



Wolfgang Alois Hörtnagel, Bsc

# Optimale stochastische Regelung eines vernetzten Systems

## MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

Masterstudium Elektrotechnik

eingereicht an der

**Technischen Universität Graz**

Betreuer

Dipl.-Ing. Astrid Rupp

Dr. Martin Horn

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik

Graz, Feber 2015

## Eidesstattliche Erklärung

### ***AFFIDAVIT***

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZ hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

*I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources and that I have explicitly indicated all material which has been quoted either literally or by content from the sources used. The text document uploaded to TUGRAZ is identical to the present master's thesis.*

---

Datum

---

Unterschrift

## **Kurzfassung**

Die Übertragung von Regelungssignalen über Netzwerke gewinnt zunehmend an Bedeutung. Die dadurch entstehenden Übertragungszeiten können das Systemverhalten negativ beeinflussen. Im Zuge dieser Masterarbeit werden modifizierte LQG-Regler untersucht, welche stochastische Eigenschaften dieser Zeitverzögerungen in den Regelgesetzen verwenden, um ein optimales Regelverhalten zu erzielen.

Nach einer Literaturrecherche werden verschiedene Regelkonzepte vorgestellt und auf diverse Problemstellungen angewandt. Abschließend wird ein LQG-Regler entworfen, der die nichtlineare Fahrzeugdynamik eines modellierten Autos stabilisieren soll.

## **Abstract**

The transmission of control signals over networks becomes increasingly important. The resulting transmission delay can impact the system behaviour negatively. In this master thesis modified LQG-controllers are analysed, which use stochastic properties of these time delays within the control rules to obtain optimal control behaviour.

After literature research various controlling concepts are introduced and applied to diverse problems. Concluding a LQG-controller is designed, which aims to stabilize the nonlinear vehicle dynamic of a modelled car.

# Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	8
1.1	Thematischer Überblick	8
2	Grundlagen	11
2.1	Grundlegende Begriffe	11
2.2	Vernetzte Regelungssysteme	13
2.2.1	Probleme durch die Vernetzung	14
2.2.2	Lösungsvorschläge in anderen Quellen	16
2.3	Berücksichtigung von Totzeiten	17
2.4	LQG	18
2.4.1	Moderne Anwendungsgebiete für LQG	19
2.5	Asynchrone Regelung	21
2.6	Optimale Beobachtung und Zustandsschätzung	25
2.6.1	Annahmen	25
2.6.2	Berechnung	26
2.6.3	Parameterwahl	27
2.6.4	Besonderheiten bei asynchroner Berechnung	29
3	Regelkonzepte	30
3.1	Eigenwertvorgabe	30
3.1.1	Annahmen	30
3.1.2	Reglerauslegung	31
3.1.3	Anwendung	32
3.1.4	Vor- und Nachteile	34
3.2	Deterministische Regelung mit Puffer	34
3.2.1	Annahmen	35
3.2.2	Reglerauslegung	36
3.2.3	Anwendung	36

3.2.4	Vor- und Nachteile	38
3.3	Heuristischer Ansatz zu optimaler stochastischer Regelung	39
3.3.1	Annahmen	39
3.3.2	Reglerauslegung	39
3.3.3	Anwendung	40
3.3.4	Vor- und Nachteile	42
3.4	Optimale Regelung nach Nielsson	42
3.4.1	Annahmen	42
3.4.2	Reglerauslegung	43
3.4.3	Zusammenfassung der Berechnung	45
3.4.4	Anwendung	48
3.4.5	Vor- und Nachteile	48
3.5	LMI-Regler	49
3.5.1	Reglerauslegung	49
3.5.2	Anwendung	50
3.5.3	Vor- und Nachteile	50
4	Simulationsaufbau	51
4.1	Aufbau der Strecke	52
4.2	Einbringung der variablen Zeitverzögerung	53
4.3	Aufbau der Regler	53
5	Anwendungsbeispiele	54
5.1	Regelverhalten einer stabilen linearen Strecke	54
5.1.1	Zusammenfassung der Simulationsparameter	55
5.1.2	Verhalten im Nennbereich	57
5.1.3	Verhalten bei Verlust der Echtzeitfähigkeit	59
5.2	Regelverhalten einer instabilen linearen Strecke	60
5.2.1	Zusammenfassung der Simulationsparameter	61
5.2.2	Verhalten im Nennbereich	63

5.2.3	Verhalten bei Verlust der Echtzeitfähigkeit	64
5.3	Robustheit gegenüber Modellungenauigkeiten	65
5.3.1	Zusammenfassung der Simulationsparameter	67
5.4	Anwendungsbeispiel an Strecke mit langer Zeitverzögerung	68
5.4.1	Modellierung der Kugeldynamik	68
5.4.2	Auswirkung der konstanten Zeitverzögerung	70
5.4.3	Zusammenfassung der Simulationsparameter	71
5.4.4	Simulationsergebnisse	73
5.5	Anwendungsbeispiel an nichtlinearer Strecke	74
5.5.1	Modellierung des Fahrzeugverhaltens	74
5.5.2	Anmerkung zur Modellierung	77
5.5.3	Trajektorienplanung	78
5.5.4	Simulationsparameter	81
5.5.5	Simulationsergebnisse	83
5.5.6	Anmerkung zu den Simulationsergebnissen	85
6	Zusammenfassung	86
A	Anhang	87
A.1	Sonstige Abbildungen	87
A.2	Literaturverzeichnis	91

## **Abbildungsverzeichnis**

Vernetztes Regelungssystem, aus [1]	9
Grundlegender digitaler Regelkreis aus [2]	11
Vernetztes System mit Aktor, Regler und Sensor, aus [1]	13
Vernetztes System in hierarchischer Struktur, aus [4]	14
Digitaler Regelkreis mit Zeitverzögerung, aus [1]	21

Zeitlicher Verlauf der Systemgrößen bei Eigenwertvorgabe	32
Verwendung von Puffern, um das System zeitinvariant zu machen	34
Zeitlicher Verlauf der Systemgrößen bei gepufferter Regelung	37
Zeitlicher Verlauf der Systemgrößen bei heuristischer Regelung	40
Grundsätzlicher Simulationsaufbau in Simulink	51
Aufbau einer linearen Strecke	52
Kostenfunktionen der Reglertypen bei stabiler Strecke im Nennbereich	57
Kostenfunktionen der Regler bei stabiler Strecke im gesamten Bereich	59
Kostenfunktionen der Regler bei instabiler Strecke im Nennbereich	63
Kostenfunktionen der Regler bei instabiler Strecke im gesamten Bereich	64
Kostenfunktionen bei Modellungenauigkeit, Versuch 1	66
Kostenfunktionen bei Modellungenauigkeit, Versuch 2	66
Schematischer Modellaufbau aus [24]	68
Aufbau der Kaskadenregelung	69
Verlauf der Zustandsgrößen, $\tau_k = 1,5 \cdot h_p = konst$	73
Trajektorienplanung für Überholvorgang	78
Reales Verhalten des Fahrzeuges, $\tau_{max} = 0,5 \cdot h$	84
Verlauf der Trajektorienabweichung $\bar{x}_k$ , $\tau_{max} = 0,5 \cdot h$	84
Zustandsschätzung, Ackermann, instabile Strecke	87
Zustandsschätzung, Puffer, instabile Strecke	88
Stellgröße, Ackermann, instabile Strecke	88
Stellgröße, Puffer, instabile Strecke	89
Nichtlinearer Streckenaufbau, Überblick	89
Nichtlinearer Streckenaufbau, Detail Strecke	90
Nichtlinearer Streckenaufbau, Detail Regler	90

# 1 Einleitung

Fortschritte in der Kommunikationstechnik und der einhergehende Preisverfall der benötigten Netzwerkkomponenten begünstigen die Planung verteilter Systeme. Eine räumliche Trennung von Sensorik/Aktorik und der zugehörigen Steuerungen eröffnet viele potentielle Vorteile wie zum Beispiel Kostenersparnis, erleichterte Installation und Instandhaltung sowie Zentralisierung der Rechenleistung. Das Schließen von Regelschleifen über Netzwerke macht es jedoch notwendig, die unerwünschten Nebenwirkungen der Übertragung zu modellieren. Zeitveränderliche Transportdauern und Paketverluste können sich negativ auf das Systemverhalten auswirken und können, wenn nicht in der Reglerauslegung berücksichtigt, zur Destabilisierung des zu regelnden Prozesses führen.

