j} d\hat{M}_s^{i,j}. \tag{3.4}$$

Wir werden zeigen, dass eine selbstfinanzierende Handelsstrategie H existiert, die unsere zum Zeitpunkt T fällige Forderung C_T perfekt absichert. Dabei ist diese Handelsstrategie H ein Prozess der Form

$$H_t := \left(H_t^0, H_t^1, H_t^{1,2}, H_t^{1,3}, \ldots, H_t^{1,d}, H_t^{2,1}, H_t^{2,3}, \ldots, H_t^{2,d}, \ldots, H_t^{d,1}, H_t^{d,2}, \ldots, H_t^{d,d-1}\right),$$

wobei die Prozesse H_t^0, H_t^1 bzw. $H_t^{i,j}$ die zum Zeitpunkt t gehaltene Anzahl an Bonds, an Aktien bzw. an den zusätzlich hinzugefügten Finanzgütern beschreiben. Seien diese Prozesse durch

$$\begin{aligned}
H_t^1 &= \frac{B_t\bar{h}_t}{S_t h_t},\\
H_t^{i,j} &= \bar{h}_t^{i,j}, \quad \text{für } (i,j)\in E \text{ und}\\
H_t^0 &= \bar{C}_t - \frac{H_t^1 S_t}{B_t} - \frac{1}{B_t}\sum_{(i,j)\in E} H_t^{i,j}K_t^{i,j}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

gegeben [62]. Für den Wert der Handelsstrategie H zum Zeitpunkt t erhalten wir

$$V_t(H) = H_t^0 B_t + H_t^1 S_t + \sum_{(i,j)\in E} H_t^{i,j}K_t^{i,j} = \bar{C}_t B_t.$$

Daraus können wir sofort erkennen, dass die Forderung C_T durch H gehedgt wird, es gilt $V_T(H) = \bar{C}_T B_T = C_T$. Somit bleibt nur noch zu zeigen, dass H auch selbstfinanzierend ist. Dafür werden wir zeigen, dass der Prozess $G(H) = (G_t(H))_{t\in\tau}$ mit

$$G_t(H) = \int_0^t H_s^0 dB_s + \int_0^t H_s^1 dS_s + \sum_{(i,j)\in E}\int_0^t H_s^{i,j} dK_s^{i,j}$$

den Vermögenszuwachs der Handelsstrategie H beschreibt. Aufgrund von (3.5) resultiert für obigen Ausdruck

$$G_t(H) = \int_0^t \bar{C}_s dB_s - \int_0^t \frac{\bar{h}_s}{h_s} dB_s - \sum_{(i,j)\in E} \int_0^t \frac{\bar{h}_s^{i,j} K_s^{i,j}}{B_s} dB_s + \int_0^t \frac{B_s \bar{h}_s}{S_s h_s} dS_s + \sum_{(i,j)\in E} \int_0^t \bar{h}_s^{i,j} dK_s^{i,j}.$$

Partielle Integration und die Darstellung (3.4) liefern

$$\int_0^t \bar{C}_s dB_s = \bar{C}_t B_t - \bar{C}_0 B_0 - \int_0^t \frac{B_s \bar{h}_s}{h_s} d\tilde{Z}_s - \sum_{(i,j)\in E} \int_0^t B_s \bar{h}_s^{i,j} d\hat{M}_s^{i,j}.$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} G_t(H) = \bar{C}_t B_t - \bar{C}_0 B_0 &- \int_0^t \frac{B_s \bar{h}_s}{h_s} d\tilde{Z}_s - \sum_{(i,j)\in E} \int_0^t B_s \bar{h}_s^{i,j} d\hat{M}_s^{i,j} - \int_0^t \frac{\bar{h}_s}{h_s} dB_s \\ &- \sum_{(i,j)\in E} \int_0^t \frac{\bar{h}_s^{i,j} K_s^{i,j}}{B_s} dB_s + \int_0^t \frac{B_s \bar{h}_s}{S_s h_s} dS_s + \sum_{(i,j)\in E} \int_0^t \bar{h}_s^{i,j} dK_s^{i,j}. \end{aligned}$$

Verwenden wir schließlich noch die Gleichung

$$\begin{aligned} dK_t^{i,j} &= dB_t \hat{M}_t^{i,j} + B_t d\hat{M}_t^{i,j} + d[B, \hat{M}^{i,j}]_t = dB_t \hat{M}_t^{i,j} + B_t d\hat{M}_t^{i,j} \\ &= dB_t \frac{K_t^{i,j}}{B_t} + B_t d\hat{M}_t^{i,j} \end{aligned} \tag{3.6}$$

und setzen diese in obigen Ausdruck ein, so folgt mittels (3.2)

$$\begin{aligned} G_t(H) &= \bar{C}_t B_t - \bar{C}_0 B_0 - \int_0^t \frac{B_s \bar{h}_s}{h_s} d\tilde{Z}_s - \int_0^t \frac{\bar{h}_s}{h_s} dB_s + \int_0^t \frac{B_s \bar{h}_s}{S_s h_s} dS_s \\ &= \bar{C}_t B_t - \bar{C}_0 B_0 - \int_0^t \frac{B_s \bar{h}_s}{h_s} d\tilde{Z}_s - \int_0^t \frac{\bar{h}_s}{h_s} dB_s + \int_0^t \frac{B_s \bar{h}_s}{h_s} d\tilde{Z}_s + \int_0^t \frac{\bar{h}_s}{h_s} dB_s \\ &= \bar{C}_t B_t - \bar{C}_0 B_0 = V_t(H) - V_0(H). \end{aligned}$$

Per Definition ist H eine selbstfinanzierende Handelsstrategie. Zusammenfassend können wir sagen, dass wir das Rgeime-Swichting-Modell in dem Sinne vervollständigt haben, dass eine jede $\mathbb{Q}$-integrierbare und zum Zeitpunkt T fällige Forderung C_T durch eine selbstfinanzierende Handelsstrategie H gehedgt werden kann.

Nehmen wir an, dass die Forderung C_T durch die Handelsstrategie H gehedgt wird und der speziellen Form

$$C_T = f(S_T)$$

ist. Dann können wir H explizit angeben. Der Wert der Forderung C_T ist zum Zeitpunkt t durch

$$V_t(H) = \mathrm{e}^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(S_T)|\mathcal{G}_t] = \mathrm{e}^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[f\left(S_t \exp\left(\int_t^T r - \frac{1}{2}\sigma_s^2 ds + \int_t^T \sigma_s d\hat{W}_s \right) \right) \middle| \mathcal{G}_t \right]$$

gegeben, wobei dieser Ausdruck durch Lösen von (3.1) resultiert. Da S_t eine $\mathcal{G}_t$-messbare Zufallsvariable ist und der Ausdruck

$$\exp\left(\int_t^T r - \frac{1}{2}\sigma_s^2 ds + \int_t^T \sigma_s d\hat{W}_s\right)$$

gegeben $Y_t = y$ mit $y \in \mathcal{E}$ aufgrund der unabhängigen Zuwächse von $\hat{W}$ und der Markoveigenschaft von Y unabhängig von $\mathcal{G}_t$ ist, können wir $V_t(H) = F(t, S_t, Y_t)$ schreiben, wobei

$$F(t,x,y) = \mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[f\left(x\exp\left(\int_t^T r - \frac{1}{2}\sigma_s^2 ds + \int_t^T \sigma_s d\hat{W}_s\right)\right)\middle| Y_t = y\right].$$

Angenommen, F erfüllt die Voraussetzung für die Anwendung der Itô-Formel (Satz B.8), so gilt

$$\begin{aligned} F(T,S_T,Y_T) = F(t,S_t,Y_t) &+ \int_t^T \frac{\partial F}{\partial t}(s,S_s,Y_{s-})ds + \int_t^T \frac{\partial F}{\partial x}(s,S_s,Y_{s-})(rS_s ds + \sigma_s S_s d\hat{W}_s) \\ &+ \frac{1}{2}\int_t^T \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s,S_s,Y_{s-})\sigma_s^2 S_s^2 ds + \sum_{t<s\leq T} F(s,S_s,Y_s) - F(s,S_s,Y_{s-}), \end{aligned}$$

wobei wir den Sprunganteil zu

$$\begin{aligned} \sum_{t<s\leq T} F(s,S_s,Y_s) - F(s,S_s,Y_{s-}) &= \int_t^T \sum_{(i,j)\in E} F(s,S_s,e_j) - F(s,S_s,e_i) dN_s^{i,j} \\ &\overset{(2.20)}{=} \int_t^T \sum_{(i,j)\in E} F(s,S_s,e_j) - F(s,S_s,e_i) d\hat{M}_s^{i,j} \\ &\quad + \int_t^T \sum_{(i,j)\in E} (F(s,S_s,e_j) - F(s,S_s,e_i)) 1_{\{Y_{s-}=e_i\}} \hat{a}_s^{i,j} ds \\ &\overset{(2.17)}{=} \int_t^T \sum_{(i,j)\in E} F(s,S_s,e_j) - F(s,S_s,e_i) d\hat{M}_s^{i,j} \\ &\quad + \int_t^T \sum_{i=1}^d \Big(\sum_{j\neq i} F(s,S_s,e_j)\hat{a}_s^{i,j} + F(s,S_s,e_i)\hat{a}_s^{i,i}\Big) 1_{\{Y_{s-}=e_i\}} ds \\ &= \int_t^T \sum_{(i,j)\in E} F(s,S_s,e_j) - F(s,S_s,e_i) d\hat{M}_s^{i,j} \\ &\quad + \int_t^T \Big\langle \Big(F(s,S_s,e_1),\dots,F(s,S_s,e_d)\Big)^T, \hat{A}_s^T Y_{s-}\Big\rangle ds \end{aligned}$$

vereinfachen können. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} &F(T,S_T,Y_T) \\ &\quad = F(t,S_t,Y_t) + \int_t^T \left(\frac{\partial F}{\partial t}(s,S_s,Y_{s-}) + rS_s \frac{\partial F}{\partial x}(s,S_s,Y_{s-}) + \frac{1}{2}\sigma_s^2 S_s^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s,S_s,Y_{s-})\right) ds \end{aligned}$$

$$+\int_t^T \sigma_s S_s \frac{\partial F}{\partial x}(s,S_s,Y_{s-})d\hat{W}_s + \int_t^T \left\langle \Big(F(s,S_s,e_1),\ldots,F(s,S_s,e_d)\Big)^T, \hat{A}_s^T Y_{s-}\right\rangle ds$$
$$+\int_t^T \sum_{(i,j)\in E} F(s,S_s,e_j) - F(s,S_s,e_i) d\hat{M}_s^{i,j}. \tag{3.7}$$

Da der diskontierte Wertprozess $\tilde{V}(H)$ der Handelsstrategie H offensichtlich ein $(\mathcal{G},\mathbb{Q})$-Martingal ist, muss aufgrund der Darstellung (3.7) die DGL

$$\begin{aligned} rF(t,x,y) = {} & \frac{\partial F}{\partial t}(t,x,y) + rx\frac{\partial F}{\partial x}(t,x,y) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x,y) \\ & + \left\langle \Big(F(t,x,e_1),\ldots,F(t,x,e_d)\Big)^T, \hat{A}_t^T y\right\rangle \end{aligned} \tag{3.8}$$

erfüllt sein. Sei $F_i(t,x) := F(t,x,e_i)$ für $e_i \in \mathcal{E}$. Dann ist der Ausdruck (3.8) zu folgendem System von DGL

$$\begin{aligned} rF_i(t,x) = {} & \frac{\partial F_i}{\partial t}(t,x) + rx\frac{\partial F_i}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 x^2 \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2}(t,x) \\ & + \left\langle \Big(F_1(t,x),\ldots,F_d(t,x)\Big)^T, \hat{A}_t^T e_i\right\rangle \end{aligned}$$

für $i = 1,\ldots,d$ äquivalent. Dabei ist die Randbedingung einer jeden DGL zum Zeitpunkt T durch

$$F_i(T,x) = f(x)$$

für $i = 1,\ldots,d$ gegeben. Mit Hilfe der DGL (3.8) und der Gleichungen (3.1) bzw. (3.6) können wir den Ausdruck (3.7) zu

$$\begin{aligned} & F(T,S_T,Y_T) - F(t,S_t,Y_t) \\ & = \int_t^T rF(s,S_s,Y_{s-})ds + \int_t^T \sigma_s S_s \frac{\partial F}{\partial x}(s,S_s,Y_{s-})d\hat{W}_s \\ & \quad + \int_t^T \sum_{(i,j)\in E} F_j(s,S_s) - F_i(s,S_s) d\hat{M}_s^{i,j} \\ & = \int_t^T \frac{F(s,S_s,Y_{s-})}{B_s}dB_s + \int_t^T \frac{\partial F}{\partial x}(s,S_s,Y_{s-})dS_s - \int_0^t \frac{S_s}{B_s}\frac{\partial F}{\partial x}(s,S_s,Y_{s-})dB_s \\ & \quad + \sum_{(i,j)\in E}\int_t^T \frac{F_j(s,S_s) - F_i(s,S_s)}{B_s}dK_s^{i,j} - \sum_{(i,j)\in E}\int_t^T K_s^{i,j}\frac{F_j(s,S_s) - F_i(s,S_s)}{B_s^2}dB_s \\ & = \int_t^T \left(\frac{F(s,S_s,Y_{s-})}{B_s} - \frac{S_s}{B_s}\frac{\partial F}{\partial x}(s,S_s,Y_{s-}) - \sum_{(i,j)\in E} K_s^{i,j}\frac{F_j(s,S_s) - F_i(s,S_s)}{B_s^2}\right)dB_s \\ & \quad + \int_t^T \frac{\partial F}{\partial x}(s,S_s,Y_{s-})dS_s + \sum_{(i,j)\in E}\int_t^T \frac{F_j(s,S_s) - F_i(s,S_s)}{B_s}dK_s^{i,j} \end{aligned}$$

vereinfachen. Schließlich können wir die selbstfinanzierende Handelsstrategie H, die die Forderung C_T perfekt absichert, aufgrund der Integralgleichung

$$\begin{aligned} F(T, S_T, Y_T) - F(t, S_t, Y_t) &= V_T(H) - V_t(H) = G_T(H) - G_t(H) \\ &= \int_t^T H_s^0 dB_s + \int_t^T H_s^1 dS_s + \sum_{(i,j)\in E} \int_t^T H_s^{i,j} dK_s^{i,j} \end{aligned}$$

für $t \in \tau$ explizit angeben. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} H_t^1 &= \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t, Y_{t-}), \\ H_t^{i,j} &= \frac{F_j(t, S_t) - F_i(t, S_t)}{B_t}, \quad \text{für } (i,j) \in E \text{ und} \\ H_t^0 &= \frac{F(t, S_t, Y_{t-})}{B_t} - \frac{S_t}{B_t}\frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t, Y_{t-}) - \sum_{(i,j)\in E} K_t^{i,j} \frac{F_j(t, S_t) - F_i(t, S_t)}{B_t^2}. \end{aligned}$$

4 Optionsbepreisung mittels charakteristischer Funktion im RSM

In diesem Kapitel wollen wir den Preis einer europäischen Call-Option berechnen. Wie wir bereits wissen, ist die Preisfestlegung im RSM nicht eindeutig, sie hängt von der Wahl des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ ab. Dabei werden wir uns auf die in Kapitel 2 ausführlich diskutierten drei verschiedenen Bepreisungsmaße beschränken und die daraus resultierenden Optionspreise miteinander vergleichen.
Wir bezeichnen mit $k = \ln(K)$ den logarithmierten Strike-Preis und mit $s_T = \ln(S_T)$ den logarithmierten Aktienpreis zum Zeitpunkt T. Für eine Call-Option mit Strike-Preis $\exp(k)$ und einer Laufzeit von T Jahren ist der Preis zum Zeitpunkt 0 durch

$$C_T(k) = \mathrm{e}^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T - K)_+] = \mathrm{e}^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(\mathrm{e}^{s_T} - \mathrm{e}^k)_+]$$

gegeben. In vielen Marktmodellen kann die risikoneutrale Dichte des Aktienpreises S_T eine analytisch komplexe Funktion, hingegen die charakteristische Funktion der Zufallsvariable s_T unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$

$$\varphi_{s_T}(u) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}us_T}]$$

eine vergleichbar leicht zu berechnende Funktion sein. Wir werden sehen, dass dies auch im RSM der Fall ist. Anschließend werden wir diesen Ansatz zur Optionsbepreisung heranziehen [7]. Wir können

$$C_T(k) = \int_k^\infty \mathrm{e}^{-rT}(\mathrm{e}^s - \mathrm{e}^k)q_{s_T}(s)ds$$

schreiben, wobei q_{s_T} die risikoneutrale Dichte von s_T bezeichnet. Aufgrund der Martingaleigenschaft

$$\mathrm{e}^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T] = S_0$$

wissen wir, dass $\lim_{k\to-\infty} C_T(k) = S_0 > 0$. Die Funktion $C_T(k)$ ist somit nicht integrierbar und deren Fourier-Transformation existiert nicht. In [7] wurde für diese Problematik die folgende Transformation

$$c_T(k) = \mathrm{e}^{\alpha k}C_T(k)$$

vorgeschlagen. Wir werden zeigen, dass der Parameter α derart gewählt werden kann, sodass die Funktion $c_T(k)$ integrierbar ist. Die Fourier-Transformation von $c_T(k)$ ist dann durch

$$\psi(u) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}uk}c_T(k)dk \tag{4.1}$$

definiert und ebenfalls integrierbar. Der Preis einer Call-Option ergibt sich mittels inverser Fourier-Transformation

$$
\begin{aligned}
C_T(k) &= \frac{\mathrm{e}^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}uk} \psi(u) du & (4.2)\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(uk) \operatorname{Re}(\psi(u)) + \sin(uk) \operatorname{Im}(\psi(u)) du \\
&\quad + \mathrm{i} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(uk) \operatorname{Im}(\psi(u)) - \sin(uk) \operatorname{Re}(\psi(u)) du.
\end{aligned}
$$

Da die Funktion $C_T(k)$ stets reell ist, muss der Imaginärteil von $\psi(u)$ eine ungerade Funktion und der Realteil von $\psi(u)$ eine gerade Funktion sein. Dadurch lässt sich der Ausdruck (4.2) zu

$$
C_T(k) = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}uk} \psi(u)) du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \zeta(\alpha, u) du \tag{4.3}
$$

mit

$$
\zeta(\alpha, u) = \mathrm{e}^{-\alpha k} \operatorname{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}uk} \psi(u)) \tag{4.4}
$$

vereinfachen, wobei

$$
\begin{aligned}
\psi(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}uk} \mathrm{e}^{\alpha k} \int_k^{\infty} \mathrm{e}^{-rT} (\mathrm{e}^s - \mathrm{e}^k) q_{s_T}(s) ds dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-rT} \left(\int_{-\infty}^{s} \mathrm{e}^{\mathrm{i}uk} \mathrm{e}^{\alpha k + s} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}uk} \mathrm{e}^{(\alpha+1)k} dk \right) q_{s_T}(s) ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-rT} \left(\frac{\mathrm{e}^{(\alpha+1+\mathrm{i}u)s}}{\alpha + \mathrm{i}u} - \frac{\mathrm{e}^{(\alpha+1+\mathrm{i}u)s}}{\alpha + 1 + \mathrm{i}u} \right) q_{s_T}(s) ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-rT} \mathrm{e}^{(\alpha+1+\mathrm{i}u)s}}{\alpha^2 + \alpha - u^2 + \mathrm{i}u(2\alpha+1)} q_{s_T}(s) ds \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-rT} \varphi_{s_T}(u - \mathrm{i}(\alpha+1))}{\alpha^2 + \alpha - u^2 + \mathrm{i}u(2\alpha+1)}. & (4.5)
\end{aligned}
$$

4.1 Wahl des Parameters α

Für $\alpha = 0$ besitzt der Integrand $\zeta(\alpha, u)$ eine Singularität an der Stelle $u = 0$. Dieser Fall ist aber ohnehin per Konstruktion auszuschließen. Dagegen gibt es für $\alpha > 0$ keine reellen Singularitäten.
Wir wissen, dass die Funktion $c_T(k)$ für $\alpha > 0$ entlang der negativen k-Achse integrierbar ist. Für die Integrierbarkeit entlang der positiven k-Achse wird jedoch eine zusätzliche Bedingung benötigt, hinreichend dafür wäre, falls

$$
\psi(0) < \infty
$$

bzw. aufgrund von (4.5) äquivalent dazu, falls $\varphi_{s_T}(-\mathrm{i}(\alpha+1)) < \infty$. Dies bedeutet aber nichts anderes, als dass

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T^{\alpha+1}] < \infty \tag{4.6}$$

für ein $\alpha > 0$ gelten muss. Dann ist auch die Fourier-Transformierte $\psi(u)$ integrierbar. In vielen Marktmodellen liefert die Bedingung (4.6) eine obere Schranke für die Wahl von α, im RSM hingegen existieren alle Momente und somit ist durch (4.6) keine Einschränkung gegeben. Aus diesem Grund macht auch die in [7] vorgeschlagene Wahl von α, nämlich ein Viertel des maximal zulässigen Werts, keinen Sinn. In der Literatur finden wir noch genügend andere Ansätze, z.B. wird in [56] für eine ganze Reihe von Marktmodellen $\alpha = 0.75$ gewählt.
Da der Integrand $\zeta(\alpha, u)$ für ein sehr kleines α an der Stelle $u = 0$ sehr groß wird und für ein großes α stark zu oszillieren beginnt, hängt die Stabilität der Integration in (4.3) überaus sensibel von der Wahl des Parameters α ab. Dies gilt speziell bei der Bepreisung von Optionen mit kurzer Laufzeit.
Um den Fehler durch die numerische Integration klein zu halten, minimieren wir die skalierte totale Variation von $\zeta(\alpha, u)$ über die gesamte positive Achse [41], d.h. wir suchen einen Parameter α, durch den die Oszillation der Funktion $\zeta(\alpha, u)$ möglichst gering wird. So wählen wir

$$\alpha_{TV} = \underset{\alpha>0}{\arg\min} \int_0^\infty \left| \frac{\partial}{\partial u} \frac{\zeta(\alpha, u)}{\zeta(\alpha, 0)} \right| du.$$