Diese unvermeidlichen Verzögerungen – zurückzuführen auf begrenzte Bandbreiten, Störungen und die Verwendung von umfangreichen Kommunikationsprotokollen zum Datenaustausch im Netzwerk – müssen in der Systemanalyse beachtet werden. Im Sinne der Regelungstechnik ist ein System mit veränderlichen Laufzeiten definitionsgemäß nicht zeitinvariant. Deshalb können Standardlösungen der Regelungstechnik weder zur Systemanalyse noch zum Reglerentwurf für verteilte Systeme verwendet werden. Die mathematische Beschreibung von vernetzten Regelungssystemen muss deshalb sorgfältig durchdacht werden.

## 1.1 Thematischer Überblick

Im Zuge dieser Arbeit werden zuerst die grundlegenden Problemstellungen der vernetzten Regelung beschrieben und bekannte Lösungsansätze betrachtet. Anschließend wird das Konzept der asynchronen Regelung präsentiert und die Berechnung verschiedener Reglertypen vorgestellt. Abschließend erfolgt ein Vergleich der entworfenen Regler anhand ausgewählter Anwendungsbeispiele.

Durch die Kommunikation über Netzwerke entstehen Totzeiten, die das Verhalten des Systems stark beeinflussen können. In Abbildung 1 ist ein solches vernetztes Regelungssystem (englisch: Networked Control System, NCS) dargestellt.

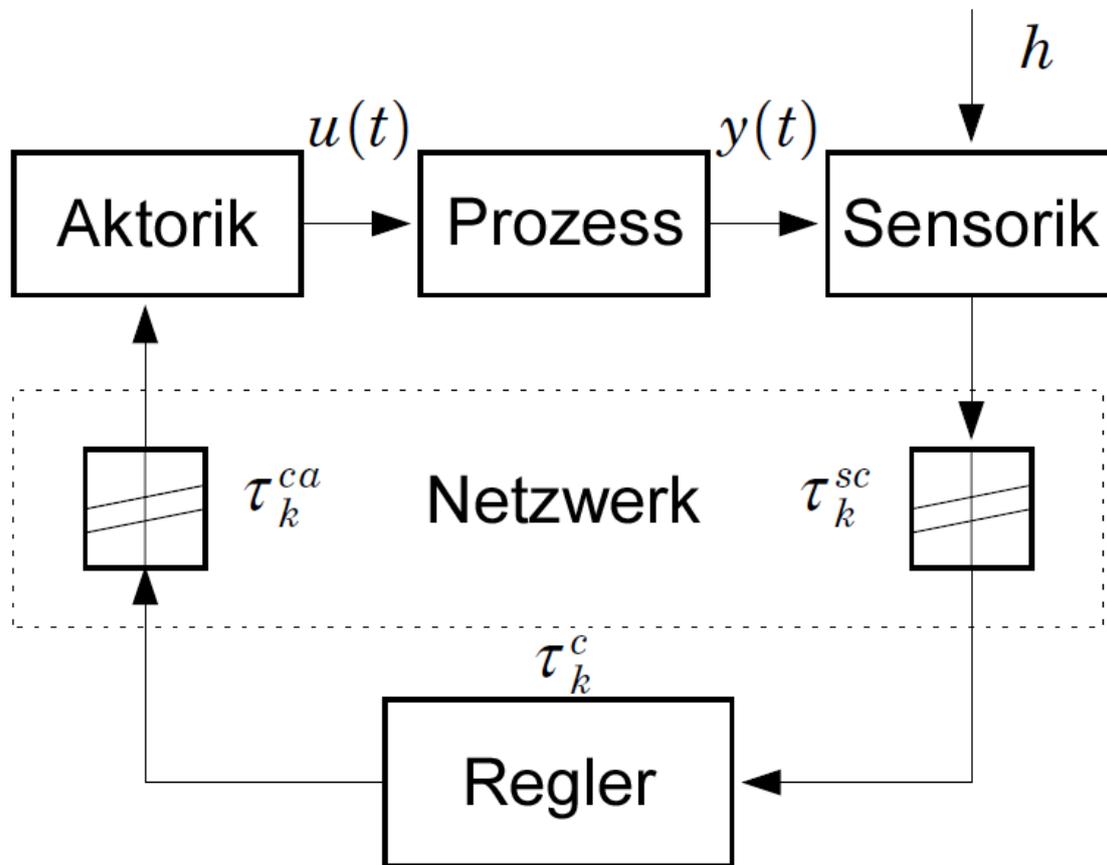


Abbildung 1: Vernetztes Regelungssystem, aus [1]

Für die Berücksichtigung der Totzeiten in der Regelung gibt es verschiedenste Ansätze. Man unterscheidet zwischen deterministischen Ansätzen, wie zum Beispiel dem Smith Prädiktor, und stochastischen Ansätzen, von denen ein Ansatz in dieser Arbeit behandelt werden sollen.

In diesem optimalen Ansatz soll das Regelgesetz über ein sogenanntes LQG-Problem (Linear Quadratic Gaussian) berechnet werden.

Dazu soll für das abgetastete System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}_0(\tau_k)u_k + \mathbf{\Gamma}_1(\tau_k)u_{k-1} + \mathbf{w}_k \quad (1.1)$$

die Kostenfunktion

$$J_N = E\{\mathbf{x}_N^T \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_N\} + E\left\{ \sum_{k=0}^N \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ u_k \end{bmatrix}^T \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ u_k \end{bmatrix} \right\} \quad (1.2)$$

minimiert werden, wobei  $\tau_k$  die Totzeit zum Zeitpunkt  $k$  und  $\mathbf{w}_k$  weißes Rauschen darstellt. Man erhält ein Regelgesetz der Form

$$u_k = -L_k(\tau_k) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ u_k \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Es sollen unterschiedliche Ansätze miteinander verglichen, Vor- bzw. Nachteile aufgeschlüsselt und die Stabilitätsgrenzen bezüglich maximal zulässiger Totzeit ermittelt werden.

## 2 Grundlagen

Die verwendeten Literaturquellen sind zum größten Teil in Englisch verfasst. Durch die Übertragung ins Deutsche könnte es deshalb zu Unklarheiten kommen. Im folgenden Grundlagenkapitel werden deshalb erst die verwendeten Begriffe definiert und dann die mathematische Basis für die nachfolgenden Regelkonzepte gelegt.

### 2.1 Grundlegende Begriffe

In Abbildung 2 ist der typische Aufbau eines digitalen Regelkreises dargestellt.

Grob formuliert ist die Aufgabe eines solchen Regelkreises, die Regelstrecke in geeigneter Weise so zu beeinflussen, dass ihre Regelgröße  $y(t)$  der gegebenen Führungsgröße  $r(t)$  möglichst gut folgt, und zudem die unerwünschten Auswirkungen von Störgrößen auf die Regelgröße möglichst gering sind.

Zur Bewältigung einer solchen regelungstechnischen Aufgabe muss zunächst die Regelgröße mit einem Messgerät im Rückführzweig gemessen werden; die Messgröße  $\tilde{y}(t)$  der Regelgröße wird dann im Regler mit der Führungsgröße verglichen, um daraus in geeigneter Weise eine Stellgröße  $u(t)$  zu erzeugen. [2]

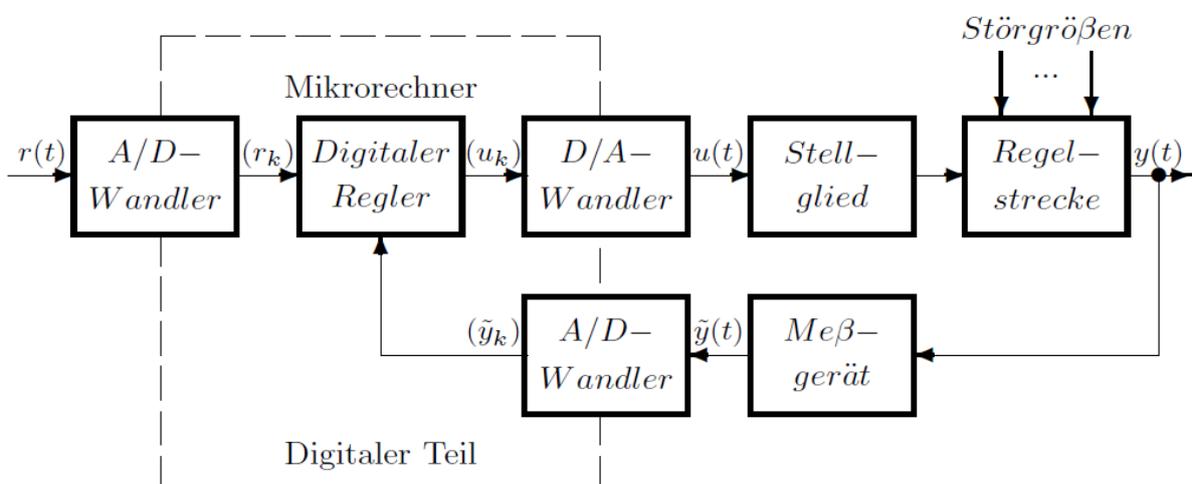


Abbildung 2: Grundlegender digitaler Regelkreis aus [2]

Die Regelgröße  $y(t)$  ist eine (üblicherweise) physikalische Größe, die gezielt beeinflusst werden soll. Beispiele hierfür sind Temperatur, Wasserstand und Position.

Die Regelstrecke ist jenes System, das die Regelgröße enthält. Beispiele hierfür sind der Raum, dessen Temperatur geregelt werden soll; das Gefäß, dessen Wasserstand beeinflusst werden soll und eine Kugel, deren Position verändert werden soll.

Die Führungsgröße  $r(t)$  gibt wie vorhin beschrieben den Wunschverlauf der Regelgröße vor und ein funktionierender Regelkreis versucht diesem Wunschverlauf möglichst gut zu folgen.

Die Stellgröße  $u(t)$  ist jene Größe, mit der man die Regelstrecke beeinflusst. Beispiele hierfür sind die Hitzestrahlung eines Heizkörpers, der Wasserfluss aus einem Ventil oder der Winkel einer Platte.

Störgrößen beeinflussen die Regelstrecke auf eine nicht kontrollierte Art und Weise. Typische Störgrößen sind Wind, Umgebungstemperatur, Unebenheiten und Diskretisierungsfehler der Digital/Analog-Wandler.

Zustandsgrößen  $x(t)$  beschreiben physikalische Eigenschaften der Regelstrecke, die unter Umständen zur Berechnung der Stellgröße verwendet werden. Am Beispiel einer Kugel können dies etwa die Position in einem kartesischen Koordinatensystem sein, die Winkel relativ zu den Koordinatenebenen, die Kugelgeschwindigkeit oder auch die Kugeltemperatur. Nicht alle Zustandsgrößen müssen relevant sein und eine vollständige Beschreibung einer Regelstrecke ist oft nicht erforderlich, weshalb Vereinfachungen getroffen werden können.

## 2.2 Vernetzte Regelungssysteme

In einem vernetzten Regelungssystem haben die Sensoren die Aufgabe eine oder mehrere Ausgangsgrößen einer Strecke zu messen und die Messwerte über ein Netzwerk an einen Regler zu schicken. Der Regler empfängt die Messdaten des Sensors, berechnet den Regelbefehl und sendet diese Werte über das Netzwerk an die Aktoren. Die Aktoren haben die Aufgabe die durch das Netzwerk empfangenen Regelbefehle auf die Strecke anzuwenden. [3]

Es gibt zwei grundlegende Konfigurationen, nach denen vernetzte Regelungssysteme entworfen werden: die direkte Struktur und die hierarchische Struktur, jedoch sind viele vernetzte Systeme eine hybride Umsetzung, die zwischen diesen zweien steht. [4]

Die direkte Struktur, verdeutlicht durch Abbildung 3, zeichnet sich dadurch aus, dass die Umsetzung genau mit dem vorangehend Beschriebenen übereinstimmt. Sensordaten werden über ein Netzwerk an den Regler geschickt, dieser berechnet die angebrachte Stellgröße und sendet diesen Wert über das Netzwerk an den Aktor, welcher die Strecke entsprechend der Reglervorgabe beeinflusst.

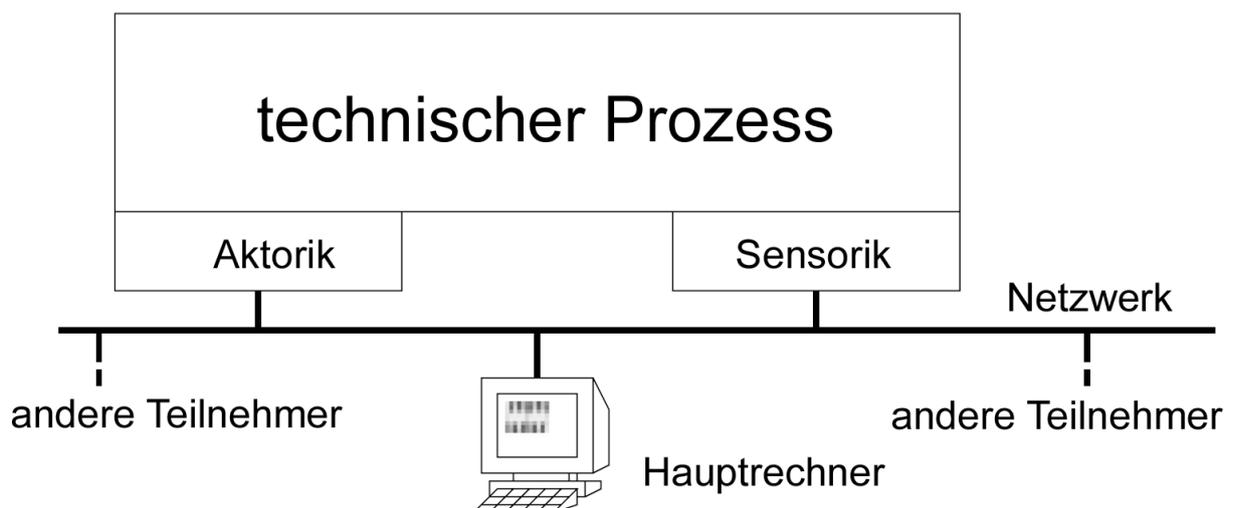


Abbildung 3: Vernetztes System mit Aktor, Regler und Sensor, aus [1]

Direkte Struktur: Das Kommunikationsnetzwerk wird auch für andere Anwendungen im System verwendet.

Die hierarchische Struktur, bildlich dargestellt in Abbildung 4, sieht eine Kaskadierung vor, bei welcher der innere Regler, die Sensoren und die Aktoren ein Teilsystem bilden, welches mit hoher Abtastrate arbeitet. Periodisch, aber mit geringerer Abtastrate als in der internen Regelschleife, werden neue Sollwerte über das Netzwerk empfangen und aktuelle Istwerte des Systems zu einem übergeordneten Hauptregler geschickt.

Diese Arbeit wird sich ausschließlich mit der direkten Struktur befassen und nicht weiter auf die hierarchische Struktur eingehen.