Dieser Ansatz führt auf ein komplexes Minimierungsproblem, weshalb in [41] auch eine viel trivialere Wahl von α diskutiert wird, nämlich das Maximum der Funktion $\zeta(\alpha, u)$ bezüglich des Parameters α zu minimieren. Da das Maximum für alle $\alpha > 0$ stets an der Stelle $u = 0$ angenommen wird, erhalten wir

$$\alpha_{Min} = \underset{\alpha>0}{\arg\min} \ |\zeta(\alpha, 0)|$$

bzw. mit (4.4) und (4.5)

$$\alpha_{Min} = \underset{\alpha>0}{\arg\min} \ \mathrm{e}^{-\alpha k} \frac{\mathrm{e}^{-rT} \varphi_{s_T}(-\mathrm{i}(\alpha+1))}{\alpha^2 + \alpha}.$$

Um die numerische Berechnung des Call-Preises zu vereinfachen, wurde in [7] dargelegt, die Integration in (4.3) nur bis zu einer oberen Grenze a auszuführen, wobei diese Grenze a durch eine vorab festgelegte Fehlergenauigkeit ε bestimmt ist. Da

$$|\mathrm{e}^{-rT} \varphi_{s_T}(u - \mathrm{i}(\alpha+1))| \leq |\mathrm{e}^{-rT} \varphi_{s_T}(-\mathrm{i}(\alpha+1))| = c_\alpha < \infty,$$

haben wir

$$\begin{aligned} |\psi(u)|^2 &\leq \frac{c_\alpha^2}{|\alpha^2 + \alpha - u^2 + \mathrm{i}u(2\alpha+1)|^2} \\ &\leq \frac{c_\alpha^2}{u^4 + u^2(2\alpha^2 + 2\alpha + 1) + \alpha^2(\alpha^2 + 2\alpha + 1)} \leq \frac{c_\alpha^2}{u^4}. \end{aligned}$$

Somit resultiert

$$\int_a^\infty |\operatorname{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}uk}\psi(u))|du \leq \int_a^\infty |\psi(u)|du \leq \frac{c_\alpha}{a},$$

d.h. für eine gewünschte Fehlergenauigkeit ε ist die obere Integrationsgrenze a gegeben durch

$$a > \frac{\mathrm{e}^{-\alpha k}}{\pi}\frac{c_\alpha}{\varepsilon}.$$

4.2 Bepreisung einer Out-of-the-Money-Option mit sehr kurzer Laufzeit

In diesem Abschnitt betrachten wir die Bepreisung einer Out-of-the-Money-Option [7]. Dabei handelt es sich entweder um eine Put-Option mit Strike-Preis $K < S_0$ oder um eine Call-Option mit $K > S_0$. Wir schreiben $k = \ln(K)$ und $s_0 = \ln(S_0)$. Außerdem ist die Laufzeit T sehr kurz. Der Preis einer solchen Option mit Strike-Preis $\exp(k)$ ist dann durch

$$C_T^{OM}(k) = \mathrm{e}^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[1_{\{k<s_0\}}(\mathrm{e}^k - \mathrm{e}^{s_T})_+ + 1_{\{k>s_0\}}(\mathrm{e}^{s_T} - \mathrm{e}^k)_+]$$

gegeben. Wie wir erkennen können, hat die Funktion $C_T^{OM}(k)$ im Punkt $k = s_0$ ihr Maximum und verschwindet für $k \to \pm\infty$ sehr schnell gegen Null. Da $C_T^{OM}(k)$ integrierbar ist, existiert deren Fourier-Transformation

$$\psi^{OM}(u) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}uk}C_T^{OM}(k)dk. \tag{4.7}$$

Mittels inverser Fourier-Transformation können wir für den Preis einer Out-of-the-Money-Option

$$C_T^{OM}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}uk}\psi^{OM}(u)du = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{OM}(u)du \tag{4.8}$$

mit

$$\zeta^{OM}(u) = \operatorname{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}uk}\psi^{OM}(u))$$

schreiben, wobei

$$\begin{aligned}
\psi^{OM}(u) &= \int_{-\infty}^{s_0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}uk}\int_{-\infty}^{k} \mathrm{e}^{-rT}(\mathrm{e}^k - \mathrm{e}^s)q_{s_T}(s)dsdk \\
&\quad + \int_{s_0}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}uk}\int_{k}^{\infty} \mathrm{e}^{-rT}(\mathrm{e}^s - \mathrm{e}^k)q_{s_T}(s)dsdk \\
&= \int_{-\infty}^{s_0} \mathrm{e}^{-rT}\left(\int_s^{s_0} \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}u)k} - \mathrm{e}^{s+\mathrm{i}uk}dk\right)q_{s_T}(s)ds \\
&\quad + \int_{s_0}^{\infty} \mathrm{e}^{-rT}\left(\int_{s_0}^{s} \mathrm{e}^{s+\mathrm{i}uk} - \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}u)k}dk\right)q_{s_T}(s)ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{s_0} \mathrm{e}^{-rT}\Big(\frac{S_0^{1+\mathrm{i}u}}{1+\mathrm{i}u} - \frac{\mathrm{e}^s S_0^{\mathrm{i}u}}{\mathrm{i}u} - \frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}u)s}}{1+\mathrm{i}u} + \frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}u)s}}{\mathrm{i}u}\Big) q_{s_T}(s)ds \\
&\quad + \int_{s_0}^{\infty} \mathrm{e}^{-rT}\Big(\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}u)s}}{\mathrm{i}u} - \frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}u)s}}{1+\mathrm{i}u} - \frac{\mathrm{e}^s S_0^{\mathrm{i}u}}{\mathrm{i}u} + \frac{S_0^{1+\mathrm{i}u}}{1+\mathrm{i}u}\Big) q_{s_T}(s)ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-rT}\Big(\frac{S_0^{1+\mathrm{i}u}}{1+\mathrm{i}u} - \frac{\mathrm{e}^s S_0^{\mathrm{i}u}}{\mathrm{i}u} - \frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}u)s}}{u^2-\mathrm{i}u}\Big) q_{s_T}(s)ds \\
&= \mathrm{e}^{-rT}\Big(\frac{S_0^{1+\mathrm{i}u}}{1+\mathrm{i}u} - \frac{\mathrm{e}^{rT} S_0^{1+\mathrm{i}u}}{\mathrm{i}u} - \frac{\varphi_{s_T}(u-\mathrm{i})}{u^2-\mathrm{i}u}\Big). \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Da die Funktion $C_T^{OM}(k)$ um den Punkt $k = s_0$ für eine sehr kurze Laufzeit T einen äußerst steilen Anstieg besitzt, ist der Integrand $\zeta^{OM}(u)$ eine stark oszillierende Funktion, was zu Schwierigkeiten bei der Optionsbepreisung führt. Um dieses Problem zu reduzieren, wird der folgende Ansatz

$$\bar{C}_T^{OM}(k) = \sinh(\alpha(k-s_0))C_T^{OM}(k)$$

mit $\alpha > 0$ vorgeschlagen, da die Funktion $\bar{C}_T^{OM}(k)$ im Punkt $k = s_0$ verschwindet [7]. Mit Hilfe von (4.7) ergibt sich für die Fourier-Transformation von $\bar{C}_T^{OM}(k)$

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}^{OM}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}uk} \sinh(\alpha(k-s_0))C_T^{OM}(k)dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}uk} \frac{S_0^{-\alpha}\mathrm{e}^{\alpha k} - S_0^{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha k}}{2} C_T^{OM}(k)dk \\
&= \frac{S_0^{-\alpha}\psi^{OM}(u-\mathrm{i}\alpha) - S_0^{\alpha}\psi^{OM}(u+\mathrm{i}\alpha)}{2}.
\end{aligned}
$$

Für den Preis einer Out-of-the-Money-Option erhalten wir

$$C_T^{OM}(k) = \frac{1}{\sinh(\alpha(k-s_0))}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}uk}\bar{\psi}^{OM}(u)du = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \xi^{OM}(\alpha,u)du \qquad (4.10)$$

mit

$$\xi^{OM}(\alpha,u) = \frac{1}{\sinh(\alpha(k-s_0))}\,\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}uk}\bar{\psi}^{OM}(u)). \qquad (4.11)$$

Der Parameter α ist wieder so zu wählen, dass die Funktion $\xi^{OM}(\alpha,u)$ möglichst wenig oszilliert und somit die Bepreisung mittels numerischer Integration stabil ist. Dabei ist zu beachten, dass das Maximum von $\xi^{OM}(\alpha,u)$ nicht unbedingt an der Stelle $u = 0$ für $\alpha > 0$ angenommen wird.

4.3 Optionsbepreisung mittels schneller Fourier-Transformation

Die schnelle Fourier-Transformation (FFT) ist eine Methode zur Berechnung von Summen der speziellen Form

$$w_l = \sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}jl}x_j, \quad l = 0,\dots,N-1$$

in einer Laufzeit von $\mathcal{O}(N\ln(N))$, wobei $N = 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Diesen Ansatz werden wir nun benutzen, um Call-Optionen für eine ganze Bandbreite von logarithmierten Strike-Preisen k_l zu bewerten, siehe dazu [6] und [7]. Da wir besonders an der Bepreisung von At-the-Money-Optionen interessiert sind, betrachten wir

$$k_l = -\frac{1}{2}N\lambda + \lambda l + s_0, \quad l = 0, \dots, N-1,$$

wobei durch $\lambda > 0$ die Schrittweite zwischen den logarithmierten Strike-Preisen bezeichnet wird. Wir wählen $\eta > 0$ und

$$u_j = \eta j, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

Dann können wir das Integral in (4.3) mittels numerischer Integration unter Verwendung der Trapezregel durch

$$\begin{aligned} C_T(k) &\approx \frac{\mathrm{e}^{-\alpha k}}{\pi}\frac{\eta}{2}\Big(\operatorname{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u_0 k}\psi(u_0)) + 2\sum_{j=1}^{N-2}\operatorname{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u_j k}\psi(u_j)) + \operatorname{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u_{N-1}k}\psi(u_{N-1}))\Big) \\ &\approx \frac{\mathrm{e}^{-\alpha k}}{\pi}\sum_{j=0}^{N-1}\operatorname{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u_j k}\psi(u_j))\eta \end{aligned}$$

approximieren [33]. Dabei wird die Integration nur bis zu der oberen Grenze $a = \eta(N-1)$ ausgeführt. Für den Preis einer europäischen Call-Option mit logarithmiertem Strike-Preis k_l und einer Laufzeit T ergibt sich

$$C_T(k_l) \approx \operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\alpha k_l}}{\pi}\sum_{j=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\eta j l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_j(\frac{1}{2}N\lambda - s_0)}\psi(u_j)\eta\right).$$

Sind die Schrittweitenparameter λ und η so gewählt, dass die Gleichung

$$\lambda\eta = \frac{2\pi}{N} \tag{4.12}$$

erfüllt ist, so können wir den FFT-Algorithmus zur numerischen Optionsbepreisung verwenden. Die Koeffizienten x_j sind durch

$$x_j = \exp\left(\mathrm{i}u_j\left(\frac{1}{2}N\lambda - s_0\right)\right)\psi(u_j), \quad j = 0, \dots, N-1$$

gegeben. Aufgrund der Bedingung (4.12) wissen wir, dass wir, falls wir das Integrationsgitter durch die Wahl eines kleineren Parameters η verfeinern, um die Güte der numerischen Integration zu verbessern, gleichzeitig weniger Call-Preise mit einem Strike-Preis K nahe S_0 berechnen. Da diese aber für uns von besonderem Interesse sind, wurde in [7] eine alternative Integrationsmethode vorgeschlagen, die auch für einen größeres η brauchbare Ergebnisse liefert. Diese Methode basiert auf der Simpsonregel. Damit erhalten wir

$$C_T(k_l) \approx \operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\alpha k_l}}{\pi}\sum_{j=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\eta j l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_j(\frac{1}{2}N\lambda - s_0)}\psi(u_j)\frac{\eta}{3}(3 + (-1)^{j+1} - \delta_j)\right),$$

wobei die Kronecker-Delta Funktion δ_n durch

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert ist [33]. Wir können dann den FFT-Algorithmus auf die Koeffizienten x_j mit

$$x_j = \exp\left(\mathrm{i}u_j\left(\frac{1}{2}N\lambda - s_0\right)\right)\psi(u_j)(3 + (-1)^{j+1} - \delta_j), \quad j = 0, \ldots, N-1$$

anwenden.

Bemerkung. Der eben vorgestellte Ansatz kann auch zur Bepreisung von Out-of-the-Money-Optionen herangezogen werden. Dazu approximieren wir den Preis einer solchen Option mit logarithmierten Strike-Preis k_l und Laufzeit T durch

$$C_T^{OM}(k_l) \approx \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sinh(\alpha(k_l - s_0))}\frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\eta jl}\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_j(\frac{1}{2}N\lambda - s_0)}\bar{\psi}^{OM}(u_j)\frac{\eta}{3}(3 + (-1)^{j+1} - \delta_j)\right).$$

4.4 Charakteristische Funktion des logarithmierten Aktienpreises zum Zeitpunkt T

In diesem Abschnitt werden wir die charakteristische Funktion der Zufallsvariable s_T unter den in Kapitel 2 ausführlich diskutierten MEMM $\mathbb{Q}^E$, ESSMM $\mathbb{Q}^{ES}$ und SAMM $\mathbb{Q}^{SA}$ explizit herleiten.

4.4.1 Charakteristische Funktion der Zufallsvariable s_T unter $\mathbb{Q}^E$

Die charakteristische Funktion der Zufallsvariable s_T unter dem MEMM werden wir mit

$$\varphi_{s_T}^E(u) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}us_T}]$$

bezeichnen. Aufgrund von (1.6), (1.7) und der Darstellung der Radon-Nikodým-Dichte des MEMM in (2.29) können wir

$$\begin{aligned}\varphi_{s_T}^E(u) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}u(\ln(S_0)+X_T)}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\ln(S_0)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}uX_T}c_E\Lambda_T^E\right] \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}u\ln(S_0)}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Bigg[\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T\frac{(r-\mu_s)^2}{\sigma_s^2}ds\right)\Bigg]^{-1}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Bigg[\exp\Bigg(\int_0^T \mathrm{i}u\mu_s - \mathrm{i}u\frac{\sigma_s^2}{2} - \frac{(r-\mu_s)^2}{\sigma_s^2}ds \\ &\quad + \int_0^T \mathrm{i}u\sigma_s + \frac{r-\mu_s}{\sigma_s}dW_s\Bigg)\Bigg]\end{aligned}$$

schreiben. Weiters ist π_0 die Startverteilung der Markovkette Y. Dann erhalten wir mit Hilfe von (A.4)

$$\varphi_{s_T}^E(u) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}u\ln(S_0)}\left(\pi_0^T\exp(TK_E)\mathbb{1}\right)^{-1}\pi_0^T\exp(T\bar{K}_E(u))\mathbb{1}, \tag{4.13}$$

wobei

$$K_E = A - \frac{1}{2}\mathrm{diag}\Big(\frac{(r-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}, \dots, \frac{(r-\mu_d)^2}{\sigma_d^2}\Big)$$

und

$$\begin{aligned}\bar{K}_E(u) &= A + \mathrm{diag}\Big(\mathrm{i}ur - \frac{1}{2}\sigma_1^2(\mathrm{i}u+u^2) - \frac{(r-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}, \dots, \mathrm{i}ur - \frac{1}{2}\sigma_d^2(\mathrm{i}u+u^2) - \frac{(r-\mu_d)^2}{2\sigma_d^2}\Big) \\ &= K_E + \mathrm{diag}\Big(\mathrm{i}ur - \frac{1}{2}\sigma_1^2(\mathrm{i}u+u^2), \dots, \mathrm{i}ur - \frac{1}{2}\sigma_d^2(\mathrm{i}u+u^2)\Big).\end{aligned}$$

4.4.2 Charakteristische Funktion der Zufallsvariable s_T unter $\mathbb{Q}^{ES}$

Genau wie gerade eben können wir hier aufgrund der Darstellung der Radon-Nikodým-Dichte des ESSMM (2.36)

$$\begin{aligned}\varphi_{s_T}^{ES}(u) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\ln(S_0)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}uX_T}c_{ES}\Lambda_T^{ES}\right] \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}u\ln(S_0)}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\exp\Big(\int_0^T\Big(\frac{r-\mu_s}{\sigma_s^2}\Big)\Big(\mu_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2 + \frac{r-\mu_s}{2}\Big)ds\Big)\Big]^{-1}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\int_0^T \mathrm{i}u\mu_s - \mathrm{i}u\frac{\sigma_s^2}{2} \\ &\quad + \Big(\frac{r-\mu_s}{\sigma_s^2}\Big)\Big(\mu_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2\Big)ds + \int_0^T \mathrm{i}u\sigma_s + \frac{r-\mu_s}{\sigma_s}dW_s\Big]\end{aligned}$$

schreiben. Durch erneute Anwendung von (A.4) resultiert

$$\varphi_{s_T}^{ES}(u) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}u\ln(S_0)}\Big(\pi_0^T\exp(TK_{ES})\mathbb{1}\Big)^{-1}\pi_0^T\exp(T\bar{K}_{ES}(u))\mathbb{1} \tag{4.14}$$

mit

$$K_{ES} = A + \mathrm{diag}\Big(\Big(\frac{r-\mu_1}{\sigma_1^2}\Big)\Big(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \frac{r-\mu_1}{2}\Big), \dots, \Big(\frac{r-\mu_d}{\sigma_d^2}\Big)\Big(\mu_d - \frac{1}{2}\sigma_d^2 + \frac{r-\mu_d}{2}\Big)\Big)$$

und

$$\bar{K}_{ES}(u) = K_{ES} + \mathrm{diag}\Big(\mathrm{i}ur - \frac{1}{2}\sigma_1^2(\mathrm{i}u+u^2), \dots, \mathrm{i}ur - \frac{1}{2}\sigma_d^2(\mathrm{i}u+u^2)\Big).$$

4.4.3 Charakteristische Funktion der Zufallsvariable s_T unter $\mathbb{Q}^{SA}$

Abschließend werden wir noch die charakteristische Funktion von s_T unter dem durch einen spieltheoretischen Ansatz motivierten Martingalmaß $\mathbb{Q}^{SA}$ bestimmen. Mit (2.46) erhalten wir

$$\begin{aligned}\varphi_{s_T}^{SA}(u) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\ln(S_0)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}uX_T}\Lambda_T^{SA}\right] \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}u\ln(S_0)}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\int_0^T \mathrm{i}u\mu_s - \mathrm{i}u\frac{\sigma_s^2}{2} - \frac{(r-\mu_s)^2}{2\sigma_s^2}ds + \int_0^T \mathrm{i}u\sigma_s + \frac{r-\mu_s}{\sigma_s}dW_s\Big].\end{aligned}$$

Mit (A.4) folgt schließlich

$$\varphi_{s_T}^{SA}(u) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}u\ln(S_0)}\pi_0^T \exp(TK_{SA}(u))\mathbb{1}, \tag{4.15}$$

wobei

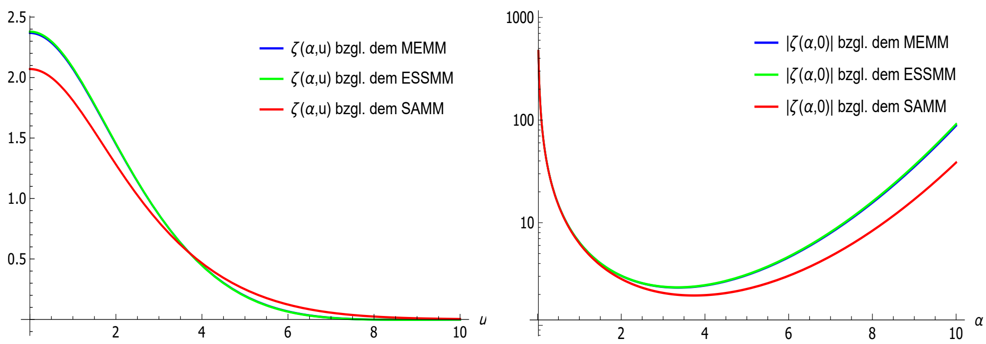
$$K_{SA}(u) = A + \operatorname{diag}\Big(iur - \frac{1}{2}\sigma_1^2(\mathrm{i}u + u^2), \ldots, iur - \frac{1}{2}\sigma_d^2(\mathrm{i}u + u^2)\Big).$$

4.5 Betrachtung numerischer Aspekte bei der Bepreisung von Optionen

Betrachten wir ein RSM mit $d = 2$ Zuständen. Die Modellparameter sind wie in Beispiel 1.2. Der risikolose Zinssatz ist $r = 0.05$. Weiters ist $S_0 = 10$ und $\pi_0 = (0.5, 0.5)^T$ die Startverteilung von Y. Wir werden hier Call-Optionen mit Strike-Preis $K = 11$ und den Laufzeiten

$$T_{5years} = 5, \quad T_{month} = {}^1/_{12}, \quad T_{week} = {}^1/_{52}, \quad T_{3days} = {}^3/_{365}$$

unter den drei diskutierten Bepreisungsmaßen bewerten. Sämtliche Berechnungen wurden dabei in Wolfram *Mathematica* 10.0 durchgeführt. Wir werden im Folgenden besonders auf die Problematik, die sich bei der Bepreisung von Optionen mit sehr kurzen Laufzeiten ergibt, und die damit verbundene Wahl des Parameters α eingehen. Je nach Wahl von α resultieren Schwierigkeiten bei der numerischen Berechnung des Integrals in (4.3), wobei diese entweder durch den steilen Anstieg des Integranden $\zeta(\alpha, u)$ um den Punkt $u = 0$ oder durch die starke Oszillation von $\zeta(\alpha, u)$ verursacht werden.
Die Laufzeit ist zunächst $T = 5$. Für $\alpha = 3$ verhält sich der Integrand $\zeta(\alpha, u)$ weitgehend stabil:



(a) **(b)**

Abb. 4.1: Die Funktion $\zeta(\alpha, u)$ für $T = 5$ und $\alpha = 3$ (a) bzw. die Funktion $|\zeta(\alpha, 0)|$ für $T = 5$ (b).

Die Stabilität von $\zeta(\alpha, u)$ lässt sich dadurch erklären, dass die eben getroffene Wahl $\alpha = 3$ der in Abschnitt 4.1 diskutierten „optimalen" Parameterwahl α_{Min} annähernd entspricht. Für den Call-Preis erhalten wir:

$K = 11$, $T = 5$	MEMM	ESSMM	SAMM
α_{Min}	3.35	3.34	3.74
Call-Preis	2.00139	2.00545	1.86711

Die bei der Optionsbepreisung notwendige numerische Integration wurde durch die Methode *NIntegrate* mit *PrecisionGoal -> 10* umgesetzt. Wie sensibel der Integrand $\zeta(\alpha, u)$ auf eine zu kleine Wahl bzw. auf eine zu große Wahl des Parameters α reagiert, können wir in Abb. 4.2 erkennen, wobei sich das dort dargestellte Verhalten für kurze Laufzeiten zunehmend verstärkt.