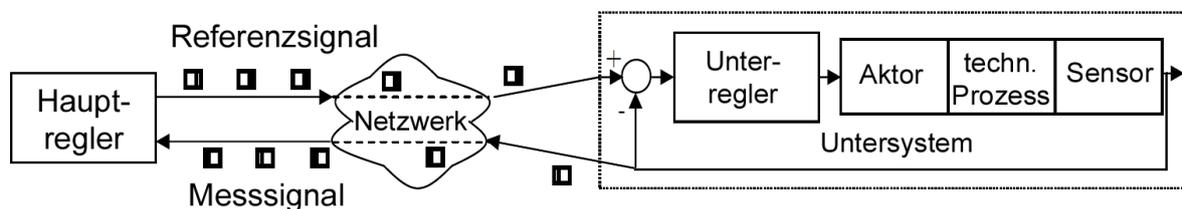


Abbildung 4: Vernetztes System in hierarchischer Struktur, aus [4]

### 2.2.1 Probleme durch die Vernetzung

Bei der Übertragung von Daten in Netzwerken treten mehrere Beschränkungen auf, wobei sich der Großteil der Forschung in diesem Gebiet auf drei grundlegende Kategorien fokussiert. [5] Die erste Gruppe beinhaltet NCSs, deren Kommunikationsmedium einen beschränkten Durchsatz aufweist (z. B. Bits pro Sekunde) und es werden Bedingungen gesucht, die verschiedene Zielvorgaben garantieren, wie zum Beispiel Stabilität. Die zweite behandelt Zugriffsbeschränkungen, wobei das geteilte Übertragungsmedium die Anzahl der Aktoren und Sensoren beschränkt, die gleichzeitig miteinander kommunizieren können. NCS-Stabilisierung und optimale Regelprobleme erhalten den Großteil der Aufmerksamkeit, andere Werke [6] beschäftigen sich mit der Frage, welcher Anteil der Netzwerkzeit dem Messen gewidmet werden soll im Verhältnis zum Regeln der zugrundeliegenden Strecke. Die dritte Gruppe beschäftigt sich schließlich mit Übertragungsverzögerungen, die durch das geteilte Medium eingeführt werden.

Takt-Synchronisierung ist ein weiteres eigenes Forschungsgebiet. [1] Der Zweck dieser Synchronisierung ist es, den internen Zeitgebern von zwei oder mehreren über Netzwerke verbundenen Geräten übereinstimmende Werte zu geben. Unbeachtet verschieben sich die internen Takte der Kommunikationsteilnehmer aufgrund der Ungenauigkeit der lokalen Zeitgeber. Neben der Hardware-Synchronisierung, bei der beispielsweise spezielle Verdrahtung zur Verteilung der globalen Taktsignale im System verwendet werden, gibt es auch die Möglichkeit der Software-Synchronisierung, bei der Signale über das Kommunikationsnetzwerk geschickt werden. Hierfür findet sich in der Literatur eine Vielzahl an Methoden, wie z. B. NTP (Network Time Protocol), welches zur Taktsynchronisierung im Internet verwendet wird, siehe [7].

Andere Quellen [8] beschäftigen sich mit der Frage der Stabilität, wenn die zwischen Regler und Strecke gesendeten Daten ihr Ziel nicht erreichen. Man spricht von Paketverlusten in der Übertragung.

## 2.2.2 Lösungsvorschläge in anderen Quellen

Ein wichtiges Problem in der vernetzten Regelung sind die zufällig auftretenden Zeitverzögerungen. Diese machen das System zeitvariant und die theoretischen Kenntnisse über Analyse und Entwurf von zeitinvarianten Systemen können nicht direkt angewandt werden. Eine Möglichkeit diese Zeitvarianz zu umgehen besteht darin, getaktete Puffer an den Eingängen von Regler und Aktuator anzubringen, siehe Abbildung 7. Wurde die Puffergröße passend gewählt, größer als die längste mögliche Übertragungsverzögerung, ist die Übertragung zwischen den beiden Knoten deterministisch. Dieses Schema wurde von Luck und Ray [9] vorgeschlagen. Die Einbringung von Puffern in die Regelschleife bedeutet jedoch, dass grundsätzlich ältere Informationen verwendet werden als notwendig wäre. In späteren Kapiteln dieser Masterarbeit wird gezeigt, dass dies zu einer Verschlechterung der Reglerqualität führt.

Das Problem des Paketverlustes wird in der Literatur häufig durch die Verwendung gedächtnisloser Regler behandelt. Diese basieren auf der Lösung von linearen Matrixungleichungen, welche die Stabilitätsbedingungen des Systems sicherstellen. Solche Reglertypen werden deshalb oft als LMI-Regler mit impliziten Ljapunov-Funktionalen bezeichnet, siehe Kapitel 3.5. Hao [10], dessen Entwurfsverfahren in späteren Kapiteln dieser Arbeit angewandt wird, beschäftigte sich beispielsweise mit nicht vollständig beobachtbaren Systemen. Sein Ansatz liefert statt der weiter verbreiteten LMI-Zustandsregler eine statische Ausgangsrückkopplung. Die Lösung der linearen Matrixungleichungen ist relativ komplex und die durch die LMIs ausgedrückten Stabilitätsbedingungen sind nur hinreichend und nicht notwendig. Hao schließt deshalb seine Arbeit mit der Anmerkung, dass die Lösbarkeit der LMIs ein Problem darstellt, welches noch zukünftiger Aufmerksamkeit bedarf.

Eine Vielzahl von weiteren Ansätzen wird in der Literatur behandelt. Tipsuwan verfasste deshalb beispielsweise eine Zusammenfassung [11] der Regelungs-Methodologien für netzwerkgerichtete Systeme. Da diese in dieser Masterarbeit nicht weiter untersucht wurden, wird auf eine Aufzählung verzichtet.

## 2.3 Berücksichtigung von Totzeiten

Verwendet man synchronisierte Taktgeber in den Netzwerkteilnehmern, kann die Zeit der Erstellung in jede Nachricht eingebunden werden. Aus diesen sogenannten Zeitstempeln kann der Empfänger dann die Übertragungsverzögerung berechnen. In den meisten Netzwerken ist die zusätzliche Belastung durch das Senden des Zeitstempels vernachlässigbar im Vergleich zu den übertragenen Daten und dem Netzwerkprotokoll. [1]

Dieses Zusatzwissen eröffnet neue Möglichkeiten für den Entwurf von Regelungssystemen. Insbesondere können dadurch ereignisgesteuerte/asynchrone Regler realisiert werden, welche die Übertragungszeit als Variable verwenden. Asynchrone Regelungssysteme basieren auf den folgenden Annahmen:

- Der Sensorknoten, der die Messsignale verschickt, ist zeitgesteuert. Das Ausgangssignal des zu regelnden Prozesses wird periodisch abgetastet mit der Periode  $h$ .
- Der Reglerknoten ist ereignisgesteuert. Die Stellgröße wird berechnet, sobald die Messdaten den Regler erreichen.
- Der Aktorknoten ist ereignisgesteuert. Das Stellsignal wird an den Prozess angelegt, sobald die Daten ankommen.
- Die Übertragungsverzögerung zwischen Sensor und Regler zum Abtastzeitpunkt  $k$ , bezeichnet als  $\tau_k^{sc}$ , und die Verzögerung zwischen Regler und Aktor, bezeichnet als  $\tau_k^{ca}$ , schwanken zufällig, aber mit bekannten stochastischen Eigenschaften.
- Die Längen der vergangenen Verzögerungen sind dem Regler bekannt.

Bringt man das Wissen über die stochastischen Eigenschaften in die Reglerdimensionierung ein, spricht man von stochastischer Regelung.

## 2.4 LQG

Ein beliebter Ansatz im Themenbereich der optimalen Regelung ist die Berechnung von LQG-Reglern. Diese Abkürzung steht für „linear quadratic gaussian“ und bezeichnet die Kombination einer linearen quadratisch-optimalen Zustandsrückführung (LQR – „linear quadratic regulator“) mit einem optimalen Zustandsbeobachter für verrauschte Messsignale.

Das LQR-Design basiert auf einem linearen System der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k, \quad (2.1)$$

welches hier in zeitdiskreter Form dargestellt ist. Hierbei bezeichnet  $\mathbf{\Phi}$  die zeitdiskrete Systemmatrix und  $\mathbf{B}$  die zeitdiskrete Eingangsmatrix. Es soll nun ein linearer Regler der Form  $\mathbf{u}_k = \mathbf{K}\mathbf{x}_k$  berechnet werden, sodass die bekannte quadratische Gütefunktion

$$J_N = E\{\mathbf{x}_N^T \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_N\} + E\left\{\sum_{k=0}^N \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix}^T \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix}\right\}$$

minimiert wird. Hier bezeichnet  $\mathbf{Q}$  die allgemeine Gewichtungsmatrix für Zustands- und Eingangsgrößen, während  $\mathbf{Q}_N$  eine gesonderte Gewichtung für den Endzustand  $\mathbf{x}_N$  ermöglicht. Die Annahme der Messbarkeit des gesamten Systemzustandes ist jedoch unrealistisch, da zumindest ein Messrauschen immer gegenwärtig ist. Eine mögliche Verallgemeinerung bildet das folgende System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_k \quad (2.2)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad (2.3)$$

wobei  $\mathbf{v}_k$  und  $\mathbf{w}_k$  stochastische Prozesse sind, die jeweils als Messrauschen und Zustandsrauschen bezeichnet werden. Der Einfachheit halber wird angenommen,

dass es sich um weißes Rauschen handle (mittelwertfrei, unkorreliert, Gaußsche Verteilung).

Da das Separations-Prinzip auch in diesem Fall gilt, kann die Regelungsaufgabe nun in zwei Teilen erfolgen:

1. Berechne den Schätzwert  $\hat{\mathbf{x}}_k$  des vollständigen Zustandes aus den verfügbaren Messwerten.
2. Wende den im Vorhinein berechneten LQR-Regler an, mit der Zustandsschätzung  $\hat{\mathbf{x}}_k$  als Variable anstelle des unbekanntes echten Zustandes  $\mathbf{x}_k$ .

Der Entwurf eines optimalen Zustandsbeobachters, sowie die Berechnung des linearen quadratisch-optimalen Reglers werden in späteren Kapiteln noch detailliert beschrieben.

#### **2.4.1 Moderne Anwendungsgebiete für LQG**

Das Thema der LQG-Regelung ist in den letzten Jahren etwas aus dem Fokus der Forschung gewichen, findet jedoch immer wieder Beachtung. Richard [12] erstellte einen informativen „Überblick über die jüngsten Entwicklungen und offenen Probleme im Bereich der zeitverzögerten Systeme“. Diese Arbeit stammt jedoch aus dem Jahr 2001 und kann deshalb nicht mehr als aktuelle Veröffentlichung bezeichnet werden.

Im Bereich der aktuellen anwendungsbezogenen Veröffentlichungen gibt es beispielsweise die Arbeiten „Design and Analysis of Linear Quadratic Gaussian Feedforward Controllers for Active Noise Control“ [13] von Barkefors u. a. aus dem Jahr 2014 zum Thema der aktiven Rauschunterdrückung mittels LQG-Regler in der Akkustik; „Linear Quadratic Gaussian (LQG) Control of Wind Turbines“ [14] von Kalbat aus dem Jahr 2013 zur LQG-Regelung von Windkraftturbinen und „Linear Output Feedback Control of a Three-Pole Magnetic Bearing“ [15] von Darbandi u. a. aus dem Jahr 2014 zur Regelung von magnetischen Lagern.

Im Bereich der Grundlagenforschung findet man unter anderem die Arbeit „Optimal Sequence-Based LQG Control over TCP-like Networks Subject to Random Transmission Delays and Packet Losses“ [16] von Fischer u. a. aus dem Jahr 2013 über eine Sequenz-basierte LQG-Regelung. Er behandelt das Problem der Paketverluste in der Übertragung und schlägt vor bei der Übertragung des Regelsignals  $\mathbf{u}_k$  auch noch eine Folge prädizierter Signale  $\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+2}, \dots$  an die Aktoren zu senden. Diese sollen von den Aktoren gepuffert werden, damit sie automatisch angelegt sind, falls kein aktuelleres Regelsignal vorhanden ist.

Andere theoretische Ansätze beschäftigen sich mit der verwendeten Netzwerkbandbreite. In „Robust Rate Control for Heterogeneous Network Access in Multihomed Environments“ [17] von Alpcan u. a. werden die Themen der dynamischen Bandbreitenzuweisung und der Datenflussregelung in Netzwerken im Fall von LQG und  $H^\infty$ -Reglern untersucht. Ähnlich geht es in „On LQG Joint Optimal Scheduling and Control under Communication Constraints“ [18] von Molin und Hirche um die optimale Regelung bei Minimierung des Informationsaustausches zwischen Sensor und Regler.

Abschließend kann festgehalten werden, dass das Thema der LQG-Regelung immer noch relevant ist und auch in nächster Zeit noch Impulse für weitere Forschungsarbeiten liefern wird.

Das nächste Kapitel stellt das Konzept der asynchronen Regelung vor. Dieses Thema ist von besonderer Bedeutung, da es die Grundlage für den optimalen stochastischen Regler nach Nielsson bildet, welcher in späteren Abschnitten dieser Arbeit näher behandelt wird.

## 2.5 Asynchrone Regelung

In Abbildung 5 wird die Ausgangsgröße des Regelkreises äquidistant abgetastet mit der Abtastperiode  $h$ . In der Regelschleife kommt es zu einer Zeitverzögerung  $\tau_k$ , manchmal auch  $\tau_k^{sa}$  genannt. Diese Gesamtverzögerung wird durch Addition der vorher definierten Einzelverzögerungen gebildet mit  $\tau_k = \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca}$ . Sie bezeichnet jene Zeit, die zwischen der Messung der Sensordaten und dem Anlegen der neu berechneten Stellgröße vergeht.

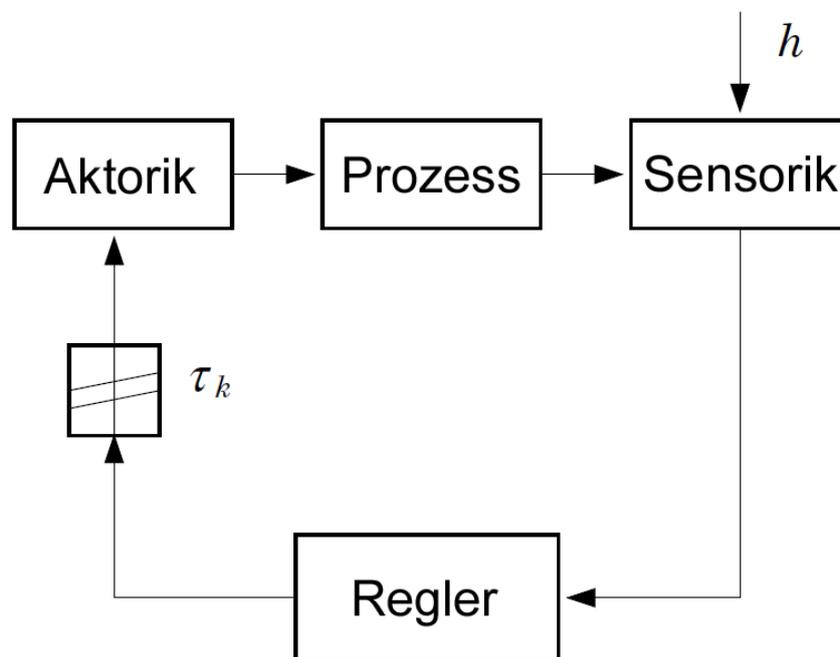


Abbildung 5: Digitaler Regelkreis mit Zeitverzögerung, aus [1]

Geht man davon aus, dass  $\tau_k$  eine Zufallsvariable darstellt, deren Wert gleichverteilt im Intervall  $[0, \tau_{\max}]$  liegt, ist offensichtlich, dass das Ansteuern der Aktoren asynchron zur Abtastung des Sensors stattfindet. Die Grundannahme der asynchronen Regelung ist nun, dass das Berechnen der Stellgröße im Regler ebenfalls asynchron zur Strecke stattfindet, sobald die notwendigen Daten über das Netzwerk bereitgestellt werden, siehe Abbildung 1. Dies führt zu einem nichtlinearen Verhalten der Regelschleife in Abhängigkeit von der Zufallsvariable  $\tau_k$ .