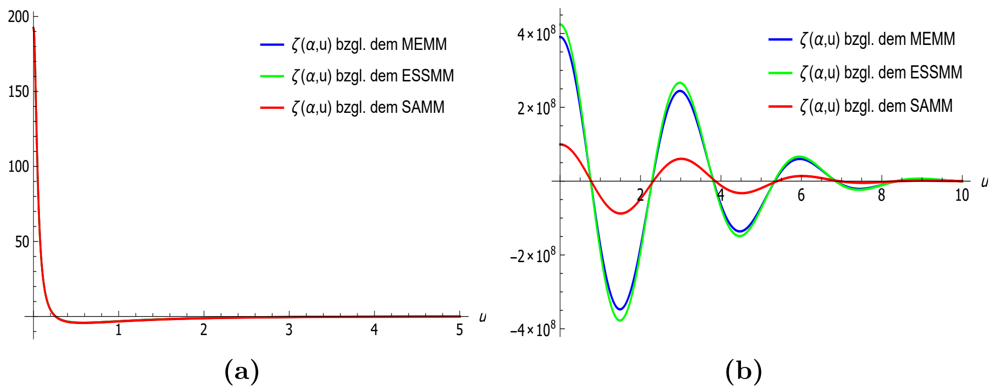


Abb. 4.2: Die Funktion $\zeta(\alpha, u)$ für $T = 5$ und $\alpha = 0.05$ (a) bzw. $T = 5$ und $\alpha = 20$ (b).

Betrachten wir den Integranden $\zeta(\alpha, u)$ bei Wahl von α_{Min} für die verbleibenden Laufzeiten,

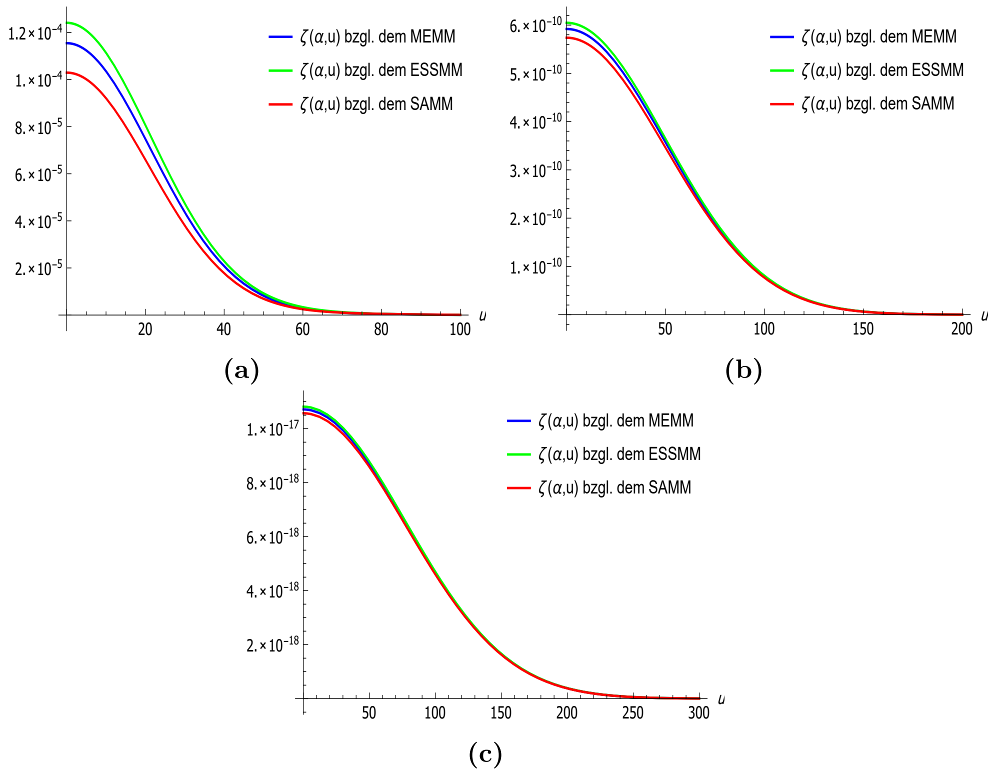


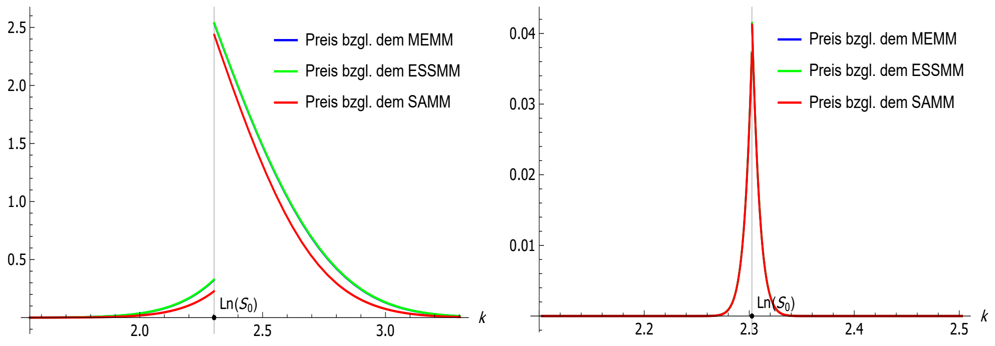
Abb. 4.3: Die Funktion $\zeta(\alpha, u)$ für $T = {}^1\!/_{12}$ und $\alpha = 74$ (a), $T = {}^1\!/_{52}$ und $\alpha = 270$ (b) bzw. $T = {}^3\!/_{365}$ und $\alpha = 609$ (c).

so verhält sich $\zeta(\alpha, u)$ auch für diese Laufzeiten stabil. Die Berechnung der Call-Preise ergibt:

$K = 11$, $T = 1/12$	MEMM	ESSMM	SAMM
α_{Min}	73.73	73.50	74.13
Call-Preis	9.97546 E-4	1.07871 E-3	8.80168 E-4
$K = 11$, $T = 1/52$	MEMM	ESSMM	SAMM
α_{Min}	269.51	269.51	269.51
Call-Preis	1.17575 E-8	1.20129 E-8	1.13981 E-8
$K = 11$, $T = 3/365$	MEMM	ESSMM	SAMM
α_{Min}	608.96	608.96	608.96
Call-Preis	3.31361 E-16	3.34502 E-16	3.26948 E-16

4.5.1 Numerisches Verhalten bei Bepreisung einer Out-of-the-Money-Option

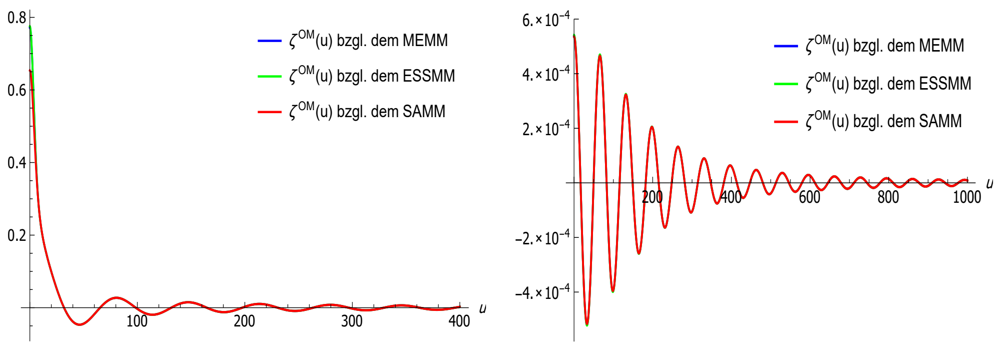
Der Preis einer Out-of-the-Money-Option mit logarithmiertem Strike-Preis k ist durch



(a) **(b)**

Abb. 4.4: Die Funktion $C_T^{OM}(k)$ für $T = 5$ (a) bzw. $T = 3/365$ (b).

gegeben. Das schnelle Abklingverhalten der Funktion $C_T^{OM}(k)$ für $k \to \pm\infty$ führt dazu, dass der Integrand $\zeta^{OM}(u)$ in (4.8) besonders bei einer sehr kurzen Laufzeit T zu oszillieren beginnt.



(a) **(b)**

Abb. 4.5: Die Funktion $\zeta^{OM}(u)$ für $T = 5$ (a) bzw. $T = 3/365$ (b).

Damit treten bei der numerischen Berechnung des Preises einer Out-of-the-Money-Option mit kurzer Laufzeit T aufgrund der ausgeprägten Oszillation von $\zeta^{OM}(u)$ Probleme auf. Durch die in Abschnitt 4.2 vorgeschlagene Transformation erhalten wir für den Preis einer solchen Option eine Integraldarstellung (4.10) mit einem Integranden $\xi^{OM}(\alpha, u)$, der ein wesentlich besseres Abklingverhalten besitzt. Dabei erweist es sich als geeignet, den Parameter α durch

$$\bar{\alpha}_{Min} = \underset{\alpha>0}{\arg\min}\; |\xi^{OM}(\alpha, 0)| \overset{(4.11)}{=} \underset{\alpha>0}{\arg\min} \left| \frac{S_0^{-\alpha}\psi^{OM}(-\mathrm{i}\alpha) - S_0^{\alpha}\psi^{OM}(\mathrm{i}\alpha)}{2\sinh(\alpha(k-s_0))} \right|$$

festzulegen. Wir erhalten:

$K = 11,\ T = 1/12$	MEMM	ESSMM	SAMM
$\bar{\alpha}_{Min}$	66.56	66.29	67.01
$K = 11,\ T = 1/52$	MEMM	ESSMM	SAMM
$\bar{\alpha}_{Min}$	262.46	262.46	262.47
$K = 11,\ T = 3/365$	MEMM	ESSMM	SAMM
$\bar{\alpha}_{Min}$	607.47	607.47	607.47

Der Integrand $\xi^{OM}(\alpha, u)$ verhält sich bei einer Parameterwahl von $\bar{\alpha}_{Min}$ auch für sehr kurze Laufzeiten vergleichsweise stabil:

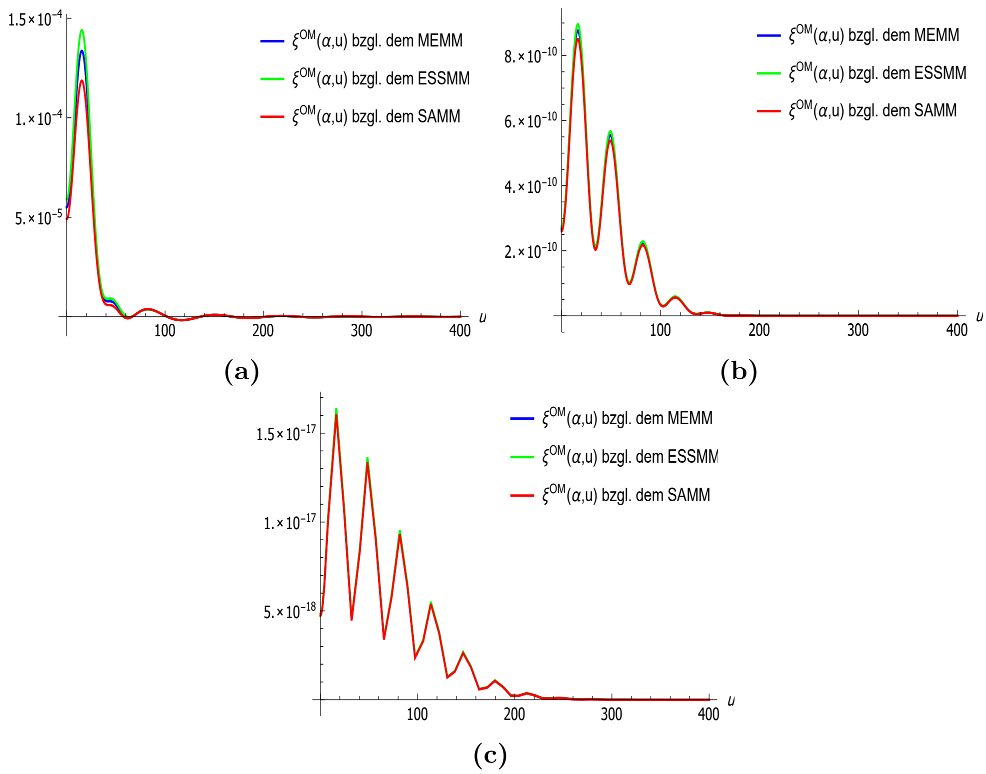


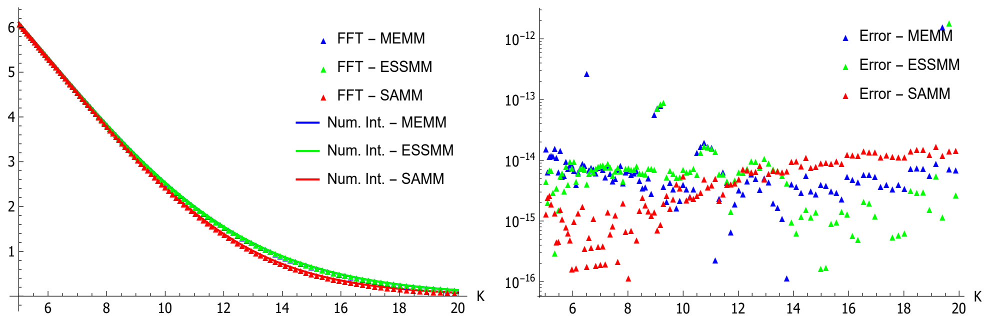
Abb. 4.6: Die Funktion $\xi^{OM}(\alpha, u)$ für $T = 1/12$ und $\alpha = 67$ (a), $T = 1/52$ und $\alpha = 262$ (b) bzw. $T = 3/365$ und $\alpha = 607$ (c).

4.5.2 Implementierung des FFT-Algorithmus zur Optionsbepreisung

Abschließend werden wir den FFT-Algorithmus zur Optionsbepreisung heranziehen. Dabei sind die FFT-Parameter durch

$$N = 2^{12}, \quad \eta = 1/8, \quad \lambda = \pi/256$$

gegeben. Betrachten wir zunächst die Laufzeit $T = 5$. Dann folgt für den Preis einer Call-Option mit Strike-Preis K:



(a) (b)

Abb. 4.7: Preis einer Call-Option mit Strike-Preis K und Laufzeit $T = 5$ berechnet durch den FFT-Algorithmus bei Wahl $\alpha = 3$ bzw. durch numerische Integration mit *PrecisionGoal -> 10* (a) und Darstellung des relativen Fehlers (b).

Die FFT-Methode liefert somit in diesem Fall sehr exakte Ergebnisse. Da wir an der Bepreisung einer Call-Option mit Strike-Preis $K = 11$ interessiert sind, aber genau diese durch den FFT-Algorithmus nicht bewertet haben, betrachten wir einfach möglichst ähnliche Optionen, deren Preis wir kennen:

Strike-Preis	FFT - MEMM	Num. Int. - MEMM	Rel. Fehler - MEMM
10.8970	2.05268	2.05268	1.70913 E-14
11	2.00139*	2.00139	1.64199 E-14*
11.0316	1.98585	1.98585	1.66602 E-14

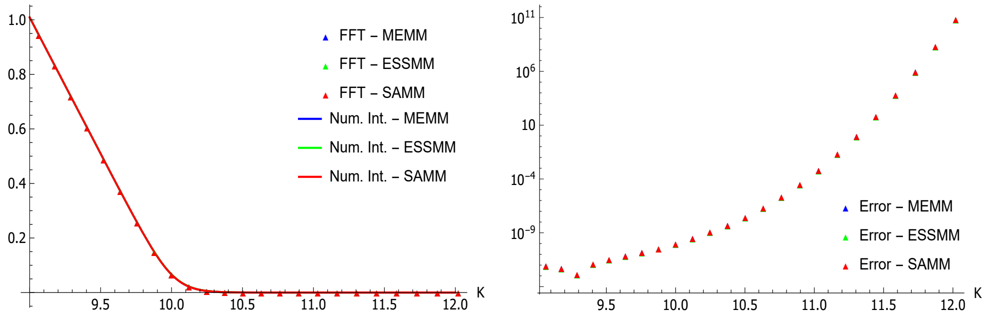
Strike-Preis	FFT - ESSMM	Num. Int. - ESSMM	Rel. Fehler - ESSMM
10.8970	2.05666	2.05666	1.68423 E-14
11	2.00545*	2.00545	1.63866 E-14*
11.0316	1.98994	1.98994	1.58448 E-14

Strike-Preis	FFT - SAMM	Num. Int. - SAMM	Rel. Fehler - SAMM
10.8970	1.92181	1.92181	3.69725 E-15
11	1.86711*	1.86711	4.04342 E-15*
11.0316	1.85055	1.85055	3.95961 E-15

Bemerkung. Die mit * versehenen Werte resultieren, indem wir die durch die FFT-Methode erhaltenen Optionspreise interpolieren. Dabei verwenden wir die Methode *Interpolation* mit *InterpolationOrder -> 10*. Durch logarithmische Transformation der berechneten FFT-Preise kann die Güte der Interpolation speziell für kurze Laufzeiten verbessert werden.

Bemerkung. Um die Zahl der bewerteten Optionen mit einem Strike-Preis nahe $K = 11$ zu erhöhen, müssten wir den Schrittweitenparameter λ kleiner wählen.

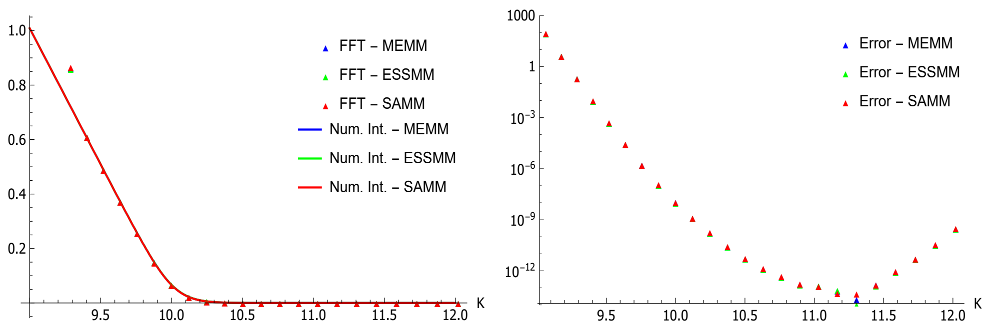
Für $T = 1/52$ und $\alpha = 3$ ergibt sich das folgende Bild:



(a) **(b)**

Abb. 4.8: Preis einer Call-Option mit Strike-Preis K und Laufzeit $T = 1/52$ berechnet durch den FFT-Algorithmus bei Wahl $\alpha = 3$ bzw. durch numerische Integration mit *PrecisionGoal -> 10* (a) und Darstellung des relativen Fehlers (b).

Die FFT-Methode liefert somit bei sehr kurzen Laufzeiten zunehmend unbrauchbare Ergebnisse für einen Strike-Preis $K > S_0$. Dies hängt mit der ungeeigneten Wahl des Parameters α zusammen. Da wir eine Call-Option mit $K = 11$ und $T = 1/52$ bepreisen wollen, wählen wir den in Abschnitt 4.1 vorgeschlagenen Parameter $\alpha_{Min} = 270$ und erhalten:



(a) **(b)**

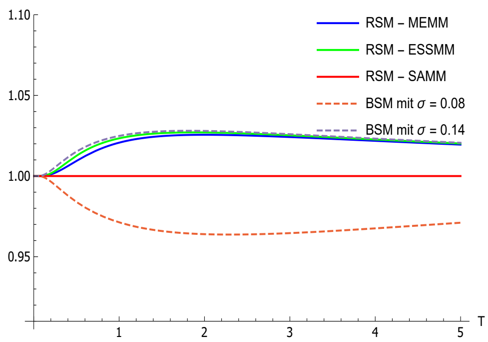
Abb. 4.9: Preis einer Call-Option mit Strike-Preis K und Laufzeit $T = 1/52$ berechnet durch den FFT-Algorithmus bei Wahl $\alpha = 270$ bzw. durch numerische Integration mit *PrecisionGoal -> 10* (a) und Darstellung des relativen Fehlers (b).