Eine in der Literatur häufig anzutreffende Annahme ist eine Beschränkung der Zeitverzögerung in der Form:  $\tau_k \in [0, h]$ , bzw.  $\tau_{\max} \leq h$ . Diese Beschränkung kann auf verschiedene Arten gedeutet werden:

- Die Datenübertragung muss echtzeitfähig erfolgen. Insbesondere muss die Übertragung abgeschlossen sein, bevor ein neuer Datensatz erstellt wird. Dies gilt auch bei Paketverlusten durch Netzwerkstörungen.
- Die Ankunftsreihenfolge der Pakete kann durch die Übertragung nicht verändert werden. Insbesondere können gesendete Pakete sich im Netzwerk nicht gegenseitig überholen.
- Außerhalb des Bereiches  $\tau_k \in [0, h]$  gelten die analytischen Gleichungen der Zustandsschätzung nicht mehr, sofern keine Fallunterscheidung getroffen wird.
- Gilt die obige Annahme, muss die Stellgröße  $u_k$  nicht gemessen werden. Es ist ausreichend, im Regler die vergangenen Werte abzuspeichern. Dadurch wird das Übertragungsvolumen des Netzwerks reduziert, was bei drohender Überlastung eventuell den Verlust der Echtzeitfähigkeit vermeiden kann.
- Die Streckengleichungen werden bei asynchroner Regelung, wie schon in (1.1) angedeutet, nichtlinear. Die Berechnung von  $\Gamma_0(\tau_{k-1}^{sa})$  und  $\Gamma_0(\tau_{k-1}^{sa})$ , siehe (2.4), ist allerdings aufwändig und sollte deshalb nicht zeitkritisch erfolgen. Wenn man diese Parameter in Abhängigkeit der zugehörigen Verzögerung als Datensatz vorberechnet, ist es allerdings notwendig  $\tau_k$  sinnvoll zu beschränken, um den Speicherplatz zu minimieren.

Anmerkung: Die Annahme  $\tau_k \in [0, h]$  bedeutet nicht, dass die maximale, durch das Netzwerk erzeugte, Verzögerung kleiner als die Periodendauer  $h$  sein muss, sondern dass  $\tau_{\max} - \tau_{\min} \leq h$  oder  $\Delta\tau \leq h$  gilt. Konstante Verzögerungen der Übertragung können als Teil der Regelstrecke modelliert werden, sodass im Netzwerkmodell nur noch der gleichverteilte zufällige Anteil berücksichtigt wird.

Die wesentlichste Neuerung im asynchronen Betrieb betrifft die Beschreibung der Zustandsgleichungen. Die bekannte Form  $\mathbf{x}_k = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{b}u_{k-1}$  geht davon aus, dass die Stellgröße exakt zum Abtastzeitpunkt angelegt wurde. Da dies im

asynchronen Fall jedoch nicht gewährleistet ist, verändert sich die Beschreibung zu der bereits in (1.1) angedeuteten Form:

$$\mathbf{x}_k = \Phi \cdot \mathbf{x}_{k-1} + \Gamma_0(\tau_{k-1}^{sa}) \cdot u_{k-1} + \Gamma_1(\tau_{k-1}^{sa}) \cdot u_{k-2}$$

Folgende Herleitung soll die Bedeutung dieser Gleichung verdeutlichen. Es gilt die beschriebene Annahme  $\tau_k^{sa} \in [0, h]$ . Der MATLAB-Befehl `c2d` wandelt ein zeitkontinuierliches Zustandsgrößensystem in ein äquidistant abgetastetes zeitdiskretes Zustandsgrößensystem mit Abtastperiodendauer  $h$  um.

$$[\mathbf{A}(h), \mathbf{b}(h), \mathbf{c}(h), d(h)] = c2d(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c, \mathbf{c}_c, d_c, h)$$

Bevor das neue Signal  $u_k$  vom Aktor umgesetzt wird, liegt an der Strecke immer noch das im Vortakt berechnete  $u_{k-1}$  an:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}(\tau_k^{sa}) \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{b}(\tau_k^{sa}) \cdot u_{k-1}$$

Für den restlichen Takt liegt nun der neue Wert an:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}(h - \tau_k^{sa}) \cdot \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{b}(h - \tau_k^{sa}) \cdot u_k$$

Eingesetzt ergibt sich somit:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}(h - \tau_k^{sa}) \cdot (\mathbf{A}(\tau_k^{sa}) \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{b}(\tau_k^{sa}) \cdot u_{k-1}) + \mathbf{b}(h - \tau_k^{sa}) \cdot u_k$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}(h - \tau_k^{sa}) \cdot \mathbf{A}(\tau_k^{sa}) \cdot \mathbf{x}_k \\ &\quad + \mathbf{b}(h - \tau_k^{sa}) \cdot u_k + \mathbf{A}(h - \tau_k^{sa}) \cdot \mathbf{b}(\tau_k^{sa}) \cdot u_{k-1} \end{aligned}$$

Nun werden die folgenden Variablen definiert:

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \mathbf{A}(h - \tau_k^{sa}) \cdot \mathbf{A}(\tau_k^{sa}) \\
 \Gamma_0(\tau_k^{sa}) &= \mathbf{b}(h - \tau_k^{sa}) \\
 \Gamma_1(\tau_k^{sa}) &= \mathbf{A}(h - \tau_k^{sa}) \cdot \mathbf{b}(\tau_k^{sa})
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Die Multiplikation  $\mathbf{A}(h - \tau_k^{sa}) \cdot \mathbf{A}(\tau_k^{sa})$  ergibt ein konstantes Ergebnis für den Wertebereich  $\tau_k^{sa} \in [0, h]$ , nämlich die Systemmatrix  $\Phi$ , welche keine Abhängigkeit von der Zeitverzögerung aufweist.

Dies vereinfacht die Gleichung zu:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \cdot \mathbf{x}_k + \Gamma_0(\tau_k^{sa}) \cdot u_k + \Gamma_1(\tau_k^{sa}) \cdot u_{k-1}$$

Um einen Zeitschritt verschoben ergibt sich somit die bekannte Gleichung:

$$\mathbf{x}_k = \Phi \cdot \mathbf{x}_{k-1} + \Gamma_0(\tau_{k-1}^{sa}) \cdot u_{k-1} + \Gamma_1(\tau_{k-1}^{sa}) \cdot u_{k-2}$$

Zusammengefasst bedeutet asynchrone Regelung, dass Regler und Aktorik ereignisgesteuert arbeiten, sobald die benötigten Datensignale anliegen. Die Sensoren hingegen arbeiten zeitgesteuert und liefern in regelmäßigen Abständen die Messwerte der Strecke. Durch dieses ereignisgesteuerte Verhalten können neue Signale schneller berechnet und an den zu regelnden Prozess angelegt werden. Der Nachteil dieser Methode ist, dass ein nichtlineares Verhalten in die Regelstrecke eingebracht wird, welches in den Berechnungen des Reglers berücksichtigt werden muss.