Durch diese Wahl funktioniert die numerische Optionsbepreisung durch den FFT-Algorithmus für Strike-Preise nahe $K = 11$ sehr gut. Es resultiert:

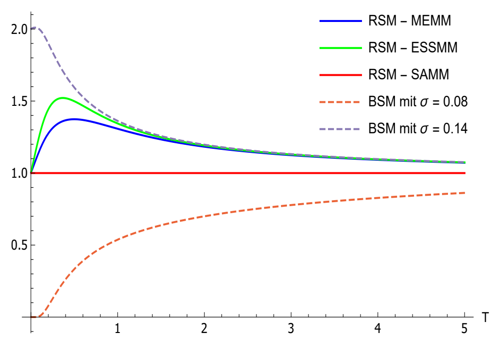
Strike-Preis	FFT - MEMM	Num. Int. - MEMM	Rel. Fehler - MEMM
10.8970	1.32242 E-7	1.32242 E-7	1.69937 E-13
11	1.17575 E-8*	1.17575 E-8	3.51727 E-8*
11.0316	5.38675 E-9	5.38675 E-9	1.28989 E-13

Strike-Preis	FFT - ESSMM	Num. Int. - ESSMM	Rel. Fehler - ESSMM
10.8970	1.35114 E-7	1.35114 E-7	1.59272 E-13
11	1.20129 E-8*	1.20129 E-8	2.03794 E-8*
11.0316	5.50376 E-9	5.50376 E-9	1.37819 E-13
Strike-Preis	**FFT - SAMM**	**Num. Int. - SAMM**	**Rel. Fehler - SAMM**
10.8970	1.28201 E-7	1.28201 E-7	1.81488 E-13
11	1.13981 E-8*	1.13981 E-8	5.92617 E-8*
11.0316	5.22212 E-9	5.22212 E-9	1.22918 E-13

In unserem unvollständigen Marktmodell haben wir durch das MEMM, das ESSMM und das SAMM drei unterschiedliche risikoneutrale Preise für eine europäische Call-Option festlegen können. Dabei stellen wir in unserem Modellbeispiel fest, dass der Preis unter dem MEMM bzw. dem ESSMM stets höher ist als unter dem SAMM.
Diesen Unterschied können wir wie folgt erklären: Im RSM gibt es zwei verschiedene „Arten“ von Risiken: das Diffusions-Risiko, das durch gewöhnliche Preisschwankungen entsteht, und das Regime-Switching-Risiko, das durch auftretende Zustandswechsel und den dadurch geänderten makroökonomischen Bedingungen gegeben ist [21].
Dabei wird das Diffusions-Risiko durch alle drei betrachteten Bepreisungsmaße bewertet, das Regime-Switching-Risiko (RSR) hingegen aber nicht: Im Fall des SAMM wird das Risiko der Zustandswechsel gar nicht bepreist. Es wird angenommen, dass dieses zusätzliche Risiko, wie im Fall der im Sprung-Diffusions-Modell von Merton auftretenden Preissprünge [44], diversifiziert werden kann.
Im Gegensatz dazu wird das RSR sowohl durch das MEMM als auch durch das ESSMM bepreist. Das Risiko eines Zustandswechsels wird somit als systematisches Risiko aufgefasst. In Abb. 4.10 wird der relative Unterschied der resultierenden Optionspreise dargestellt:



(a)

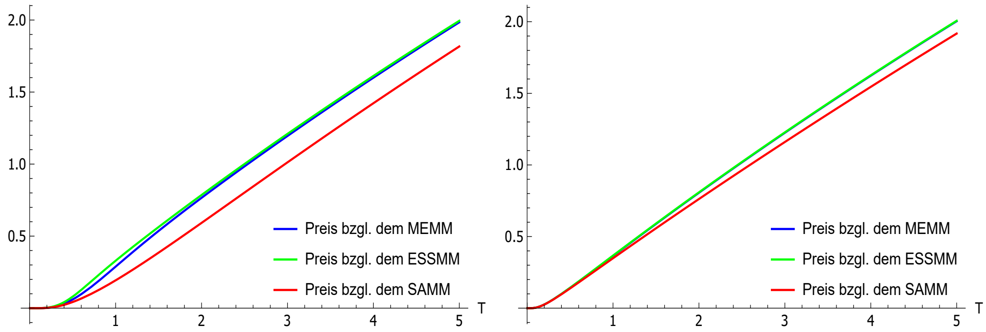


(b)

Abb. 4.10: Relativer Preis einer Call-Option mit Strike-Preis $K = 9$ (a) bzw. $K = 11$ (b) und Laufzeit T bei Wahl des MEMM, des ESSMM und des SAMM im RSM bzw. bei Wahl von $\sigma = 0.08$ und $\sigma = 0.14$ im gewöhnlichen BSM bezogen auf den durch das SAMM festgelegten Call-Preis.

Im RSM ergeben sich somit deutliche Unterschiede in der Bewertung einer europäischen Call-Option, weshalb die Frage, ob das RSR bepreist werden soll oder aber nicht, von Bedeutung ist. In [9] wurde gezeigt, dass in einem zeitdiskreten RSM das RSR als zusätzliches Risiko am Markt bepreist wird. Motiviert werden kann diese Aussage dadurch: Betrachten wir einen

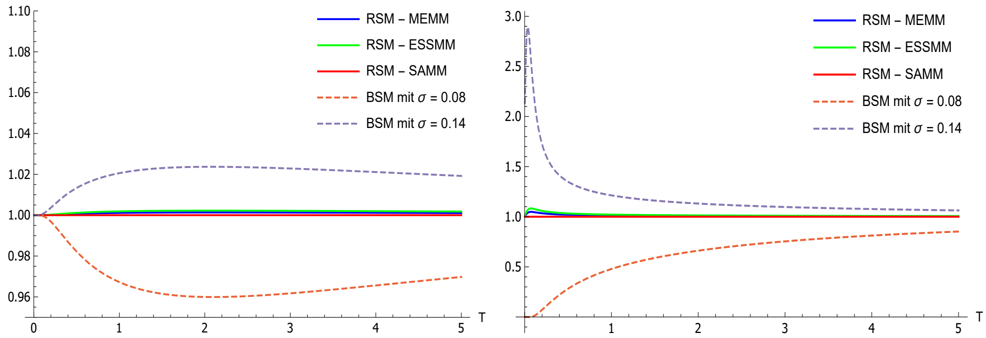
risikoaversen Marktteilnehmer. Dann soll der Preis des RSR einen für diesen Marktteilnehmer ungünstigen Zustandswechsel, wie beispielsweise der Wechsel von einem Bull-Regime zu einem Bear-Regime, ausgleichen. Die Nichtbepreisung des RSR würde sonst zu einer Fehlbewertung von Optionen führen [9].
Die Bewertung des RSR hängt einerseits von der Startverteilung der Markovkette Y ab. Startet nämlich Y in einem Bull-Zustand, so wird das RSR stärker bewertet als im Fall, dass Y in einem Bear-Zustand startet:



(a) (b)

Abb. 4.11: Preis einer Call-Option mit Strike-Preis $K = 11$ und Laufzeit T. Die Startverteilung von Y sei hier durch $\pi_0 = (1, 0)$ (a) bzw. $\pi_0 = (0, 1)$ (b) gegeben.

Andererseits hängt die Bepreisung des RSR auch von der Intensitätsmatrix A ab. In einem Fast-Regime-Switching-Modell (FRSM) mit hohen Übergangsintensitäten zwischen den Zuständen wird dieses Risiko kaum bepreist:



(a) (b)

Abb. 4.12: Relativer Preis einer Call-Option mit Strike-Preis $K = 9$ (a) bzw. $K = 11$ (b) und Laufzeit T wie in Abb. 4.10. Die Übergangsintensitäten von Y seien aber durch $a_{1,2} = 50$ und $a_{2,1} = 25$ bestimmt.

4.6 Implizite Volatilität

$C_t(K, T)$ ist der am Markt zum Zeitpunkt $t \in [0, T)$ beobachtete Preis einer Call-Option mit Strike-Preis K und Laufzeit T. Die implizite Volatilität ist jene Volatilität $\sigma_t(K, T)$, die, in die gewöhnliche Black-Scholes-Formel zur Bepreisung einer Call-Option eingesetzt, den realen Marktpreis ergibt [29], d.h. $\sigma_t(K,T)$ ist Lösung der Gleichung

$$C_t(K,T) = C^{BS}(S_t, K, t, T, \sigma_t(K,T), r).$$

Im BSM wird angenommen, dass eine konstante Volatilität vorliegt. Dieser Annahme wird aber beispielsweise durch

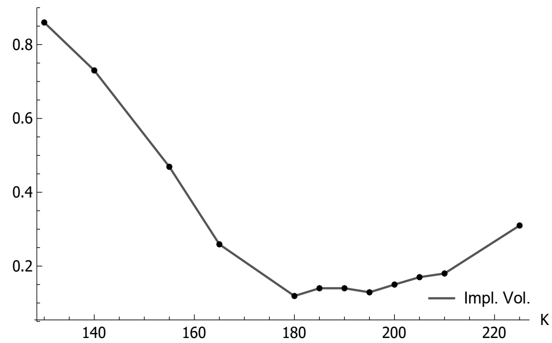
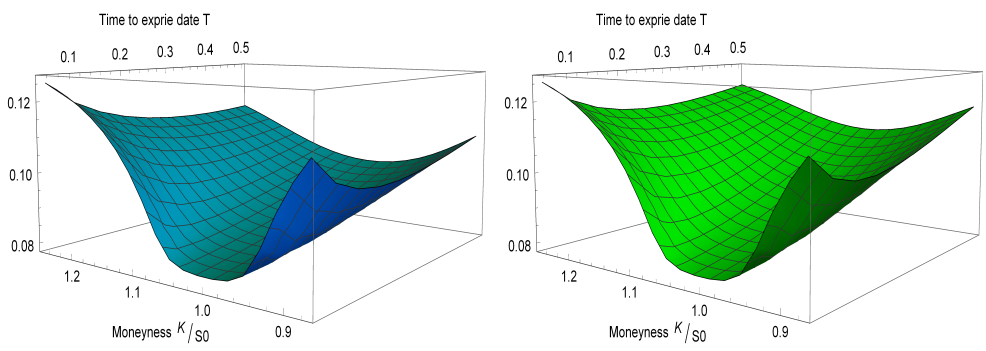
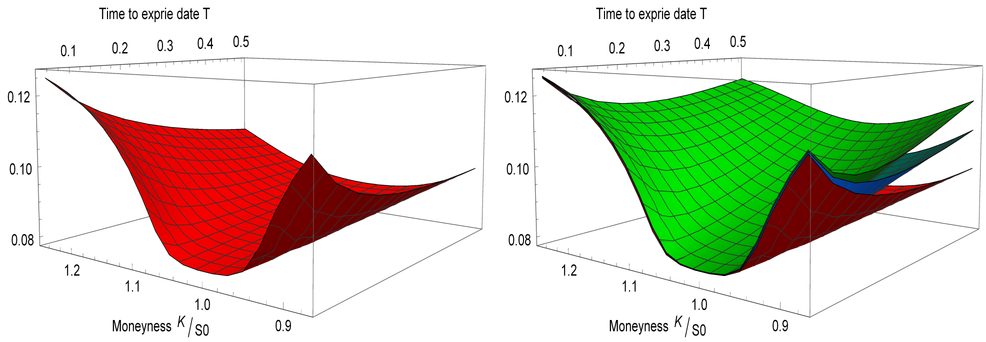


Abb. 4.13: Implizite Volatilität einer Goldman Sachs Group Call-Option mit Kurs des Basiswerts von 189.75$ am 20/11/14 (NYSE) und Expire-Date 20/12/14, Quelle: http://www.barchart.com.

klar widersprochen. Die implizite Volatilität hängt in dieser realen Beobachtung offensichtlich stark vom Strike-Preis K ab. Das in Abb. 4.13 dargestellte Verhalten der impliziten Volatilität bei Wahl verschiedener Strike-Preise K wird als Volatilitäts-Smile bzw. aufgrund der Schiefe auch als Volatilitäts-Skew bezeichnet. Eine wesentliche und zentrale Schwäche des BSM ist es, dass durch eine zu starke Vereinfachung der Realität ein vorliegender Volatilitäts-Smile nicht erklärt werden kann.
Eine Möglichkeit, einen Volatilitäts-Smile zu generieren, ist es, die Volatilität als stochastischen Prozess zu modellieren. Im RSM geschieht dies mittels Steuerung der Volatilität durch eine zeitstetige Markovkette.
Betrachten wir wiederum das Modellbeispiel 1.2. Die Laufzeit ist $T = 1/2$. Dann resultiert die folgende implizite Volatilitätsstruktur:



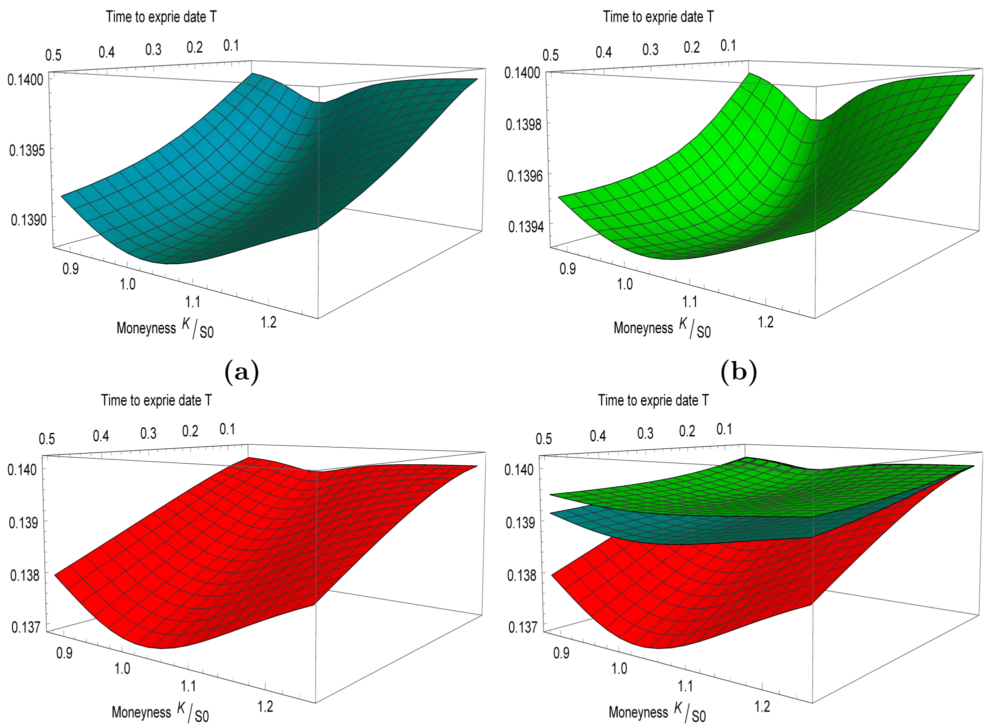
(a) **(b)**



(c) (d)

Abb. 4.14: Volatilitäts-Surface bei Wahl des MEMM (a), des ESSMM (b) bzw. des SAMM (c) und deren direkter Vergleich (d) bedingt auf den Bull-Zustand.

Wie wir erkennen können, ergibt sich für die drei diskutierten Bepreisungsmaße jeweils ein recht ähnliches Volatilitäts-Surface. Falls sich die Markovkette Y im Bull-Zustand befindet, erhalten wir einen deutlich ausgeprägten Volatilitäts-Smile, der, je näher am Ausübungszeitpunkt betrachtet und je kürzer die verbleibende Laufzeit ist, umso steiler wird. Falls sich aber der Prozess Y im Bear-Zustand befindet, resultiert ein wesentlich flacheres Volatilitäts-Surface:



(c) (d)

Abb. 4.15: Volatilitäts-Surface bei Wahl des MEMM (a), des ESSMM (b) bzw. des SAMM (c) und deren direkter Vergleich (d) bedingt auf den Bear-Zustand.

5 Kalibrierung und Parameterschätzung im RSM

Im Folgenden nehmen wir an, dass die Startverteilung π_0 der zeitstetigen Markovkette Y durch die Gleichverteilung gegeben und die Anzahl der Zustände d bekannt ist. Wir werden hier auf das Problem der Identifizierung der unterschiedlichen Zustände von Y nicht näher eingehen und verweisen auf [50]. Weiters ist der risikolose Zinssatz r bekannt.
Um dann eine europäische Call-Option mit Strike-Preis K und Laufzeit T bepreisen zu können, müssen wir die uns unbekannten Modellparameter

$$\mathcal{P} = \{\mu, \sigma, A\}$$

bestimmen. Wir bezeichnen die Parameter $\mathcal{P}$ als **zulässig**, wenn $\mu \in \mathbb{R}^d$, $0 < \sigma \in \mathbb{R}^d$ und $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ die Intensitätsmatrix einer zeitstetigen, homogenen, irreduziblen Markovkette ist. Für den Raum aller zulässigen Parameter $\mathcal{P}$ schreiben wir $\mathfrak{P}$. Da das Regime-Switching-Modell nicht vollständig ist, müssen wir auch ein Bepreisungsmaß $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_e$ auswählen.
Somit wird im RSM der risikoneutrale Preis einer Call-Option durch die Parameter $\mathcal{P}$ und das Martingalmaß $\mathbb{Q}$ vollständig festgelegt. Der Aktienpreisprozess S folgt im risikoneutralen Modell der Dynamik

$$dS_t \overset{(2.15)}{=} S_t(rdt + \sigma_t d\hat{W}_t).$$

Wir bezeichnen die konsistente Wahl der Parameter $\mathcal{P}$ und des Maßes $\mathbb{Q}$ bezüglich am Markt beobachteter, realer Optionspreise als Kalibrierung des risikoneutralen Bepreisungsmodells. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden wir einen in der Literatur häufig besprochenen Ansatz vorstellen, um das Bepreisungsmodell zu kalibrieren.
Dabei interpretieren wir das Problem der Kalibrierung als inverses Problem zur Bepreisung von Optionen, siehe z.B. [12], [32] und [47]. Durch Lösen des inversen Problems werden dann zulässige Modellparameter $\mathcal{P}$ und das Maß $\mathbb{Q}$ bestimmt. Damit wir aussagekräftige Ergebnisse erhalten, sollen die von uns am Markt beobachteten Optionen der zu bepreisenden Option möglichst ähnlich sein.
Abschließend werden wir im zweiten Teil dieses Kapitels eine Markov-Chain-Monte-Carlo-Methode diskutieren, um die Modellparameter $\mathcal{P}$ aus beobachteten Log-Returns zu schätzen, siehe z.B. [30], [31] und [34]. Da die Preisdynamik unter dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ nur wenig Information bezüglich $\mathbb{Q}$ beinhaltet, können wir aus der Betrachtung der Log-Returns alleine keine Aussage über die Wahl eines Bepreisungsmaßes $\mathbb{Q}$ treffen [12]. Wir können aber ein solches, z.B. durch einen nutzentheoretischen Ansatz wie in Kapitel 2, motivieren.

5.1 Inverses Problem und Kalibrierung

Wir nehmen an, dass wir m-Stück Call-Optionen mit Strike-Preis K_i, Laufzeit T_i, Bid-Preis C_i^B und Ask-Preis C_i^A am Markt beobachten können.
Der Bid-Preis C_i^B bezeichnet den höchsten Preis, den ein Händler bereit ist, für die i-te Call-Option zu bezahlen, und der Ask-Preis C_i^A den niedrigsten Preis, für den ein Händler bereit ist, diese zu verkaufen. Die resultierende Preisdifferenz nennen wir Bid-Ask-Spread. Im Folgenden verwenden wir den sogenannten Mid-Preis C_i^M als den Marktpreis der i-ten Call-Option. Dieser Preis liegt genau in der Mitte zwischen C_i^B und C_i^A.
Da die konsistente Wahl des risikoneutralen Bepreisungsmodells bezüglich realer Marktpreise das essentielle Kriterium der Modellkalibrierung ist, sollen die Gleichungen

$$C_i^M = \mathrm{e}^{-rT_i}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_{T_i} - K_i)_+] \tag{5.1}$$

für $i = 1, \dots, m$ erfüllt sein. Dabei ergeben sich verschiedene Probleme [12]:

- Die Modellkalibrierung muss durch diese Gleichungen nicht eindeutig bestimmt sein, es kann unendlich viele Paare $(\mathcal{P}, \mathbb{Q}) \in \mathfrak{P} \times \mathcal{M}_e$ geben, die die beobachteten Marktpreise exakt wiedergeben.
- Da wir uns mit dem RSM auf die Betrachtung einer ganz speziellen Modellklasse beschränkt haben, muss gar keine Lösung existieren.
- Die Berechnung einer möglichen Lösung von (5.1) gestaltet sich als sehr komplex.

In der Realität liegt der „wahre“ Preis einer Call-Option irgendwo zwischen dem Bid-Preis und dem Ask-Preis und muss nicht genau dem Mid-Preis entsprechen [12]. Somit macht es auch keinen Sinn, diesen exakt wiedergeben zu wollen. Vielmehr wollen wir eine gute Approximation finden und minimieren deshalb die Summe der quadratischen Fehler

$$SSE(\mathcal{P}, \mathbb{Q}) := \sum_{i=1}^{m} \omega_i |C^*(K_i, T_i) - C_i^M|^2, \tag{5.2}$$

wobei die Gewichte $\omega_i > 0$ seien und $C^*(K_i, T_i)$ den theoretischen Preis einer Call-Option mit Strike-Preis K_i und Laufzeit T_i in einem durch $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ und $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_e$ festgelegten risikoneutralen Bepreisungsmodell bezeichnet.
Je größer die Differenz zwischen den Preisen C_i^B und C_i^A ist, desto stärker kann der Marktpreis C_i^M vom „wahren“ Call-Preis abweichen und desto kleiner sollte folglich das Gewicht ω_i bestimmt sein. Als geeignete Wahl wird beispielsweise

$$\omega_i = \frac{1}{|C_i^B - C_i^A|}$$

vorgeschlagen [10]. Es ist nicht sinnvoll, den Ausdruck (5.2) über die Genauigkeitsschranke

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{m} \omega_i |C_i^B - C_i^A|^2 = \sum_{i=1}^{m} |C_i^B - C_i^A|$$

hinaus minimieren zu wollen. Das eben festgelegte ε kann als Abbruchbedingung für unser Minimierungsproblem herangezogen werden. Bei der Minimierung von (5.2) ergeben sich die folgenden Schwierigkeiten [11], [32]:

- Zum einen ist die Parametrisierung der Menge der äquivalenten Martingalmaße $\mathcal{M}_e$ sehr komplex: Jedes Maß $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_e$ wird durch recht frei wählbare stochastische Prozesse charakterisiert, siehe Kapitel 2.1.
  Anstatt die gesamte Menge aller Maße $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_e$ zu betrachten, könnten wir uns auf eine Menge von bekannten Maßen, wie dem MEMM, dem ESSMM, dem SAMM etc. beschränken. Dies erweist sich als erhebliche, aber auch als sehr restriktive Vereinfachung des Minimierungsproblems.
- Da die Funktion $SSE(\mathcal{P}, \mathbb{Q})$ nicht konvex ist, findet ein Gradient basierter Algorithmus nicht notwendigerweise ein globales, sondern möglicherweise nur ein lokales Minimum. In der Literatur wird das Hinzufügen eines konvexen Terms $H(\mathcal{P}, \mathbb{Q})$ und die Minimierung von

  $$SSE_H(\mathcal{P}, \mathbb{Q}) := \sum_{i=1}^{m} \omega_i |C^*(K_i, T_i) - C_i^M|^2 + \alpha H(\mathcal{P}, \mathbb{Q})$$

  vorgeschlagen, wobei der Parameter α derart gewählt wird, sodass die gesamte Funktion $SSE_H(\mathcal{P}, \mathbb{Q})$ konvex ist.
- Ein weiteres Problem ist die numerische Stabilität: Ein Gradient basierter Algorithmus reagiert einerseits sensitiv auf die Wahl des Startwerts. Andererseits kann dieser bei Vorliegen von sehr „flachen“ Bereichen, in denen der Gradient sehr klein ist, an einer mehr oder weniger „zufälligen“ Stelle die Suche abbrechen.

Bei der Modellkalibrierung entstehen zwei verschiedene Arten von Fehlern: Wir haben uns ja bei der Beschreibung der Aktienpreisdynamik auf eine spezielle Modellklasse, in unserem Fall das RSM, festgelegt. Somit entsteht zunächst durch die Wahl einer möglicherweise unpassenden Modellklasse der sogenannte Modellfehler. Außerdem ergibt sich bei der Minimierung der Quadratsumme (5.2) ein numerischer Fehler. Den insgesamt resultierenden Fehler wollen wir entweder durch den Root-Mean-Square-Error (RMSE)

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left| C^*(K_i, T_i) - C_i^M \right|^2} \tag{5.3}$$

oder den Average-Relative-Percentage-Error (ARPE)

$$\text{ARPE} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{|C^*(K_i, T_i) - C_i^M|}{C_i^M} \tag{5.4}$$

beschreiben [47].

Bemerkung. Wir können für eine am Markt beobachtete Call-Option mit Strike-Preis K_i und Laufzeit T_i die implizite Volatilität $\sigma^{im}(K_i, T_i)$ bestimmen. Um diese Volatilität durch ein kalibriertes Modell möglichst gut wiedergeben zu können, betrachten wir die Minimierung des Ausdrucks

$$SSE^{im}(\mathcal{P}, \mathbb{Q}) := \sum_{i=1}^{m} \omega_i |Vol^{im}(C^*(K_i, T_i), K_i, T_i) - \sigma^{im}(K_i, T_i)|^2, \tag{5.5}$$

wobei $Vol^{im}(C^*(K_i,T_i),K_i,T_i)$ die implizite Volatilität einer Call-Option mit theoretischem Preis $C^*(K_i,T_i)$ in einem durch $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ und $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_e$ festgelegten risikoneutralen Bepreisungsmodell bezeichnet. Da im Vergleich zu vorhin in jedem Rechenschritt die Black-Scholes-Formel invertiert werden muss, erweist sich diese Art der Modellkalibrierung aber als außerordentlich rechenaufwendig [47].

5.1.1 Numerisches Beispiel

In diesem Abschnitt betrachten wir ein RSM mit $d = 2$ Zuständen. Unsere Modellparameter

$$\mathcal{P} = \{\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, a_{1,2}, a_{2,1}\}$$

sind dabei wie in Modellbeispiel 1.2 gegeben. Der risikolose Zinssatz ist $r = 0.05$. Mit diesen Parametern bestimmen wir den Preis von $m = 8$ verschiedenen europäischen Call-Optionen bezüglich dem MEMM, dem ESSMM und dem SAMM und erhalten:

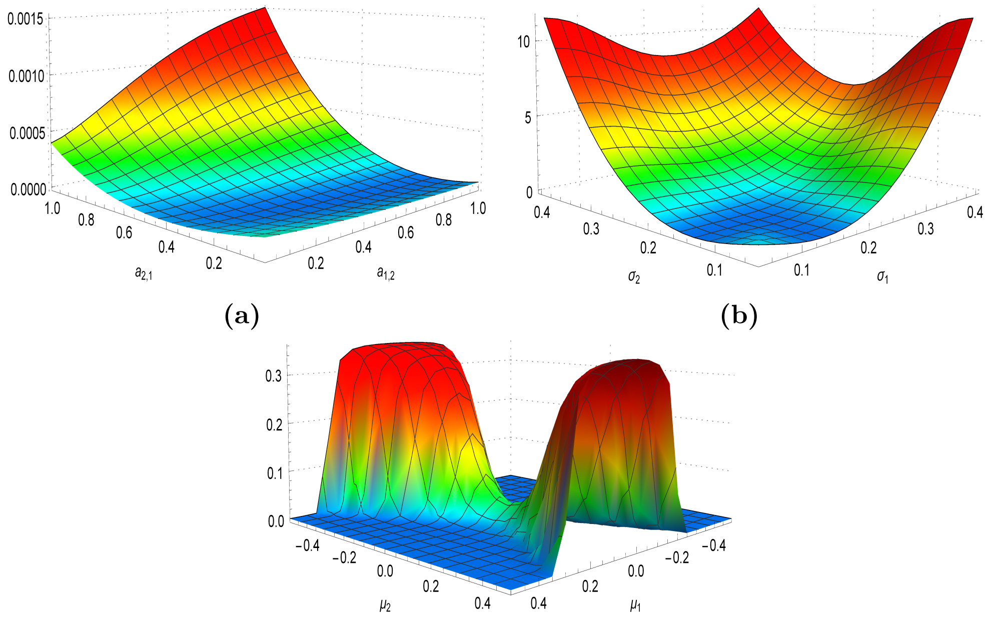
Strike-Preis & Laufzeit	MEMM	ESSMM	SAMM
$K = 6, T = 1$	4.29263	4.29263	4.29263
$K = 6, T = 5$	5.33220	5.33235	5.32935
$K = 8, T = 1$	2.40077	2.40148	2.39602
$K = 8, T = 5$	3.83759	3.83877	3.80769
$K = 10, T = 1$	0.80880	0.81811	0.73088
$K = 10, T = 5$	2.53740	2.54054	2.43946
$K = 12, T = 1$	0.12902	0.13487	0.08288
$K = 12, T = 5$	1.55044	1.55515	1.38970

Wir nehmen an, dass die am Markt beobachteten Mid-Preise C_i^M für $i = 1, \dots, 8$ durch die eben bestimmten Preise bezüglich dem MEMM, dem ESSMM oder dem SAMM gegeben sind. Somit betrachten wir drei verschiedene Fälle:
Für jeden dieser Fälle wollen wir die Modellparameter $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ kalibrieren. Dabei nehmen wir weiters an, dass das zugrunde liegende Bepreisungsmaß bekannt ist und folglich nicht bestimmt werden muss. Im Fall, dass der Mid-Preis C_i^M durch das MEMM festgelegt wird, minimieren wir die Funktion $f : \mathfrak{P} \to \mathbb{R}^+$ mit

$$f(\mathcal{P}) = f(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, a_{1,2}, a_{2,1}) = \sum_{i=1}^{8} |C^*(K_i, T_i) - C_i^M|^2, \tag{5.6}$$

wobei $C^*(K_i,T_i)$ den theoretischen Call-Preis in einem durch die Parameter $\mathcal{P}$ und das MEMM bestimmten Bepreisungsmodell bezeichnet. Die Gewichte ω_i sind alle gleich eins gewählt und die gesuchten Modellparameter ergeben sich durch Lösen dieses Minimierungsproblems. Im Fall des ESSMM und des SAMM erfolgt die Vorgehensweise analog.

In Abb. 5.1 können wir die Probleme, die sich bei der Minimierung von (5.6) ergeben, deutlich erkennen:



(c)

Abb. 5.1: Die Fehlerfunktion $f(0.3, -0.2, 0.08, 0.14, a_{1,2}, a_{2,1})$ in (a), $f(0.3, -0.2, \sigma_1, \sigma_2, 0.5, 0.25)$ in (b) bzw. $f(\mu_1, \mu_2, 0.08, 0.14, 0.5, 0.25)$ in (c) im Fall des MEMM.

Zum einen ist die Funktion f nicht konvex und folglich ist die geeignete Wahl des Startwerts sehr wichtig, zum anderen besitzt f Bereiche mit sehr kleinem Gradienten. Wir haben die drei Minimierungsprobleme in *Mathematica* 10.0 mit Hilfe der Methode *NMinimize* mit *Accuracy-Goal* ->20 gelöst:

Parameter	μ_1	μ_2	σ_1	σ_2	$a_{1,2}$	$a_{2,1}$
„Wahrer" Wert	0.3	-0.2	0.08	0. 14	0.5	0.25
Kalibrierter Wert - MEMM	0.30688	-0.22290	0.07977	0.14001	0.51301	0.24657
Kalibrierter Wert - ESSMM	0.28326	-0.22832	0.07206	0.14002	0.60421	0.22959
Kalibrierter Wert - SAMM	-	-	0.08000	0.14000	0.50000	0.25000

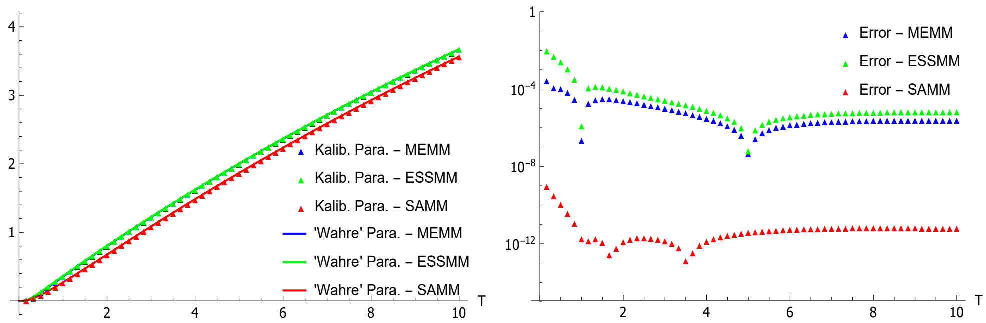
Im Fall des SAMM können die Modellparameter μ_1 und μ_2 nicht aus der Beobachtung realer Optionspreise bestimmt werden. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die charakteristische Funktion des logarithmierten Aktienpreises unter dem SAMM (4.15) von den Trendparametern unabhängig und somit die Funktion f in den Variablen μ_1 und μ_2 konstant ist. Insgesamt resultieren die Fehler:

Fehler	RMSE	ARPE
MEMM	2.41210 E-7	1.83607 E-7
ESSMM	7.01010 E-7	7.52767 E-7
SAMM	9.45170 E-12	3.38846 E-11

Wir wollen nun eine Call-Option mit Strike-Preis $K = 11$ und Laufzeit $T = 5$ bepreisen und erhalten:

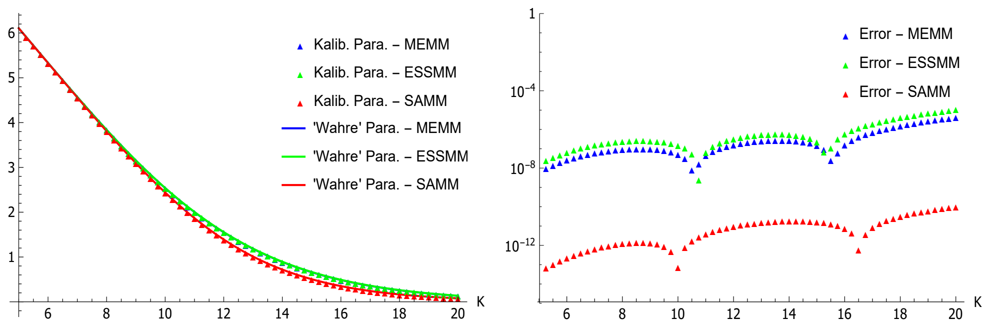
Call-Preis	MEMM	ESSMM	SAMM
„Wahre“ Parameter	2.00139	2.00545	1.86711
Kalibrierte Parameter	2.00139	2.00545	1.86711
Relativer Fehler	4.59443 E-8	6.78818 E-8	4.02095 E-12

Bei der Berechnung der Call-Preise wurde die Methode *NIntegrate* mit *PrecisionGoal* -> 10 verwendet. Wir haben sehr gute Ergebnisse speziell für das SAMM erzielt. Im Fall des SAMM konnten wir nämlich das globale Minimum von f bestimmen.
Im Fall des MEMM bzw. des ESSMM haben wir bei der Bestimmung der Modellparameter nur ein lokales Minimum gefunden. Der bei der Bepreisung der gerade eben betrachteten Option entstehende Fehler bleibt trotzdem in beiden Fällen äußerst gering. Dies liegt auch daran, dass die eben bepreiste Call-Option den am Markt beobachteten Optionen sehr ähnlich ist. Wir bewerten abschließend eine ganze Reihe von europäischen Call-Optionen:



(a) (b)

Abb. 5.2: Preis einer Call-Option mit Strike-Preis $K = 11$ und Laufzeit T bei Wahl der „wahren“ bzw. der kalibrierten Parameter (a) und Darstellung des relativen Fehlers (b).



(a) (b)

Abb. 5.3: Preis einer Call-Option mit Strike-Preis K und Laufzeit $T = 5$ bei Wahl der „wahren“ bzw. der kalibrierten Parameter (a) und Darstellung des relativen Fehlers (b).

Zusammenfassend können wir sagen, dass wir durch Lösen des inversen Problems jeweils ein risikoneutrales Bepreisungsmodell kalibriert haben, das für eine Vielzahl von unterschiedlichen Call-Optionen sehr gut passende Preise liefert. Dabei sollte aber die zu bepreisende Option den Markdaten besonders bezüglich der Laufzeit T ähnlich sein.

Bemerkung. Wie bereits erläutert, ist es bei der numerischen Minimierung von f wichtig, vernünftige Startwerte für die Parameter $\mathcal{P}$ festzulegen. Falls uns zusätzlich zu den Preisen verschiedener Call-Optionen auch noch die Log-Returns der zugrunde liegenden Aktie bekannt sind, können wir dadurch geeignete Startwerte für die Trendparameter μ und die Volatilitätsparameter σ schätzen.

5.2 Schätzung der Modellparameter via einer Markov-Chain-Monte-Carlo-Methode

In diesem Abschnitt wollen wir eine Monte-Carlo-Methode vorstellen, um die uns unbekannten Modellparameter $\mathcal{P} = \{\mu, \sigma, A\}$ aus beobachteten Log-Returns zu schätzen. Dabei gehen wir wie folgt vor:
Zunächst diskretisieren wir den Beobachtungszeitraum $[0, T]$ in N Intervalle der Länge $\Delta t > 0$ und bestimmen für jedes Intervall $[(i-1)\Delta t, i\Delta t]$ mit $i = 1, \dots, N$ den dazugehörenden Log-Return R_i, wobei

$$R_i = \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} \left(\mu_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right) ds + \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} \sigma_s dW_s$$

gilt. Insgesamt sind somit die von uns am Markt beobachteten Daten durch

$$R = (R_i)_{i=1,\dots,N}$$

gegeben. In der Literatur werden neben der folgend beschriebenen Monte-Carlo-Methode auch noch diverse andere Ansätze zur Bestimmung der Modellparameter $\mathcal{P}$ aus beobachteten Log-Returns diskutiert, beispielsweise wird in [20] eine Methode, die auf Schätzung der Momente der Log-Returns basiert, besprochen:
In einem RSM mit d verschiedenen Zuständen müssen $d(d+1)$ Parameter geschätzt werden. Somit müssten auch genau so viele Momente bestimmt werden. In [20] wird ein Algorithmus beschrieben, der mit weniger Momenten auskommt. Dazu betrachten wir das m-te Moment der Log-Returns über Zeitintervalle der Länge $l\Delta t$ und berechnen dann die Schätzer

$$\hat{R}_{m,l} := \frac{1}{\lfloor N/l \rfloor} \sum_{i=1}^{\lfloor N/l \rfloor} (R_{(i-1)l+1} + \cdots + R_{il})^m$$

für $l = 1, \dots, L \ll N$. Anschließend minimieren wir den quadratischen Fehler bezüglich der theoretischen Momente. Diese Methode hat den Nachteil, dass abhängig von der Intensität der Zustandswechsel sehr viele Beobachtungen notwendig sind, um ausreichend gute Ergebnisse bei der Schätzung der Modellparameter zu erzielen.

Im Folgenden werden wir eine Markov-Chain-Monte-Carlo-Methode (MCMCM) diskutieren, um die gesuchten Parameter $\mathcal{P}$ zu bestimmen:

Zunächst approximieren wir die zeitstetige, homogene Markovkette Y durch die zeitdiskrete Markovkette $\dot{Y} = (\dot{Y}_i)_{i=0,\ldots,N}$, wobei

$$\dot{Y}_i := Y_{i\Delta t}.$$

Sämtliche Zustandswechsel von $\dot{Y}$ finden damit ausschließlich zu den Endzeitpunkten unserer Beobachtungsintervalle $[(i-1)\Delta t, i\Delta t]$ mit $i = 1, \ldots, N$ statt. Dadurch sind die von uns am Markt beobachteten Log-Returns $R = (R_i)_{i=1,\ldots,N}$ durch

$$R_i = \langle \mu, \dot{Y}_{i-1} \rangle \Delta t - \frac{1}{2} \langle \sigma, \dot{Y}_{i-1} \rangle^2 \Delta t + \langle \sigma, \dot{Y}_{i-1} \rangle (W_{i\Delta t} - W_{(i-1)\Delta t})$$

gegeben [31]. Für den Fall von nicht zu hohen Übergangsintensitäten stellt diese Diskretisierung eine ausreichend gute Näherung des zeitstetigen Modells dar, mit dem Vorteil, dass wir mit geringerem Rechenaufwand stabile Ergebnisse erhalten [30].
Anstatt der Intensitätsmatrix A betrachten wir nun die entsprechende Übergangsmatrix $P_{\Delta t}$ mit

$$p_{i,j}(\Delta t) = \mathbb{P}(Y_{t+\Delta t} = e_j | Y_t = e_i) = \mathbb{P}(Y_{\Delta t} = e_j | Y_0 = e_i),$$

wobei $P_{\Delta t}$ durch

$$P_{\Delta t} = \exp(\Delta t A)$$

bestimmt ist [3]. Die Wahrscheinlichkeit, den Zustand e_i zu verlassen, ist dann $1 - p_{i,i}(\Delta t)$. Da wir $\dot{Y}$ nicht direkt beobachten können, interpretieren wir die Zufallsvariablen $\dot{Y}_0, \ldots, \dot{Y}_N$ als zu bestimmende Modellparameter und erweitern den Raum $\mathcal{P}$ mit $\dot{Y}$. Weiters ersetzen wir A durch $P_{\Delta t}$. Wir wollen somit die Parameter

$$\mathcal{P} = \{\mu, \sigma, P_{\Delta t}, \dot{Y}\}$$

aus den beobachteten Log-Returns R schätzen. Dafür stellen wir eine Methode vor, die auf dem Metropolis-Hastings-Algorithmus basiert, siehe [27] und [54]:

Algorithmus 5.1. Der Metropolis-Hastings-Algorithmus dient dazu, eine Zufallsstichprobe aus einer beliebigen Wahrscheinlichkeitsverteilung $F(x)$ mit Dichtefunktion $f(x)$ zu simulieren. Wir nehmen dazu an, dass wir eine Funktion $\pi(x)$ kennen, die wir effizient auswerten können und die proportional zu $f(x)$ ist. Wir schreiben dafür

$$f(x) \propto \pi(x).$$

Die Dichte $f(x)$ kann hingegen durch einen Skalierungsfaktor sehr komplex sein. Wir können dann eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\geq 0}$ in Form einer Markovkette, deren stationäre Verteilung durch $f(x)$ gegeben ist, erzeugen. Außerdem bezeichnet $Q(x'|x)$ die sogenannte Proposal-Verteilung und $q(x'|x)$ deren Dichte. Der Algorithmus funktioniert wie folgt:

- Wir wählen einen beliebigen Startwert x_0 mit $\pi(x_0) > 0$.
- Wir simulieren die Zufallsvariable $X_i' \sim Q(x'|x_i)$. Dann wird X_{i+1} gegeben dem Vorgänger x_i durch

  $$X_{i+1} = \begin{cases} X_i' & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \alpha(x_i, X_i') \\ x_i & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \alpha(x_i, X_i') \end{cases}$$

  festgelegt, wobei

  $$\alpha(x, x') = \min\left\{\frac{\pi(x')q(x|x')}{\pi(x)q(x'|x)}, 1\right\}.$$

  Wir bezeichnen $\alpha(x, x')$ als die Akzeptanzwahrscheinlichkeit des in jedem Iterationsschritt neu vorgeschlagenen Proposal-Werts x'.

Bemerkung. Im Fall einer symmetrischen Proposal-Verteilung, wie z.B. der Normalverteilung, haben wir

$$\alpha(x, x') = \min\left\{\frac{\pi(x')}{\pi(x)}, 1\right\}.$$

Die folgenden zwei Sätze nennen Kriterien für die Korrektheit und die Konvergenz der gerade eben skizzierten Monte-Carlo-Methode [54]:

Satz 5.2. Wir bezeichnen mit $\text{supp}(\pi)$ den Träger der Funktion $\pi(x)$, d.h

$$\text{supp}(\pi) = \{x \in \mathbb{R} : \pi(x) \neq 0\}.$$

Angenommen, die Proposal-Dichte $q(x'|x)$ erfüllt die Bedingung

$$\text{supp}(q(\cdot, x)) \supseteq \text{supp}(\pi)$$

für alle $x \in \text{supp}(\pi)$, dann ist f die stationäre Verteilung der durch den Algorithmus 5.1 erzeugten Markovkette.

Beweis. Die durch den Metropolis-Hastings-Algorithmus generierte Markovkette $(X_n)_{n \geq 0}$ wird durch den Markovkern $K(x, x')$ mit

$$K(x, x') = \alpha(x, x')q(x'|x) + (1 - \beta(x))\delta_x(x')$$

beschrieben. Dabei ist $\beta(x) = \int \alpha(x, x')q(x'|x)dx'$. Weiters bezeichnet δ_x das Dirac-Maß. Aus der Definition der Akzeptanzwahrscheinlichkeit $\alpha(x, x')$ folgt

$$\alpha(x, x')q(x'|x)\pi(x) = \alpha(x', x)q(x|x')\pi(x')$$

und

$$(1 - \beta(x))\delta_x(x')\pi(x) = (1 - \beta(x'))\delta_{x'}(x)\pi(x').$$

Insgesamt haben wir $K(x,x')\pi(x) = K(x',x)\pi(x')$, und da $\pi(x)$ proportional zur Dichte $f(x)$ ist, resultiert

$$K(x,x')f(x) = K(x',x)f(x')$$

für alle (x,x'). Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige, meßbare Menge. Da $\int K(x',x)dx = 1$, folgt

$$\int K(x,A)f(x)dx = \int\int_{\mathcal{A}} K(x,x')f(x)dx'dx = \int\int_{\mathcal{A}} K(x',x)f(x')dx'dx = \int_{\mathcal{A}} f(x')dx'.$$

Somit ist durch f die stationäre Verteilung der Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ gegeben. □

Satz 5.3. Sei f die stationäre Verteilung der durch den Metropolis-Hastings-Algorithmus erzeugten Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$. Angenommen, es existieren Zahlen $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$, sodass die Proposal-Dichte

$$q(x'|x) > \varepsilon \quad \text{für} \quad |x - x'| < \delta$$

erfüllt, so gilt

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} h(X_i) = \int h(x)f(x)dx$$

für Funktionen $h(x)$ mit $\int |h(x)f(x)|dx < \infty$ [54].