## 2.6 Optimale Beobachtung und Zustandsschätzung

Die meisten in dieser Arbeit verwendeten Regelkonzepte basieren auf Zustandsreglern. Häufig ist es unmöglich alle Zustände messtechnisch zu erfassen, weshalb eine übliche Lösung die Zustandsschätzung aus den verfügbaren Daten ist. Die Formeln des folgenden Kapitels wurden aus „Zustandsschätzung und Filterung“ [19] von Bauer übernommen. Sie beschreiben die Zustandsschätzung mittels Kalman-Filter. Dieser berechnet den optimalen Schätzwert  $\hat{\mathbf{x}}_k$  in dem Sinn, dass für den Schätzfehler  $\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$  der Erwartungswert  $E\{\tilde{\mathbf{x}}_k\}$  Null und die Summe der Varianzen  $E\{\tilde{\mathbf{x}}_k^T \tilde{\mathbf{x}}_k\}$  minimal wird.

### 2.6.1 Annahmen

Es wird von folgendem linearen zeitdiskreten mathematischen Modell ausgegangen:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k\end{aligned}\tag{2.5}$$

Die vektoriellen stochastischen Prozesse  $\mathbf{w}_k$  (Zustandsrauschen) und  $\mathbf{v}_k$  (Messrauschen) sollen weißes Rauschen darstellen und unkorreliert sein:

$$\begin{aligned}E\{\mathbf{w}_k\} &= \mathbf{0} \\ E\{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T\} &= \begin{cases} \mathbf{Q}_k & \text{für } k = j \\ \mathbf{0} & \text{für } k \neq j \end{cases} \\ E\{\mathbf{v}_k\} &= \mathbf{0} \\ E\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T\} &= \begin{cases} \mathbf{R}_k & \text{für } k = j \\ \mathbf{0} & \text{für } k \neq j \end{cases} \\ E\{\mathbf{w}_k \mathbf{v}_j^T\} &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{2.6}$$

Für den unbekanntem Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  soll gelten:

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{x}_0\} &= \mathbf{m}_0 \\ E\{(\mathbf{m}_0 - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{m}_0 - \mathbf{x}_0)^T\} &= \mathbf{M}_0 \\ E\{\mathbf{w}_k \mathbf{x}_0^T\} &= \mathbf{0} \\ E\{\mathbf{v}_k \mathbf{x}_0^T\} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

## 2.6.2 Berechnung

Die fünf Gleichungen zur Beschreibung des Kalman-Filters lauten:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k^* &= \Phi_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} \\ \mathbf{P}_k^* &= \Phi_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \\ \mathbf{K}_k^* &= \mathbf{P}_k^* \mathbf{C}_k^T \cdot (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^* \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{x}_k^* + \mathbf{K}_k \cdot (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k^*) \\ \mathbf{P}_k &= (\mathbf{E} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \cdot \mathbf{P}_k^* \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ist das Modell zeitinvariant und das Rauschen stationär, vereinfachen sich die Gleichungen zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k^* &= \Phi \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B} \mathbf{u}_{k-1} \\ \mathbf{P}_k^* &= \Phi \mathbf{P}_{k-1} \cdot \Phi^T + \mathbf{Q} \\ \mathbf{K}_k^* &= \mathbf{P}_k^* \mathbf{C}^T \cdot (\mathbf{C} \mathbf{P}_k^* \cdot \mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{x}_k^* + \mathbf{K}_k \cdot (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \mathbf{x}_k^*) \\ \mathbf{P}_k &= (\mathbf{E} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \cdot \mathbf{P}_k^* \end{aligned} \tag{2.8}$$

Für die Anfangswerte gilt:

$$\mathbf{x}_0^* = E\{\mathbf{x}_0\} = \mathbf{m}_0$$

$$\mathbf{P}_0^* = E\{(\mathbf{m}_0 - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{m}_0 - \mathbf{x}_0)^T\} = \mathbf{M}_0$$

Anmerkungen: Aus den Gleichungen ist ersichtlich, dass die sogenannten Kalman-Matrizen  $\mathbf{K}_k$  sogar ohne Messwerte im Voraus berechenbar sind. Im zeitinvarianten Fall konvergieren die Kalman-Matrizen außerdem. Deshalb muss nur eine begrenzte Anzahl an Iterationen berechnet werden, bis ein stationärer Endwert erreicht wird. Vereinfacht ergibt sich somit:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k^* + \mathbf{K}_k \cdot (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\mathbf{x}_k^*) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{x}_{k+1}^* = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$$

### 2.6.3 Parameterwahl

Um die Kalman-Gleichungen zu berechnen, müssen zuerst 4 Parameter festgelegt werden. Hier sollen nun einige Daumenregeln zu dieser Parameterwahl festgehalten werden:

$\mathbf{x}_0^* = \mathbf{m}_0$  ist der Erwartungswert für den Startwert  $\mathbf{x}_0^*$ , häufig ist dies der Ursprung  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Wurde das Modell durch Linearisierung um einen Arbeitspunkt berechnet, sollte für  $\mathbf{m}_0$  dieser Arbeitspunkt gewählt werden.

$\mathbf{P}_0^* = \mathbf{M}_0$  ist die Kovarianz des prädizierten Anfangsschätzfehlers  $(\mathbf{x}_0^* - \mathbf{x}_0)$ . Eine mögliche Wahl, folgend dargestellt am Beispiel eines Systems dritter Ordnung, lautet:

$$\mathbf{P}_0^* = \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{x2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{x3}^2 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \sigma_{xi} = \frac{\max|x_{i,0}|}{2}$$

Dies bedeutet, dass alle möglichen Startwerte von  $\mathbf{x}_0$  in einem  $4\sigma$ -Vertrauensbereich liegen. Wählt man diesen Bereich zu groß, dauert die Konvergenz von  $\mathbf{K}_k$  länger und die beobachteten Werte bleiben etwas länger unzuverlässig. Wählt man diesen Bereich zu klein, konvergiert der Schätzfehler ( $\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0$ ) langsamer gegen  $\mathbf{0}$ , wodurch das Anfangsverhalten des Beobachters wesentlich verschlechtert wird.

$\mathbf{Q}$  bezeichnet die Autokorrelation des Zustandsrauschens. Oftmals ist das Zustandsrauschen in der Form  $\mathbf{w}_k = \mathbf{b}_w \tilde{w}_k$  beschrieben. Dies bedeutet, dass das Rauschverhalten aller Zustände auf eine einzelne Hauptursache zurückgeführt werden kann, wie zum Beispiel Windböen, eine unruhige Fahrbahn oder Temperaturschwankungen. Hier ist die Rauschleistung  $\sigma_w^2$  somit aus der Relation  $E\{\tilde{w}_k \tilde{w}_j\} = \delta(k) \cdot \sigma_w^2$  bekannt. In diesem Fall ergibt sich  $\mathbf{Q}$  folgendermaßen:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{b}_w \mathbf{b}_w^T \cdot \sigma_w^2$$

Ist das Rauschverhalten der einzelnen Zustände hingegen unkorreliert, ergibt sich eine Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}$ , bei der nur die Elemente der Hauptdiagonale besetzt sind:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sigma_{1,w}^2 & & & 0 \\ & \sigma_{2,w}^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_{n,w}^2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{R}$  beschreibt die Autokorrelation des Messrauschens. Wie beim Zustandsrauschen ist dies oft in der Form  $\mathbf{v}_k = \mathbf{d}_v \cdot \tilde{v}_k$  gegeben und es ist die Rauschleistung  $\sigma_v^2$  bekannt. In diesem Fall ergibt sich  $\mathbf{R}$  wie folgt:

$$\mathbf{R} = \mathbf{d}_v \mathbf{d}_v^T \cdot \sigma_v^2$$

Ist das Rauschverhalten der einzelnen Messwerte unkorreliert, ergibt sich – wie bereits bei der Wahl von  $\mathbf{Q}$  – eine Kovarianzmatrix  $\mathbf{R}$ , bei der wieder nur die Elemente der Hauptdiagonale besetzt sind.