In diesem Abschnitt werden wir mit dem Metropolis-Hastings-Algorithmus die gemeinsame A-posteriori-Verteilung der Parameter $\mathcal{P}$ gegeben R schätzen. A priori treffen wir dazu die folgenden Verteilungsannahmen [34]:

$$\begin{aligned} \mu_i &\sim \mathcal{N}(m_i, s_i^2), \\ \sigma_i &\sim IG(\alpha_i, \beta_i), \\ (p_{i,1}(\Delta t), \ldots, p_{i,d}(\Delta t)) &\sim Dir(\gamma_{i,1}, \ldots, \gamma_{i,d}), \\ \dot{Y}_0 &\sim U(\{1,\ldots,d\}) \end{aligned} \tag{5.7}$$

für $i = 1,\ldots,d$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{N}(m_i, s_i^2)$ die Normalverteilung mit Mittelwert m_i und Varianz s_i^2, mit $IG(\alpha_i,\beta_i)$ die inverse Gammaverteilung mit Shape-Parameter α_i und Scale-Parameter β_i, mit $Dir(\gamma_{i,1},\ldots,\gamma_{i,d})$ die Dirichlet-Verteilung mit Parametern $\gamma_{i,1},\ldots,\gamma_{i,d}$ und schließlich mit $U(\{1,\ldots,d\})$ die Gleichverteilung auf $\{1,\ldots,d\}$. Außerdem sind diese Verteilungen a priori voneinander unabhängig, d.h.

$$p(\mu,\sigma,P_{\Delta t},\dot{Y}_0) = p(\mu)p(\sigma)p(P_{\Delta t})p(\dot{Y}_0). \tag{5.8}$$

Aufgrund der diskreten Approximation des zeitstetigen Modells ist die Verteilung der Log-Returns R gegeben $\mathcal{P}$ durch die Dichte

$$p(R|\mathcal{P}) = p(R|\mu,\sigma,\dot{Y}) = \prod_{i=1}^{N} p(R_i|\mu,\sigma,\dot{Y}_{i-1}) = \prod_{i=1}^{N} \varphi_{\dot{Y}_{i-1}}(R_i|\bar{\mu},\bar{\sigma}^2) \tag{5.9}$$

bestimmt. Für $e_i \in \mathcal{E}$ bezeichnen wir mit $\varphi_{e_i}(x|\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$ die Dichtefunktion der Normalverteilung mit Mittelwert

$$\bar{\mu}_i = \langle \mu, e_i \rangle \Delta t - \frac{1}{2} \langle \sigma, e_i \rangle^2 \Delta t$$

und Varianz

$$\bar{\sigma}_i^2 = \langle \sigma, e_i \rangle^2 \Delta t.$$

Bemerkung. Die durch den Monte-Carlo-Algorithmus geschätzten Modellparameter können wegen der a priori getroffenen Verteilungsannahmen mit einem Bias behaftet sein. Damit dieser gering bleibt, sollten die Parameter der Verteilungen (5.7) möglichst passend gewählt werden, z.B. können die Parameter m_i und s_i^2 bzw. α_i und β_i aus den Quantilen und der Varianz der beobachteten Log-Returns R grob geschätzt werden, siehe [31]. Dabei soll die Varianz der einzelnen Verteilungen nicht zu klein gewählt werden.

Bemerkung. Ein weiterer in der Literatur ausführlich besprochener Ansatz zur Bestimmung der Modellparameter ist die Maximum-Likelihood-Methode. Die Idee dabei ist, die Likelihood-Funktion

$$\mathcal{L}(\mu, \sigma, P_{\Delta t} | R_1, \ldots, R_N) = p(R_1, \ldots, R_N | \mu, \sigma, P_{\Delta t})$$

bezüglich der gesuchten Parameter μ, σ und $P_{\Delta t}$ zu maximieren. Diese Herangehensweise resultiert aber in einem komplexen Optimierungsproblem, das beispielsweise durch den sogenannten EM-Algorithmus (Expectation-Maximization-Algorithmus) numerisch gelöst werden kann [22].

Aufgrund des Satzes von Bayes und der Annahme (5.8) können wir für die Dichte der gesuchten A-posteriori-Verteilung von $\mathcal{P}$ gegeben R

$$p(\mathcal{P}|R) = \frac{p(\mathcal{P}, R)}{\int p(\mathcal{P}, R) d\mathcal{P}} \tag{5.10}$$

mit

$$p(\mathcal{P}, R) = p(\mu, \sigma, P_{\Delta t}, \dot{Y}, R) = p(\mu)p(\sigma)p(P_{\Delta t})p(\dot{Y}|P_{\Delta t})p(R|\mu, \sigma, \dot{Y}) \tag{5.11}$$

schreiben. Dabei ergibt sich das Problem, dass das Integral $\int p(\mathcal{P}, R)d\mathcal{P}$ schwierig zu berechnen ist [2]. Wir haben aber

$$p(\mathcal{P}|R) \propto p(\mathcal{P}, R)$$

und können die gemeinsame Dichte $p(\mathcal{P}, R)$ relativ leicht auswerten. Dadurch motiviert wollen wir den Metropolis-Hastings-Algorithmus zur Bestimmung der A-posteriori-Verteilung von $\mathcal{P}$ gegeben R verwenden.
Da die Dimension der Dichtefunktion $p(\mathcal{P}|R)$ abhängig von der Anzahl der unterschiedlichen Zustände von Y und der Anzahl der Beobachtungen N ist und somit hoch sein wird, kann es schwierig sein, den eben vorgestellten Metropolis-Hastings-Algorithmus derart umzusetzen, sodass dieser anwendbar ist. Besonders die Wahl einer geeigneten Proposal-Verteilung würde sich als nicht trivial erweisen.
Um dieses Problem zu reduzieren, unterteilen wir $\mathcal{P}$ in mehrere Blöcke und verwenden dann eine adaptierte Methode, den sogenannten Multiple-Block-Metropolis-Hastings-Algorithmus [27].

Algorithmus 5.4. $F(x)$ ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Dichtefunktion $f(x)$. Die Funktion $\pi(x)$ ist wiederum proportional zu $f(x)$. Dann unterteilen wir den Variablenvektor x in $l \geq 2$ Vektorblöcke, d.h. wir können dann

$$x = (x_{(1)}, \ldots, x_{(l)})$$

schreiben und definieren

$$x_{(-i)} = (x_{(1)}, \ldots, x_{(i-1)}, x_{(i+1)}, \ldots, x_{(l)})$$

für $1 \leq i \leq l$. Wir wählen für jeden der l Blöcke eine eigene Proposal-Verteilung, die durch die Dichte

$$q(x'_{(i)}|x_{(i)}, x_{(-i)})$$

bestimmt ist. Die Verteilung des Proposal-Vektors für den i-ten Block $X'_{(i)}$ hängt somit einerseits vom Vorgängerwert des i-ten Blocks $x_{(i)}$ und andererseits auch von den aktuellen Werten der übrigen Blöcke $x_{(-i)}$ ab. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Proposal-Vektor $X'_{(i)}$ akzeptiert wird, ist durch

$$\alpha(x_{(i)}, X'_{(i)}, x_{(-i)}) = \min\left\{\frac{f(X'_{(i)}|x_{(-i)})q(x_{(i)}|X'_{(i)}, x_{(-i)})}{f(x_{(i)}|x_{(-i)})q(X'_{(i)}|x_{(i)}, x_{(-i)})}, 1\right\}$$

gegeben, wobei

$$\begin{aligned} f(x'_{(i)}|x_{(-i)}) &\propto f(x_{(1)}, \ldots, x_{(i-1)}, x'_{(i)}, x_{(i+1)}, \ldots, x_{(l)}) \\ &\propto \pi(x_{(1)}, \ldots, x_{(i-1)}, x'_{(i)}, x_{(i+1)}, \ldots, x_{(l)}). \end{aligned}$$

In unserem Fall unterteilen wir $\mathcal{P}$ in drei Blöcke. Der erste Block ist durch μ und σ, der zweite Block durch $P_{\Delta t}$ und der dritte Block durch $\dot{Y}$ gegeben.

5.2.1 Vorgehensweise für μ und σ

Die gemeinsame A-posteriori-Verteilung von μ und σ gegeben $P_{\Delta t}, \dot{Y}$ und R wird durch die Dichte

$$p(\mu, \sigma|P_{\Delta t}, \dot{Y}, R) = \frac{p(\mu, \sigma, P_{\Delta t}, \dot{Y}, R)}{p(P_{\Delta t}, \dot{Y}, R)} \overset{(5.11)}{\propto} p(\mu)p(\sigma)p(R|\mu, \sigma, \dot{Y})$$

festgelegt. Die Proposal-Vektoren μ' und σ' sind durch

$$\begin{aligned} \mu'_i &= \mu_i + r_\mu \xi_i, \\ \sigma'_i &= |\sigma_i + r_\sigma \zeta_i| \end{aligned}$$

für $i = 1, \ldots, d$ gegeben, wobei $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$ und $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$ beides d-dimensionale Vektoren von unabhängigen, standardnormalverteilten Zufallsvariablen sind [31]. Mit dieser

Wahl können wir auch garantieren, dass der Proposal-Vektor σ' in allen seinen Komponenten stets positiv bleibt. Es erweist sich als geeignet, den Schrittweitenparameter r_μ durch $1-5\%$ der minimalen Differenz zweier adjazenter Einträge des Startvektors μ_0 bzw. den Schrittweitenparameter r_σ durch 1% des maximalen Eintrags von σ_0 festzulegen [31]. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Proposal-Paar (μ', σ') akzeptiert wird, ist dann durch

$$\alpha(\mu, \sigma, \mu', \sigma') = \min \left\{ \frac{p(\mu')p(\sigma')p(R|\mu', \sigma', \dot{Y})}{p(\mu)p(\sigma)p(R|\mu, \sigma, \dot{Y})}, 1 \right\}$$

bestimmt.

Bemerkung. Die von uns betrachtete Monte-Carlo-Methode kann zu einem gravierenden Problem bei der Schätzung der Modellparameter führen, dem sogenannten Label-Switching, siehe z.B. [26] und [38]. Dabei handelt es sich um ein Problem, das aus der nicht trivialen Identifizierbarkeit der unterschiedlichen Zustände der Markovkette Y im Fall einer in ihren Variablen invarianten A-posteriori-Dichte $p(\mathcal{P}|R)$ resultiert. Dies führt dann dazu, dass sich die Randverteilungen der einzelnen Variablen angleichen und wir somit keine Aussage mehr über den Wert der Modellparameter treffen können. Aus diesem Grund schlagen wir für die Wahl eines geeigneten Proposal-Paares (μ', σ') die zusätzliche Akzeptanzbedingung

$$\mu'_1 > \mu'_2 > \cdots > \mu'_d$$

vor [31]. In der Literatur werden aber auch zahlreiche andere Möglichkeiten, um das Problem des Label-Switching zu reduzieren, besprochen, z.B. wird in [38] ein Ansatz diskutiert, der auf zufälliger Permutation der Labels basiert.

5.2.2 Vorgehensweise für $P_{\Delta t}$

Definieren wir

$$N_{i,j}(\dot{Y}) := |\{m \in \{1, \ldots, N\} : \dot{Y}_{m-1} = i \text{ und } \dot{Y}_m = j\}|.$$

Der Maximum-Likelihood-Schätzer für die Übergangsmatrix $P_{\Delta t}$ gegeben $\dot{Y}$ ist dann durch

$$\hat{p}_{i,j}(\Delta t) = \frac{N_{i,j}(\dot{Y})}{N_i(\dot{Y})} \quad \text{mit} \quad N_i(\dot{Y}) = \sum_{j=1}^{d} N_{i,j}(\dot{Y})$$

und $i, j = 1, \ldots, N$ bestimmt [30]. Für die A-posteriori-Dichte von $P_{\Delta t}$ gegeben μ, σ, $\dot{Y}$ und R können wir

$$p(P_{\Delta t}|\mu, \sigma, \dot{Y}, R) \overset{(5.11)}{\propto} p(P_{\Delta t})p(\dot{Y}|P_{\Delta t})$$

schreiben, wobei

$$p(\dot{Y}|P_{\Delta t}) = p(\dot{Y}_0|P_{\Delta t}) \prod_{i,j=1}^{d} p_{i,j}(\Delta t)^{N_{i,j}(\dot{Y})} \propto \prod_{i,j=1}^{d} p_{i,j}(\Delta t)^{N_{i,j}(\dot{Y})}.$$

Da wir angenommen haben, dass die Zeilenvektoren von $P_{\Delta t}$ allesamt einer Dirichlet-Verteilung folgen und voneinander unabhängig sind, erhalten wir insgesamt

$$p(P_{\Delta t}|\mu, \sigma, \dot{Y}, R) \propto \prod_{i,j=1}^{d} p_{i,j}(\Delta t)^{\gamma_{i,j}+N_{i,j}(\dot{Y})-1}.$$

Somit ist die A-posteriori-Dichte von $(p_{i,1}(\Delta t), \ldots, p_{i,d}(\Delta t))$ gegeben $\dot{Y}$ proportional zur Dichte der folgenden Dirichlet-Verteilung

$$Dir(\gamma_{i,1} + N_{i,1}(\dot{Y}), \ldots, \gamma_{i,d} + N_{i,d}(\dot{Y}))$$

für $i = 1, \ldots, d$. Wählen wir den speziellen Fall, dass die Proposal-Verteilung $Q(P'_{\Delta t}|P_{\Delta t}, \dot{Y})$ durch

$$(p'_{i,1}(\Delta t), \ldots, p'_{i,d}(\Delta t)) \sim Dir(\gamma_{i,1} + N_{i,1}(\dot{Y}), \ldots, \gamma_{i,d} + N_{i,d}(\dot{Y}))$$

für $i = 1, \ldots, d$ bestimmt ist. Dann sind die Zeilenvektoren von $P'_{\Delta t}$ wiederum voneinander unabhängig [26] und für die Akzeptanzwahrscheinlichkeit der Proposal-Matrix $P'_{\Delta t}$ folgt

$$\alpha(P_{\Delta t}, P'_{\Delta t}) = \min\left\{\frac{p(P'_{\Delta t})p(\dot{Y}|P'_{\Delta t})q(P_{\Delta t}|P'_{\Delta t}, \dot{Y})}{p(P_{\Delta t})p(\dot{Y}|P_{\Delta t})q(P'_{\Delta t}|P_{\Delta t}, \dot{Y})}, 1\right\} = 1,$$

d.h. $P'_{\Delta t}$ wird in jedem Iterationsschritt des Metropolis-Hastings-Algorithmus akzeptiert.

Bemerkung. In unserem zeitdiskreten Ansatz haben wir die gesuchte Intensitätsmatrix A durch die entsprechende Übergangsmatrix $P_{\Delta t}$ ersetzt, um diese durch die eben vorgestellte Monte-Carlo-Methode zu bestimmen. Dabei ergibt sich das folgende Problem: Für eine Übergangsmatrix $P_{\Delta t}$ muss es im Allgemeinen keine Matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mit

$$a_{i,j} \geq 0 \quad \text{für } i \neq j, \quad a_{i,i} = -\sum_{j \neq i} a_{i,j} < 0$$

geben, sodass $P_{\Delta t} = \exp(\Delta t A)$. D.h., es muss kein entsprechender infinitesimaler Generator A existieren. Gibt es aber einen Generator A, so muss A nicht eindeutig bestimmt sein [36]. Um dieses Problem zu vermeiden, fordern wir in jedem Iterationsschritt, dass für die Matrix $P'_{\Delta t}$ ein entsprechender, eindeutig bestimmter Generator existiert [31].

5.2.3 Vorgehensweise für $\dot{Y}$

Wählen wir wiederum den Fall, dass die Dichte der Proposal-Verteilung von $\dot{Y}'$ proportional zur A-posteriori-Dichte

$$p(\dot{Y}|\mu, \sigma, P_{\Delta t}, R)$$

ist. Dann wird der Proposal-Vektor $\dot{Y}'$ in jedem Iterationsschritt mit Wahrscheinlichkeit 1 akzeptiert. Um $\dot{Y}'$ zu simulieren, verwenden wir den sogenannten Forward-Filtering-Backward-Sampling-Algorithmus, siehe [26] und [30]. Sei

$$\bar{R}_i := \{R_1, \ldots, R_i\}$$

für $i = 0, \dots, N$ mit $\bar{R}_0 := \emptyset$. Damit ist $R = \bar{R}_N$. Für $e_k, e_l \in \mathcal{E}$ berechnen wir ausgehend von

$$p(\dot{Y}_0 = e_k | \mu, \sigma, P_{\Delta t}, \bar{R}_0) = p(\dot{Y}_0 = e_k) = \frac{1}{d}$$

die Forward-Wahrscheinlichkeiten

$$p(\dot{Y}_i = e_l | \mu, \sigma, P_{\Delta t}, \bar{R}_i) = \sum_{k=1}^{d} p(\dot{Y}_i = e_l | \mu, \sigma, P_{\Delta t}, \dot{Y}_{i-1} = e_k, \bar{R}_i) p(\dot{Y}_{i-1} = e_k | \mu, \sigma, P_{\Delta t}, \bar{R}_i)$$

für $i = 1, \dots, N$, wobei

$$\begin{aligned} p(\dot{Y}_i = e_l | \mu, \sigma, P_{\Delta t}, \dot{Y}_{i-1} = e_k, \bar{R}_i) &\propto p(\mu, \sigma, P_{\Delta t}, \dot{Y}_{i-1} = e_k, \dot{Y}_i = e_l, \bar{R}_i) \\ &= p(\dot{Y}_i = e_l | P_{\Delta t}, \dot{Y}_{i-1} = e_k) p(\mu, \sigma, P_{\Delta t}, \dot{Y}_{i-1} = e_k, \bar{R}_i) \\ &\propto p(\dot{Y}_i = e_l | P_{\Delta t}, \dot{Y}_{i-1} = e_k) = p_{k,l}(\Delta t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} p(\dot{Y}_{i-1} = e_k | \mu, \sigma, P_{\Delta t}, \bar{R}_i) &\propto p(\mu, \sigma, P_{\Delta t}, \dot{Y}_{i-1} = e_k, \bar{R}_i) \\ &= p(R_i | \mu, \sigma, \dot{Y}_{i-1} = e_k) p(\mu, \sigma, P_{\Delta t}, \dot{Y}_{i-1} = e_k, \bar{R}_{i-1}) \\ &= p(R_i | \mu, \sigma, \dot{Y}_{i-1} = e_k) p(\dot{Y}_{i-1} = e_k | \mu, \sigma, P_{\Delta t}, \bar{R}_{i-1}) p(\mu, \sigma, P_{\Delta t}, \bar{R}_{i-1}) \\ &\propto p(R_i | \mu, \sigma, \dot{Y}_{i-1} = e_k) p(\dot{Y}_{i-1} = e_k | \mu, \sigma, P_{\Delta t}, \bar{R}_{i-1}). \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die Rekursionsgleichung

$$p(\dot{Y}_i = e_l | \mu, \sigma, P_{\Delta t}, \bar{R}_i) \propto \sum_{k=1}^{d} p_{k,l}(\Delta t) \varphi_{e_k}(R_i | \bar{\mu}, \bar{\sigma}^2) p(\dot{Y}_{i-1} = e_k | \mu, \sigma, P_{\Delta t}, \bar{R}_{i-1}).$$

Nun zum zweiten Schritt des Algorithmus, dem Backward-Sampling: Wir simulieren zunächst die Zufallsvariable $\dot{Y}'_N$, deren Verteilung durch die eben bestimmte Forward-Wahrscheinlichkeitsfunktion $p(\dot{Y}_N | \mu, \sigma, P_{\Delta t}, R)$ gegeben ist. Dann generieren wir die Zufallsvariable $\dot{Y}_i$ gemäß der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p(\dot{Y}_i | \mu, \sigma, P_{\Delta t}, \dot{Y}_{i+1}, R)$$

für $i = N-1, \dots, 0$. Seien $e_k, e_l \in \mathcal{E}$. Da $\dot{Y}_i$ gegeben $\dot{Y}_{i+1}$ unabhängig von $R_{i+2}, \dots, R_N$ ist, haben wir

$$\begin{aligned} p(\dot{Y}_i = e_l | \mu, \sigma, P_{\Delta t}, \dot{Y}_{i+1} = e_k, R) &= p(\dot{Y}_i = e_l | \mu, \sigma, P_{\Delta t}, \dot{Y}_{i+1} = e_k, \bar{R}_{i+1}) \\ &\propto p(\mu, \sigma, P_{\Delta t}, \dot{Y}_i = e_l, \dot{Y}_{i+1} = e_k, \bar{R}_{i+1}) \\ &= p(\dot{Y}_{i+1} = e_k | P_{\Delta t}, \dot{Y}_i = e_l) p(\mu, \sigma, P_{\Delta t}, \dot{Y}_i = e_l, \bar{R}_{i+1}) \\ &= p_{l,k}(\Delta t) p(R_{i+1} | \mu, \sigma, \dot{Y}_i = e_l) p(\mu, \sigma, P_{\Delta t}, \dot{Y}_i = e_l, \bar{R}_i) \\ &\propto p_{l,k}(\Delta t) \varphi_{e_l}(R_{i+1} | \bar{\mu}, \bar{\sigma}^2) p(\dot{Y}_i = e_l | \mu, \sigma, P_{\Delta t}, \bar{R}_i). \end{aligned}$$

Bemerkung. Die Bestimmung des gesamten Proposal-Vektors $\dot{Y}'$ in jedem Iterationsschritt des Metropolis-Hastings-Algorithmus erweist sich als laufzeitintensiv. Wir müssen nämlich pro Iterationsschritt $N \times d$ normalverteilte und $N + 1$ gleichverteilte Zufallsvariablen erzeugen. In der später umgesetzten Monte-Carlo-Simulation werden wir deshalb nur den zufällig gewählten Block $\dot{Y}_{t_1}, \ldots, \dot{Y}_{t_2}$ mit

$$t_1 := \max\left\{t_m - \left\lfloor \frac{N}{20} L \right\rfloor, 0\right\}, \quad t_2 := \min\left\{t_m + \left\lfloor \frac{N}{20} L \right\rfloor, N\right\}$$

updaten. Dabei ist die Zufallsvariable t_m auf der Menge $\{0, \ldots, N\}$ gleichverteilt und L mit Parameter 1 exponentialverteilt. Somit werden pro Schritt durchschnittlich nicht mehr als 10% des Vektors $\dot{Y}$ aktualisiert.

Bemerkung. Weiters müssen wir auch den Diskretisierungsparameter Δt geeignet wählen, d.h. je größer die Übergangsintensitäten der Markovkette Y sind, desto kleiner sollte Δt gewählt werden. Dies kann aber zu Problemen führen: Einerseits müssen entsprechende Marktdaten nicht zur Verfügung stehen, andererseits kann ein sehr kleines Δt zu instabilen Ergebnissen bei der Monte-Carlo-Simulation führen [30].

5.2.4 Numerisches Beispiel

Betrachten wir ein RSM mit $d = 2$ Zuständen. Wir nehmen dabei an, dass das Modell einen Bear- und einen Bull-Zustand beinhaltet. Die Modellparameter sind wie in Modellbeispiel 1.2 gegeben. Sämtliche Berechnungen wurden in Wolfram *Mathematica* 10.0 durchgeführt.
Im Folgenden stehen $M = 20$ Datensätze von simulierten Log-Returns R zur Verfügung. Der Umfang eines jeden Datensatzes ist durch

$$T = 30, \quad \Delta t = 1/365, \quad N = 10950$$

bestimmt. Wir ersetzen die Intensitätsmatrix A durch die entsprechende Übergangsmatrix $P_{\Delta t}$ und werden die Modellparameter

$$\mathcal{P} = \{\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, p_{1,2}(\Delta t), p_{2,1}(\Delta t)\}$$

durch die vorhin diskutierte MCMCM aus den simulierten Log-Returns schätzen. Die Anzahl der pro Datensatz durchgeführten Iterationen sei 25000. Da die resultierende Zufallsstichprobe per Konstruktion zunächst von den Startwerten abhängt, streichen wir die ersten 15000 Werte, um stabilere Ergebnisse zu erhalten. Die von uns a priori angenommenen Verteilungen sind durch

$$\mu_1 \sim \mathcal{N}(0.25, 0.02), \quad \mu_2 \sim \mathcal{N}(-0.25, 0.02),$$
$$\sigma_1 \sim IG(6, 0.5), \quad \sigma_2 \sim IG(6, 1),$$
$$(p_{1,1}(\Delta t), p_{1,2}(\Delta t)) \sim Dir(9.99, 0.01), \quad (p_{2,1}(\Delta t), p_{2,2}(\Delta t)) \sim Dir(0.01, 9.99)$$

gegeben. Um das Problem des Label-Switching zu reduzieren, haben wir für das Paar (μ', σ') die zusätzlichen Akzeptanzbedingungen

$$\mu_1' > \mu_2' \quad \text{und} \quad \sigma_1' < \sigma_2'$$

verwendet. In der durchgeführten Monte-Carlo-Simulation wurden in etwa 25% der Proposal-Paare (μ', σ') akzeptiert. Dabei haben wir die Resultate

Parameter	μ_1	μ_2	σ_1	σ_2	$p_{1,2}(\Delta t)$	$p_{2,1}(\Delta t)$
„Wahrer“ Wert	0.3	-0.2	0.08	0. 14	1.36846 E-3	6.84228 E-4
Mittelwert	0.30001	-0.21709	0.07995	0.14004	1.50667 E-3	7.98454 E-4
Std. Abw.	0.03185	0.04572	0.00134	0.00163	1.03096 E-3	5.43350 E-4

erhalten. Die Bestimmung der Übergangswahrscheinlichkeiten stellt bei der Umsetzung der Monte-Carlo-Methode eine besonders schwierige Herausforderung dar. Dies spiegelt sich in der verhältnismäßig großen Standardabweichung der simulierten Werte wider. Die entsprechende Intensitätsmatrix ist durch

Parameter	$a_{1,2}$	$a_{2,1}$
„Wahrer“ Wert	0.5	0.25
Geschätzter Wert	0.55057	0.29177

gegeben. Somit erzielen wir bei der Schätzung der gesuchten Modellparameter $\mathcal{P}$ aus den simulierten Log-Returns R sehr zufriedenstellende Ergebnisse. Dies können wir auch in den folgenden Abbildungen erkennen:

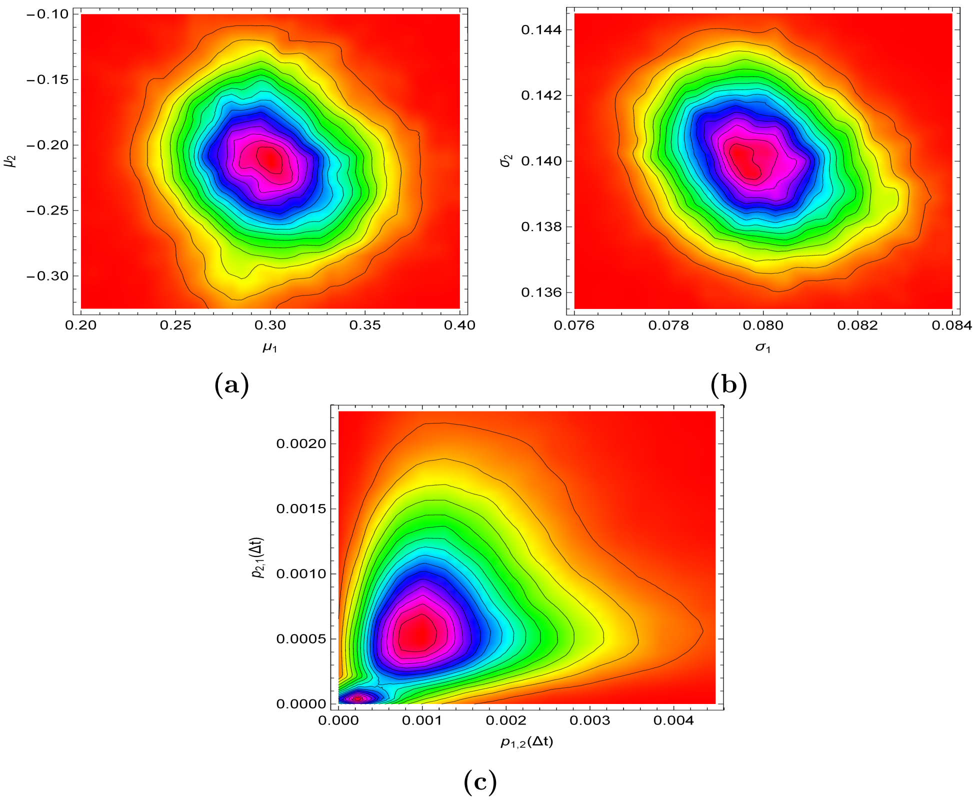


Abb. 5.4: Simulierte gemeinsame A-posteriori-Dichte von μ_1 und μ_2 (a), σ_1 und σ_2 (b) bzw. $p_{1,2}(\Delta t)$ und $p_{2,1}(\Delta t)$ (c).

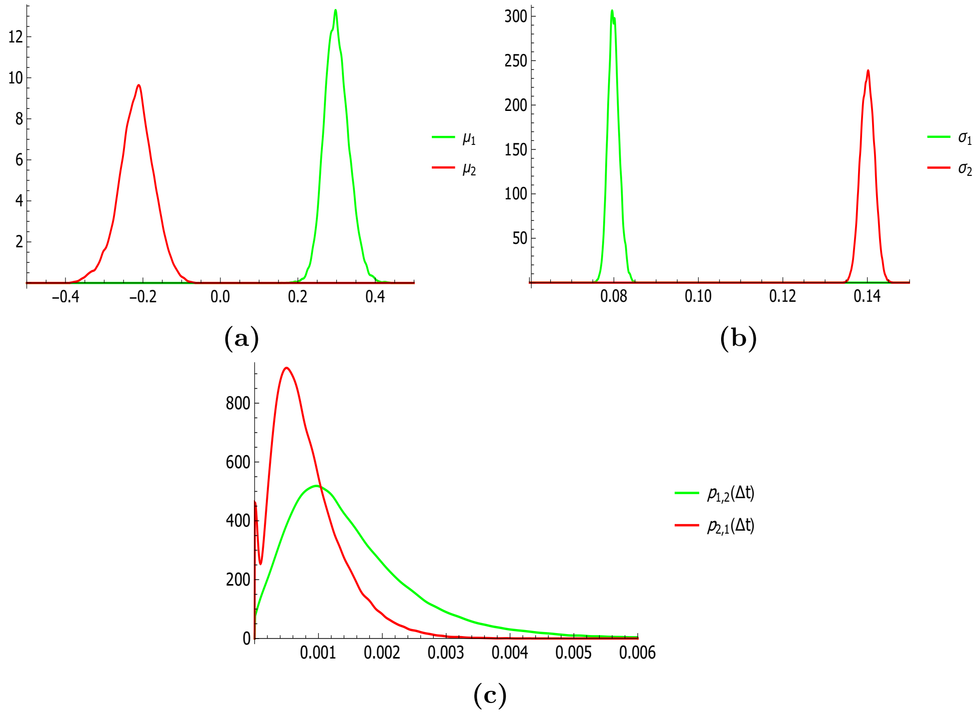


Abb. 5.5: Simulierte A-posteriori-Randdichte von μ_1 und μ_2 (a), σ_1 und σ_2 (b) bzw. $p_{1,2}(\Delta t)$ und $p_{2,1}(\Delta t)$ (c).

Abschließend werden wir mit den eben geschätzten Modellparametern europäische Call-Optionen mit Strike-Preis K und Laufzeit T bewerten. Zunächst ist $K = 11$ und $T = 5$:

Call-Preis	MEMM	ESSMM	SAMM
„Wahre“ Parameter	2.00139	2.00545	1.86711
Geschätzte Parameter	1.99954	2.00507	1.86550
Relativer Fehler	9.23966 E-4	1.92149 E-4	8.62703 E-4

Bewerten wir eine ganze Reihe von Call-Optionen, so ergibt sich:

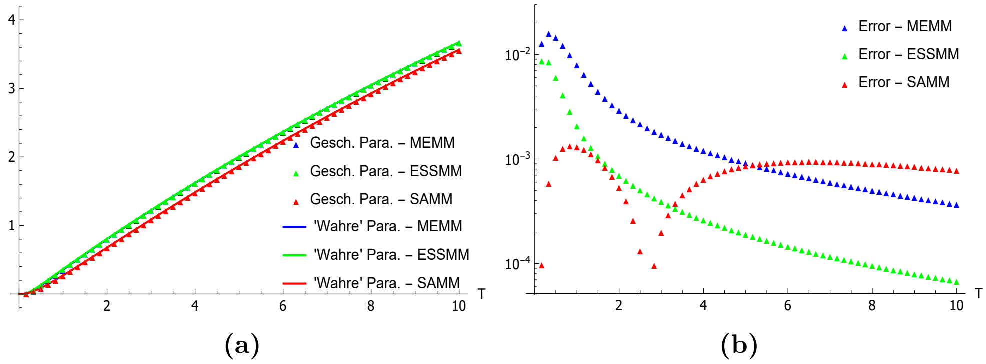
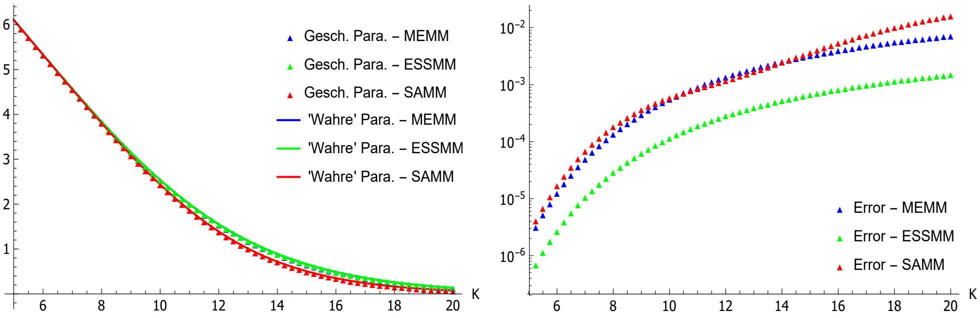


Abb. 5.6: Preis einer Call-Option mit Strike-Preis $K = 11$ und Laufzeit T bei Wahl der „wahren“ bzw. der geschätzten Parameter (a) und Darstellung des relativen Fehlers (b).



(a) **(b)**

Abb. 5.7: Preis einer Call-Option mit Strike-Preis K und Laufzeit $T = 5$ bei Wahl der „wahren“ bzw. der geschätzten Parameter (a) und Darstellung des relativen Fehlers (b).

Bei der Berechnung der Call-Preise wurde die Methode *NIntegrate* mit *PrecisionGoal* -> 10 verwendet.

Zusammenfassend können wir feststellen, dass es uns gelungen ist, durch eine MCMCM die unbekannten Modellparameter $\mathcal{P}$ aus gegebenen Log-Returns R derart zu bestimmen, sodass der bei der Bepreisung von europäischen Call-Optionen resultierende relative Fehler gering bleibt.
Wir können in Abb. 5.6 bzw. Abb. 5.7 erkennen, dass der relative Fehler bei der Bewertung von Optionen mit kürzer werdender Laufzeit T bzw. mit größer werdendem Strike-Preis K zunimmt.

A Verteilungseigenschaften

A.1 Erwartungswert der Zufallsvariable $\mathrm{e}^{\alpha R_t}$

Wir wollen hier den Erwartungswert von $\mathrm{e}^{\alpha R_t}$ berechnen, wobei $R_t := \int_0^t \beta_s ds + \int_0^t \gamma_s dW_s$ mit

$$\beta_t = \langle \beta, Y_t \rangle, \quad \gamma_t = \langle \gamma, Y_t \rangle$$

und $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d)^T \in \mathbb{C}^d$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)^T \in \mathbb{C}^d$. Weiters ist $\alpha \in \mathbb{R}$ und die Notation ist Kapitel 1 entnommen. Wir kennen die Verteilungseigenschaft

$$\int_0^t \mathrm{Re}(\beta_s) ds + \int_0^t \mathrm{Re}(\gamma_s) dW_s \Big| \mathcal{F}_t^Y \sim \mathcal{N}\Big(\int_0^t \mathrm{Re}(\beta_s) ds, \int_0^t \mathrm{Re}(\gamma_s)^2 ds\Big), \tag{A.1}$$

wobei $\mathrm{Re}(\cdot)$ den Realteil bezeichnet. Sei $u \leq t$ und $e_i, e_j \in \mathcal{E}$. Dann definieren wir die Funktion

$$\varphi_{i,j}(u,t) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\mathrm{e}^{\alpha(R_t - R_u)} 1_{\{Y_t = e_j\}} \Big| Y_u = e_i\Big].$$

Aufgrund der Markoveigenschaft von Y und den unabhängigen Zuwächsen von W ergibt sich

$$\begin{aligned}
\varphi_{i,j}(u, t+\Delta t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\mathrm{e}^{\alpha(R_t - R_u)} \mathrm{e}^{\alpha(R_{t+\Delta t} - R_t)} 1_{\{Y_{t+\Delta t} = e_j\}} \Big| Y_u = e_i\Big] \\
&= \sum_{k=1}^d \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\mathrm{e}^{\alpha(R_t - R_u)} 1_{\{Y_t = e_k\}} \mathrm{e}^{\alpha(R_{t+\Delta t} - R_t)} 1_{\{Y_{t+\Delta t} = e_j\}} \Big| Y_u = e_i\Big] \\
&= \sum_{k=1}^d \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\mathrm{e}^{\alpha(R_t - R_u)} 1_{\{Y_t = e_k\}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\mathrm{e}^{\alpha(R_{t+\Delta t} - R_t)} 1_{\{Y_{t+\Delta t} = e_j\}} \Big| \mathcal{G}_t\Big] \Big| Y_u = e_i\Big] \\
&= \sum_{k=1}^d \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\mathrm{e}^{\alpha(R_t - R_u)} 1_{\{Y_t = e_k\}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\mathrm{e}^{\alpha(R_{t+\Delta t} - R_t)} 1_{\{Y_{t+\Delta t} = e_j\}} \Big| Y_t = e_k\Big] \Big| Y_u = e_i\Big] \\
&= \sum_{k=1}^d \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\mathrm{e}^{\alpha(R_t - R_u)} 1_{\{Y_t = e_k\}} \Big| Y_u = e_i\Big] \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\mathrm{e}^{\alpha(R_{t+\Delta t} - R_t)} 1_{\{Y_{t+\Delta t} = e_j\}} \Big| Y_t = e_k\Big].
\end{aligned}$$

Da die Wahrscheinlichkeit, dass Y in einem Zeitintervall der Länge Δt zumindest zweimal den Zustand wechselt, $\mathrm{o}(\Delta t)$ ist und

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\Big|\mathrm{e}^{\alpha(R_{t+\Delta t} - R_t)}\Big|\Big] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\exp\Big(\int_t^{t+\Delta t} \alpha\, \mathrm{Re}(\beta_s) ds + \int_t^{t+\Delta t} \alpha\, \mathrm{Re}(\gamma_s) dW_s\Big)\Big] \\
&\overset{(A.1)}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\exp\Big(\int_t^{t+\Delta t} \alpha\, \mathrm{Re}(\beta_s) + \frac{1}{2}\alpha^2\, \mathrm{Re}(\gamma_s)^2 ds\Big)\Big] \leq 1 + c_\alpha \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)
\end{aligned}$$

für $c_\alpha \in \mathbb{R}$ und $\Delta t \to 0$ gilt, reicht es, die Situation zu betrachten, in der kein Zustandswechsel bzw. genau ein Zustandswechsel stattfindet. Sei Z eine reelle Zufallsvariable mit $Z \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$. Somit erhalten wir, falls $j = k$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\mathrm{e}^{\alpha(R_{t+\Delta t}-R_t)}1_{\{Y_{t+\Delta t}=e_j\}}\Big|Y_t = e_j\Big] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{e}^{\alpha\beta_j\Delta t+\alpha\gamma_j Z}\right](1 + a_{j,j}\Delta t) + \mathrm{o}(\Delta t)\\
&= \exp\left(\alpha\beta_j\Delta t + \frac{1}{2}\alpha^2\gamma_j^2\Delta t\right)(1 + a_{j,j}\Delta t) + \mathrm{o}(\Delta t)\\
&= \left(1 + \alpha\beta_j\Delta t + \frac{1}{2}\alpha^2\gamma_j^2\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)\right)(1 + a_{j,j}\Delta t) + \mathrm{o}(\Delta t)\\
&= 1 + \alpha\beta_j\Delta t + \frac{\alpha^2\gamma_j^2}{2}\Delta t + a_{j,j}\Delta t + \mathrm{o}(\Delta t).
\end{aligned}$$

Analog können wir im Fall $j \neq k$ zeigen, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\mathrm{e}^{\alpha(R_{t+\Delta t}-R_t)}1_{\{Y_{t+\Delta t}=e_j\}}\Big|Y_t = e_k\Big] &= (1 + \mathcal{O}(\Delta t))a_{k,j}\Delta t + \mathrm{o}(\Delta t)\\
&= a_{k,j}\Delta t + \mathrm{o}(\Delta t)
\end{aligned}$$

für $\Delta t \to 0$. Daraus ergibt sich

$$\varphi_{i,j}(u, t + \Delta t) = \varphi_{i,j}(u, t)\left(1 + \alpha\beta_j\Delta t + \frac{\alpha^2\gamma_j^2}{2}\Delta t + a_{j,j}\Delta t\right) + \sum_{k\neq j}\varphi_{i,k}(u, t)a_{k,j}\Delta t + \mathrm{o}(\Delta t)$$

für $\Delta t \to 0$. Somit erfüllt die Funktion $\varphi_{i,j}(u, t)$ für $i, j = 1, \ldots, d$ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_{i,j}(u, t) = \varphi_{i,j}(u, t)\left(\alpha\beta_j + \frac{\alpha^2\gamma_j^2}{2}\right) + \sum_{k=1}^{d}\varphi_{i,k}(u, t)a_{k,j}, \quad \varphi_{i,j}(u, u) = 1_{\{i=j\}}. \tag{A.2}$$

Betrachten wir die beiden Matrizen $\Phi(u, t) = (\varphi_{i,j}(u, t))_{i,j=1,\ldots,d}$ und

$$K(\alpha) = A + \mathrm{diag}\left(\alpha\beta_1 + \frac{\alpha^2\gamma_1^2}{2}, \ldots, \alpha\beta_d + \frac{\alpha^2\gamma_d^2}{2}\right).$$

Dann lässt sich das System von Gleichungen aus (A.2) als Matrixdifferentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(u, t) = \Phi(u, t)K(\alpha), \quad \Phi(u, u) = I$$

schreiben. Ihre Lösung ist durch die Matrix

$$\Phi(u, t) = \exp((t - u)K(\alpha)) = \sum_{k\geq 0}\frac{(t - u)^k}{k!}K(\alpha)^k$$

mit (i, j)-ten Eintrag

$$\varphi_{i,j}(u, t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\mathrm{e}^{\alpha(R_t-R_u)}1_{\{Y_t=e_j\}}\Big|Y_u = e_i\Big] = \exp((t - u)K(\alpha))_{i,j}$$

gegeben. Wir schreiben $\mathbb{1}$ für den Einsvektor in $\mathbb{R}^d$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{e}^{\alpha(R_t-R_u)}\middle|Y_u\right] &= \sum_{i=1}^{d}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{e}^{\alpha(R_t-R_u)}\middle|Y_u=e_i\right]1_{\{Y_u=e_i\}}\\ &= \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{e}^{\alpha(R_t-R_u)}1_{\{Y_t=e_j\}}\middle|Y_u=e_i\right]1_{\{Y_u=e_i\}}\\ &= \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\varphi_{i,j}(u,t)1_{\{Y_u=e_i\}} = Y_u^T\exp((t-u)K(\alpha))\mathbb{1}. \qquad (A.3)\end{aligned}$$

Sei π_0 die Startverteilung von Y und $\alpha \in \mathbb{R}$. Mit $R_0 = 0$ erhalten wir

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{e}^{\alpha R_t}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{e}^{\alpha(R_t-R_0)}\middle|Y_0\right]\right] = \pi_0^T\exp(tK(\alpha))\mathbb{1}. \qquad (A.4)$$

A.2 Momentenerzeugende Funktion der Zufallsvariable N_t

Die Notation ist Kapitel 1 und Kapitel 2.1 entnommen. Wir bestimmen die momentenerzeugende Funktion für

$$N_t := \sum_{(i,j)\in E} N_t^{i,j},$$

wobei N_t die Gesamtanzahl an Zustandswechsel der homogenen Markovkette Y bis zum Zeitpunkt t beschreibt [45]. Die Startverteilung von Y ist π_0, $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$\varphi_{i,j}(t) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{e}^{\alpha N_t}1_{\{Y_t=e_j\}}\middle|Y_0=e_i\right]$$

für $e_i, e_j \in \mathcal{E}$. Sei $a' := \max_{i=1,\dots,d}|a_{i,i}| > 0$. Die Verweildauer $T_n = \tau_n - \tau_{n-1}$ im Zustand Z_{n-1} ist exponentialverteilt mit Parameter $|a_{Z_{n-1},Z_{n-1}}|$ und damit ist

$$T_n' := T_n\frac{|a_{Z_{n-1},Z_{n-1}}|}{a'} \le T_n$$

exponentialverteilt mit Parameter a'. Somit ist $(T_n')_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängig, identisch verteilten Zufallsvariablen und der dazugehörige Zählprozess $(N_t')_{t\in\mathcal{T}}$ ist ein Poissonprozess mit Parameter a'. Da per Konstruktion $N_t \le N_t'$, ist

$$\mathbb{P}(N_t \ge n) \le \mathbb{P}(N_t' \ge n) \qquad (A.5)$$

für $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Daraus ergibt sich auch die Existenz von $\varphi_{i,j}(t)$. Genau wie in Kapitel A.1 können wir hier zeigen, dass

$$\begin{aligned}\varphi_{i,j}(t+\Delta t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{e}^{\alpha N_{t+\Delta t}}1_{\{Y_{t+\Delta t}=e_j\}}\middle|Y_0=e_i\right]\\ &= \sum_{k=1}^{d}\varphi_{i,k}(t)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{e}^{\alpha(N_{t+\Delta t}-N_t)}1_{\{Y_{t+\Delta t}=e_j\}}\middle|Y_t=e_k\right].\end{aligned}$$

Falls $n \geq 2$ Zustandswechsel im Intervall $(t, t + \Delta t]$ auftreten, erhalten wir mit (A.5) für den Erwartungswert

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\mathrm{e}^{\alpha(N_{t+\Delta t}-N_t)}1_{\{Y_{t+\Delta t}=e_j\}}1_{\{N_{t+\Delta t}-N_t\geq 2\}}\Big|Y_t = e_k\Big] \\
&\leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\mathrm{e}^{\alpha(N_{t+\Delta t}-N_t)}1_{\{N_{t+\Delta t}-N_t\geq 2\}}\Big|Y_t = e_k\Big] \\
&= \sum_{n\geq 2} \mathrm{e}^{\alpha n}\mathbb{P}(N_{t+\Delta t} - N_t = n|Y_t = e_k) \\
&\leq \sum_{n\geq 2} \mathrm{e}^{\alpha n}\mathbb{P}(N_{\Delta t} - N_0 \geq n|Y_0 = e_k) \\
&\leq \sum_{n\geq 2} \mathrm{e}^{\alpha n} \sum_{k\geq 0} \mathrm{e}^{-a'\Delta t}\frac{(a'\Delta t)^{n+k}}{(n+k)!} \\
&\leq \sum_{n\geq 2} \mathrm{e}^{\alpha n}(a'\Delta t)^n \mathrm{e}^{-a'\Delta t}\sum_{k\geq 0}\frac{(a'\Delta t)^k}{k!} \\
&= \sum_{n\geq 2} \mathrm{e}^{\alpha n}(a'\Delta t)^n \in \mathcal{O}(\Delta t^2)
\end{aligned}$$

für $\Delta t \to 0$. Dabei muss Δt so gewählt sein, dass die Bedingung $|\mathrm{e}^{\alpha}a'\Delta t| < 1$ erfüllt ist. Somit ergibt sich im Fall $j = k$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\mathrm{e}^{\alpha(N_{t+\Delta t}-N_t)}1_{\{Y_{t+\Delta t}=e_j\}}\Big|Y_t = e_j\Big] = (1 + a_{j,j}\Delta t) + \mathrm{o}(\Delta t)$$

bzw. analog dazu, falls $j \neq k$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\mathrm{e}^{\alpha(N_{t+\Delta t}-N_t)}1_{\{Y_{t+\Delta t}=e_j\}}\Big|Y_t = e_k\Big] = \mathrm{e}^{\alpha}a_{k,j}\Delta t + \mathrm{o}(\Delta t)$$

für $\Delta t \to 0$. Daraus resultiert

$$\varphi_{i,j}(t + \Delta t) = \varphi_{i,j}(t)(1 + a_{j,j}\Delta t) + \sum_{k\neq j}\varphi_{i,k}(t)\mathrm{e}^{\alpha}a_{k,j}\Delta t + \mathrm{o}(\Delta t)$$

für $\Delta t \to 0$. Somit erfüllt die Funktion $\varphi_{i,j}(t)$ für $i, j = 1, \ldots, d$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\varphi_{i,j}(t) = \varphi_{i,j}(t)a_{j,j} + \sum_{k\neq j}\varphi_{i,k}(t)\mathrm{e}^{\alpha}a_{k,j}, \quad \varphi_{i,j}(0) = 1_{\{i=j\}},$$

wobei sich dieses System von Gleichungen für $\Phi(t) = (\varphi_{i,j}(t))_{i,j=1,\ldots,d}$ auch als Matrixgleichung

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \Phi(t)\left(A_J\mathrm{e}^{\alpha} + A_S\right), \quad \Phi(0) = I \tag{A.6}$$

mit

$$A_J = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \ldots & a_{1,d} \\ a_{2,1} & 0 & \ldots & a_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1} & a_{d,2} & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad A_S = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{d,d} \end{pmatrix}$$

schreiben lässt. Als Lösung der Gleichung (A.6) erhalten wir

$$\Phi(t) = \exp(t\,(A_J \mathrm{e}^{\alpha} + A_S)).$$

Folglich ist die momentenerzeugende Funktion von N_t durch

$$\varphi_{N_t}(\alpha) = \pi_0^T \exp(t\,(A_J \mathrm{e}^{\alpha} + A_S))\mathbb{1} \tag{A.7}$$

bestimmt.

Bemerkung. Das $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-Martingal $M^{i,j}$ aus (2.2) erfüllt wegen $N_t^{i,j} \leq N_t'$ die Bedingung

$$\sup_{t\in\tau} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(M_t^{i,j})^2] \leq \sup_{t\in\tau} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(N_t^{i,j})^2 + (a't)^2] \leq \sup_{t\in\tau} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[N_t'^2 + (a't)^2] < \infty$$

für $t \in \tau$ und $(i, j) \in E$. Somit ist $M^{i,j}$ quadratintegrierbar.

B Stochastische Grundlagen

Im Folgenden ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration, die die üblichen Bedingungen erfüllt. Weiters bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^2_M$ den Raum aller quadrat-integrierbaren $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-Martingale $M = (M_t)_{t\geq 0}$ mit $M_0 = 0$.

Proposition B.1. Sei X eine integrierbare Zufallsvariable und $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}$ zwei σ-Algebren. Falls $\sigma(\sigma(X), \mathcal{F}_1)$ unabhängig von $\mathcal{F}_2$ ist, haben wir

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|\sigma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|\mathcal{F}_1] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}.$$

Beweis. Siehe [61]. □

Proposition B.2. Für $M, N \in \mathcal{L}^2_M$ existieren eindeutig bestimmte, $\mathcal{G}$-vorhersehbare Prozesse $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_t)_{t\geq 0}$ und $\langle M, N \rangle = (\langle M, N \rangle_t)_{t\geq 0}$, sodass

$$M_t^2 - \langle M \rangle_t,$$
$$M_t N_t - \langle M, N \rangle_t$$

$(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-Martingale sind. Wir bezeichnen $\langle M \rangle_t$ als die vorhersehbare quadratische Variation des Prozesses M bis zum Zeitpunkt t bzw. $\langle M, N \rangle_t$ als die vorhersehbare quadratische Kovariation der Prozesse M und N bis zum Zeitpunkt t.

Beweis. Siehe [35]. □

Satz B.3. Seien $M, N \in \mathcal{L}^2_M$. Dann gelten die folgenden Eigenschaften für die vorhersehbare quadratische Variation bzw. Kovariation:

- $[M] - \langle M \rangle$ ist ein $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-Martingal.
- $\langle M, N \rangle$ ist linear in M und N.
- Sei $L^2(\langle M \rangle)$ der Raum aller $\mathcal{G}$-vorhersehbaren Prozesse $H = (H_t)_{t\geq 0}$ mit

  $$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_0^\infty |H_s|^2 d\langle M \rangle_s\right] < \infty.$$

  Falls $H \in L^2(\langle M \rangle)$, folgt $\langle H \cdot M, N \rangle = H \cdot \langle M, N \rangle$.

Beweis. Siehe [17]. □

Lemma B.4. Sei $M \in \mathcal{L}_M^2$ und $H = (H_t)_{t \geq 0}$ ein reellwertiger, $\mathcal{G}$-vorhersehbarer Prozess mit

$$(H_t 1_{\{t \leq T\}})_{t \geq 0} \in L^2(\langle M \rangle)$$

für $T > 0$. Dann ist auch der Prozess $(\int_0^t H_s dM_s)_{t \geq 0}$ ein quadratintegrierbares $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-Martingal.

Beweis. Siehe [35]. □

Satz B.5 (Exponentialprozess). Sei X ein Semimartingal mit $X_0 = 0$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Semimartingal Z als Lösung der stochastischen DGL

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-} dX_s,$$

wobei diese durch

$$Z_t = \mathcal{E}(X)_t = \exp\left(X_t - \frac{1}{2}[X]_t^c\right) \prod_{s \leq t} (1 + \Delta X_s) \mathrm{e}^{-\Delta X_s} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

gegeben ist. Man nennt Z den Exponentialprozess oder das Doléans-Dade-Exponential von X.

Beweis. Siehe [52]. □

Lemma B.6. Falls $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein lokales $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-Martingal mit $\Delta X_t > -1$ $\mathbb{P}$-f.s. für $t \geq 0$ ist, dann ist der Prozess $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ mit

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-} dX_s \tag{B.1}$$

ein strikt positives, lokales $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-Martingal. Weiters ist Z genau dann ein $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-Martingal, falls zusätzlich $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_t] = 1$ für $t \geq 0$ gilt.

Beweis. Siehe [17]. □

Satz B.7 (Satz von Girsanov). Sei Z ein strikt positives und gleichgradig integrierbares $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-Martingal mit der Darstellung $Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-} dX_s$. Dabei ist $Z_\infty := \lim_{t \to \infty} Z_t$. Dann können wir ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ durch die Dichte

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Z_\infty$$

definieren. Sei $W = (W_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung bezüglich $\mathcal{G}$ unter $\mathbb{P}$. Angenommen, der Prozess $\langle W, X \rangle$ existiert und ist stetig, dann ist $W^{\mathbb{Q}} = (W_t^{\mathbb{Q}})_{t \geq 0}$ mit

$$W_t^{\mathbb{Q}} := W_t - \langle W, X \rangle_t$$

eine Brownsche Bewegung bezüglich $\mathcal{G}$ unter $\mathbb{Q}$.

Beweis. Siehe [57]. □

Satz B.8 (**Itô-Formel**)**.** Sei $X = ((X_t^1, \dots, X_t^n))_{t \geq 0}$ ein $\mathbb{R}^n$-wertiges Semimartingal. Weiters ist $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann ist $f(X)$ wieder ein Semimartingal und es gilt $\mathbb{P}$-f.s. für alle $t \geq 0$

$$\begin{aligned} f(X_t) = f(X_0) &+ \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{s-}) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_{s-}) d[X^i, X^j]_s^c \\ &+ \sum_{0<s\leq t} \left(f(X_s) - f(X_{s-}) - \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{s-}) \Delta X_s^i \right). \end{aligned}$$

Beweis. Siehe [52]. □

Bemerkung. Sei $X^1 = (X_t^1)_{t\geq 0}$ ein Itô-Prozess und $X^2 = (X_t^2)_{t\geq 0}$ eine zeitstetige Markovkette. Dann kann im Spezialfall $X = ((t, X_t^1, X_t^2))_{t\geq 0}$ die Itô-Formel zu

$$\begin{aligned} f(X_t) = f(X_0) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(X_{s-}) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_{s-}) dX_s^1 + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(X_{s-}) d[X^1, X^1]_s \\ &+ \sum_{0<s\leq t} f(X_s) - f(X_{s-}) \end{aligned} \tag{B.2}$$

vereinfacht werden.

Satz B.9 (**Bayes-Formel**)**.** Sei $\mathbb{Q}$ ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ und Z sei der dazugehörige Dichteprozess. Weiters ist Y eine beliebige $\mathcal{G}_t$-messbare Zufallsvariable, die

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[|Y|] < \infty$$

erfüllt. Dann gilt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y|\mathcal{G}_s] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_t Y|\mathcal{G}_s]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_t|\mathcal{G}_s]} \quad \mathbb{P}\text{-f.s. bzw. } \mathbb{Q}\text{-f.s.}$$

für $s \leq t$.

Beweis. Siehe [51]. □

Literaturverzeichnis

[1] S. Asmussen, *Applied Probability and Queues.* Springer, 2003.

[2] F. G. Ball, Y. Cai, J. B. Kadane, and A. O'Hagan, "Bayesian Inference for Ion-Channel Gating Mechanisms Directly from Single-Channel Recordings, Using Markov Chain Monte Carlo," *Proceedings of the Royal Society Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 455, pp. 2879–2932, 1999.

[3] T. R. Bielecki and M. Rutkowski, *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging.* Springer, 2002.

[4] F. Black and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, vol. 81, no. 3, pp. 637–654, 1973.

[5] W. Bo and S. Ruili, "The MEMMS for Markov-Modulated GBMs," *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics*, vol. 29, no. 2, 2013.

[6] S. Borak, K. Detlefsen, and W. Härdle, "FFT Based Option Pricing," *Statistical Tools for Finance and Insurance*, pp. 183–200, 2005.

[7] P. Carr and D. B. Madan, "Option Valuation Using the Fast Fourier Transform," *Journal of Computational Finance*, vol. 2, pp. 61–73, 1999.

[8] Z. Chengli and C. Yan, "Coherent Risk Measure Based on Relative Entropy," *Applied Mathematics & Information Sciences*, vol. 6, no. 2, pp. 233–238, 2012.

[9] K. Chourdakis, Y. Dendramis, and E. Tzavalis, "Are regime-shift sources of risk priced in the market?," *Journal of Empirical Finance*, vol. 28, pp. 151–170, 2014.

[10] R. Cont and P. Tankov, "Calibration of Jump-Diffusion Option Pricing Models: A Robust Non-Parametric Approach," *Rapport Interne CMAP Working Paper No. 490*, 2002.

[11] R. Cont and P. Tankov, "Non-parametric calibration of jump-diffusion option pricing models," *Journal of Computational Finance*, vol. 7, no. 3, pp. 1–49, 2004.

[12] R. Cont and P. Tankov, *Financial Modelling With Jump Processes.* Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, 2004.

[13] J. M. Corcuera, D. Nualart, and W. Schoutens, "Completion of a Lévy market by power-jump assets," *Finance and Stochastics*, vol. 9/1, pp. 109–127, 2005.

[14] F. Delbaen, P. Grandits, T. Rheinländer, D. Samperi, M. Schweizer, and C. Stricker, "Exponential Hedging and Entropic Penalties," *Mathematical Finance*, vol. 12, pp. 99–123, 2002.

[15] R. L. Dobrushin, "Generalization of Kolmogorov's equations for Markov processes with a finite number of possible states," *Mat. Sb. (N.S.)*, vol. 33/75, no. 3, pp. 567–596, 1953.

[16] R. J. Elliott, "Double Martingales," *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, vol. 34, pp. 17–28, 1976.

[17] R. J. Elliott, *Stochastic Calculus and Applications.* Springer, 1982.

[18] R. J. Elliott, L. Aggoun, and J. B. Moore, *Hidden Markov Models: Estimation and Control.* Springer, 1995.

[19] R. J. Elliott, L. Chan, and T. K. Siu, "Option pricing and Esscher transform under regime switching," *Annals of Finance*, vol. 1/4, pp. 423–432, 2005.

[20] R. J. Elliott, V. Krishnamurthy, and J. Sass, "Moment based regression algorithms for drift and volatility estimation in continuous-time Markov switching models," *Econometrics Journal*, vol. 11/2, pp. 244–270, 2008.

[21] R. J. Elliott, T. K. Siu, and A. Badescu, "On pricing and hedging options in regime-switching models with feedback effect," *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 35/5, pp. 694–713, 2011.

[22] C. Engel and J. D. Hamilton, "Long Swings in the Dollar: Are They in the Data and Do Markets Know It?," *American Economic Review*, vol. 80, no. 4, pp. 689–713, 1990.

[23] F. Esscher, "On the probability function in the collective theory of risk," *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, vol. 15, no. 3, pp. 175–195, 1932.

[24] K. L. Fisher and L. Hoffmans, *Markets Never Forget (But People Do): How Your Memory Is Costing You Money and Why This Time Isn't Different.* Wiley, 2011.

[25] M. Fritelli, "The Minimal Entropy Martingale Measure and the Valuation Problem in Incomplete Markets," *Mathematical Finance*, vol. 10/1, pp. 39–52, 2000.

[26] S. Frühwirth-Schnatter, *Finite Mixture and Markov Switching Models.* Springer, 2006.

[27] J. E. Gentle, W. K. Härdle, and Y. Mori, *Handbook of Computational Statistics: Concepts and Methods.* Springer, 2012.

[28] H. U. Gerber and E. S. W. Shiu, "Option Pricing By Esscher Transforms," *Transactions of society of actuaries*, vol. 46, pp. 99–191, 1994.

[29] R. Hafner, *Stochastic Implied Volatility: A Factor-Based Model.* Springer, 2004.

[30] M. Hahn and J. Sass, "Parameter Estimation in Continuous Time Markov Switching Models: A Semi-Continuous Markov Chain Monte Carlo Approach," *Bayesian Analysis*, vol. 4, no. 1, pp. 63–84, 2009.

[31] M. Hahn, S. Frühwirth-Schnatter, and J. Sass, "Markov Chain Monte Carlo Methods for Parameter Estimation in Multidimensional Continuous Time Markov Switching Models," *Journal of Financial Econometrics*, vol. 8/1, pp. 88–121, 2010.

[32] S. B. Hamida and R. Cont, “Recovering Volatility from Option Prices by Evolutionary Optimization,” *Journal of Computational Finance*, vol. 8, no. 4, 2005.

[33] M. Hermann, *Numerische Mathematik.* Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2006.

[34] J. Hunt and M. Hahn, “Estimation and Calibration of a Continuous-Time Semi-Markov Switching Model,” *Université catholique de Louvain: Discussion Paper*, 2010.

[35] N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes.* North-Holland Publishing Company, 1989.

[36] R. B. Israel, J. S. Rosenthal, and J. Z. Wei, “Finding Generators for Markov Chains via Empirical Transition Matrices, with Applications to Credit Ratings,” *Mathematical Finance*, vol. 11/2, pp. 245–265, 2001.

[37] J. Jacod and A. N. Shiryaev, *Limit Theorems for Stochastic Processes.* Springer, 2003.

[38] A. Jasra, C. C. Holmes, and D. A. Stephens, “Markov Chain Monte Carlo Methods and the Label Switching Problem in Bayesian Mixture Modeling,” *Statistical Science*, vol. 20, no. 1, pp. 50–67, 2005.

[39] J. Kallsen and A. N. Shiryaev, “The cumulant process and Esscher’s change of measure,” *Finance and Stochastics*, vol. 6/4, pp. 397–428, 2002.

[40] G. Last and A. Brandt, *Marked Point Processes on the Real Line: The Dynamical Approach.* Springer, 1995.

[41] R. Lord and C. Kahl, “Optimal Fourier Inversion in Semi-Analytical Option Pricing,” *Tinbergen Institute Discussion Paper*, no. 2006-066/2, 2007.

[42] R. S. Mamon and R. J. Elliott, *Hidden Markov Models in Finance.* Springer, 2007.

[43] S. Mataramvura and B. Øksendal, “Risk minimizing portfolios and HJBI equations for stochastic differential games,” *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes: formerly Stochastics and Stochastics Reports*, vol. 80/4, pp. 317–337, 2008.

[44] R. C. Merton, “Option pricing when underlying stock returns are discontinuous,” *Journal of Financial Economics*, vol. 3, pp. 125–144, 1976.

[45] V. N. Minin and M. A. Suchard, “Counting labeled transitions in continuous-time Markov models of evolution,” *Journal of Mathematical Biology*, vol. 56/3, pp. 391–412, 2008.

[46] Y. Miyahara, “[Geometric Lévy Process & MEMM] Pricing Model and Related Estimation Problems,” *Asia-Pacific Financial Markets*, vol. 8/1, pp. 45–60, 2001.

[47] Y. Miyahara, *Option Pricing in Incomplete Markets: Modeling Based on Geometric Lévy Processes and Minimal Entropy Martingale Measures.* Imperial College Press, 2012.

[48] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications.* Springer, 2003.

[49] B. Øksendal and A. Sulem, "A game theoretic approach to martingale measures in incomplete markets," *Pure Mathematics*, no. 24, 2006.

[50] E. Otranto and G. M. Gallo, "A Nonparametric Bayesian Approach to Detect the Number of Regimes in Markov Switching Models," *Econometric Reviews*, vol. 21, no. 4, pp. 477–496, 2002.

[51] E. Platen and D. Heath, *A Benchmark Approach to Quantitative Finance.* Springer, 2006.

[52] P. E. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations.* Springer, 2005.

[53] T. Rheinländer and J. Sexton, *Hedging Derivatives.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2011.

[54] C. P. Robert and G. Casella, *Monte Carlo Statistical Methods.* Springer, 1999.

[55] M. Schmelzle, "Option pricing formulae using fourier transform: Theory and application," *http://pfadintegral.com/articles/option-pricing-formulae-using-fourier-transform*, 2010.

[56] W. Schoutens, E. Simons, and J. Tistaert, "A Perfect calibration ! Now what ?," *Wilmott Magazine*, 2004.

[57] J. H. V. Schuppen and E. Wong, "Transformation of Local Martingales Under a Change of Law," *The Annals of Probability*, vol. 2, no. 5, pp. 879–888, 1974.

[58] T. K. Siu, "A game theoretic approach to option valuation under Markovian regime-switching models," *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 42, pp. 1146–1158, 2008.

[59] T. K. Siu and H. Yang, "Option pricing when the regime-switching risk is priced," *Acta Mathematicae Applicatae Sinica: English Series*, vol. 25/3, pp. 369–388, 2009.

[60] T. K. Siu, "Regime-Switching Risk: To Price or Not to Price?," *International Journal of Stochastic Analysis*, vol. 2011, 2011.

[61] D. Williams, *Probability with Martingales.* Cambridge University Press, 1991.

[62] X. Zhang, R. J. Elliott, T. K. Siu, and J. Guo, "Markovian regime-switching market completion using additional Markov jump assets," *IMA Journal of Management Mathematics*, vol. 23/3, pp. 283–305, 2012.