#### 2.6.4 Besonderheiten bei asynchroner Berechnung

Da die Sensordaten regelmäßig mit der Periode  $h$  abgetastet werden, gelten die bekannten Gleichungen auch für den asynchronen Betrieb, solange  $\tau_k \in [0, h]$  gewährleistet ist. Aufgrund der Zeitverzögerung der Aktoren ändert sich allerdings die Prädiktionsgleichungen für  $\mathbf{x}_k^*$  zu:

$$\mathbf{x}_k^* = \mathbf{\Phi} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{\Gamma}_0(\tau_{k-1}^{sa}) \cdot \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{\Gamma}_1(\tau_{k-1}^{sa}) \cdot \mathbf{u}_{k-2}$$

Nachdem in den vorangehenden Kapiteln die Grundlagen der Regelungstechnik beschrieben wurden, werden im folgenden Abschnitt alle untersuchten Regelkonzepte vorgestellt. Es werden die getroffenen Annahmen festgehalten und die Berechnungsschritte der Reglerauslegung dargestellt. Nach einer Anleitung zur Anwendung des spezifischen Reglers werden die Vor- und Nachteile des jeweiligen Verfahrens aufgelistet.

## 3 Regelkonzepte

Im Folgenden werden fünf ausgewählte Reglertypen vorgestellt. Es werden die zugrunde liegende Annahmen festgehalten, die Berechnungsschritte erklärt und die jeweiligen Vor- bzw. Nachteile aufgelistet.

### 3.1 Eigenwertvorgabe

Die Eigenwert- oder auch Polvorgabe beschreibt ein Regelkonzept, bei dem die Stellgröße als Linearkombination der Systemzustände berechnet wird. Insbesondere soll dem System mit Hilfe der Eingangsgröße  $u$  gezielt ein gewünschtes Verhalten verliehen werden [20], sodass das geregelte System beliebig vorgegebene Eigenwerte besitzt.

#### 3.1.1 Annahmen

- Die hier berechneten Zustandsregler vernachlässigen die Zeitverzögerung durch das Netzwerk. Für die Analyse gilt folglich  $\tau_k = 0$ . Aufgrund dieser Vereinfachung kann nicht garantiert werden, dass die berechneten Regler tatsächlich stabil sind, wenn  $\tau_k \neq 0$  gilt.
- Außerdem wird hier ausschließlich der Reglerentwurf nach Ackermann vorgestellt, welcher nur für Eingrößensysteme (SISO-Systeme) geeignet ist. Für Mehrgrößensysteme existieren andere Verfahren, wie zum Beispiel die Entkopplung nach Falb-Wolovich, welche in dieser Arbeit jedoch nicht behandelt werden.

### 3.1.2 Reglerauslegung

Nun wird eine steuerbare und beobachtbare Regelstrecke betrachtet, die durch das lineare und zeitinvariante Zustandsmodell n-ter Ordnung

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}u_k \qquad y_k = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k$$

beschrieben wird. Ferner ist ein beliebiges Wunschpolynom

$$w(z) = \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i) = z^n + w_{n-1}z^{n-1} + \dots + w_1z + w_0$$

mit

$$|\lambda_i| < 1 \qquad \text{für} \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

bezüglich der Eigenwertkonfiguration des Regelkreises vorgegeben. Die Zustandsvektor-Rückkopplung, die dies bewerkstelligen soll, hat die Form

$$u_k = -\mathbf{L}\mathbf{x}_k$$

und wird folgendermaßen ermittelt:

- Aufstellung der Steuerbarkeitsmatrix

$$S_u = [\mathbf{b} \quad \mathbf{\Phi}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{\Phi}^{n-1}\mathbf{b}]$$

und Überprüfung ihrer Regularität.

- Ermittlung der 1. Zeile  $\mathbf{t}_1^T$  der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  aufgrund der Beziehung

$$\mathbf{t}_1^T = \mathbf{e}_n^T \mathbf{S}_u^{-1}$$

Hinweis:  $\mathbf{e}_n$  bezeichnet den kanonischen Einheitsvektor n-ter Ordnung.

Beispielsweise gilt für  $n = 3$ :  $\mathbf{e}_3^T = [0 \ 0 \ 1]$

- Berechnung von

$$w(\Phi) = \prod_{i=1}^n (\Phi - \lambda_i \mathbf{E}) = \Phi^n + w_{n-1} \Phi^{n-1} + \dots + w_1 \Phi + w_0 \mathbf{E}$$

- Ermittlung des Vektors  $\mathbf{L}$  der Reglerparameter durch

$$\mathbf{L} = \mathbf{t}_1^T w(\Phi)$$

Anmerkung: Zur numerischen Ermittlung des Vektors  $\mathbf{L}$  gibt es eine Reihe von zuverlässigen Algorithmen. Die Verwendung der Formel von Jürgen Ackermann bei Systemen höherer Ordnung kann zu numerischen Problemen führen. [21]

### 3.1.3 Anwendung

Die Verwendung eines Zustandsreglers, der durch Eigenwertvorgabe berechnet wurde, ist rechnerisch sehr einfach.

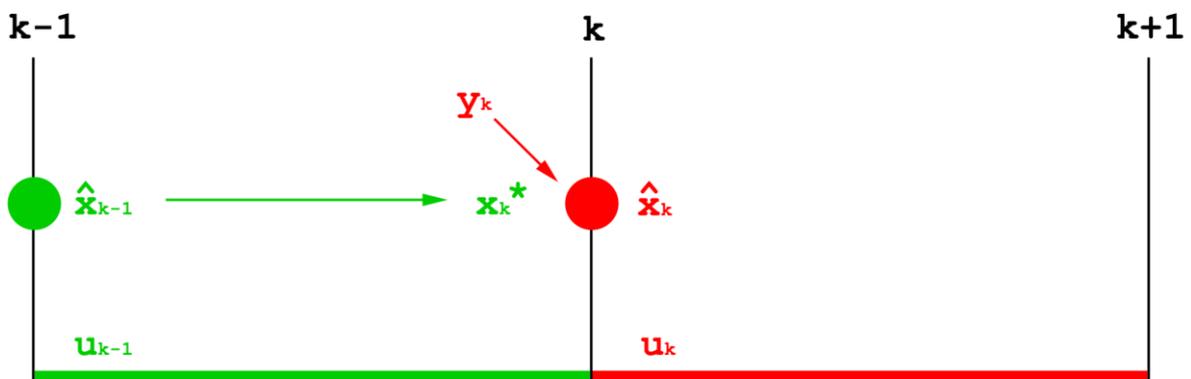


Abbildung 6: Zeitlicher Verlauf der Systemgrößen bei Eigenwertvorgabe

Wie in Abbildung 6 dargestellt, wird die Stellgröße  $u_k$  aus der zugehörigen Prädiktion des Systemzustandes  $\mathbf{x}_k^*$  und der gemessenen Ausgangsgröße  $y$  berechnet. Die Zeitverzögerung  $\tau_k$  zwischen der Messung der Ausgangsgröße und dem Anliegen der neu berechneten Stellgröße an der Strecke wird vernachlässigt.

Vom Regler müssen die folgenden Berechnungen ausgeführt werden:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{x}_k^* + \mathbf{K}_\infty \cdot (y_k - \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_k^*) \\ u_k &= -\mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{x}}_k \\ \mathbf{x}_{k+1}^* &= \mathbf{\Phi} \cdot \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{b} \cdot u_k\end{aligned}\tag{3.1}$$

Es gelten die folgenden Definitionen:

- $\mathbf{x}_0^* = \mathbf{m}_0$  ist, wie schon im Kapitel zur Zustandsschätzung beschrieben, der Erwartungswert für den Startwert von  $\mathbf{x}_k^*$ .
- $\mathbf{K}_\infty$  bezeichnet den stationären Endwert der Kalman-Matrix. Es wird dieser konvergierte Wert anstatt der zeitveränderlichen Form verwendet, da das Ziel ein möglichst einfacher Vergleichsregler ist. Dadurch kann die Berechnung schneller abgeschlossen werden und es werden weniger Ressourcen verwendet.
- Der Parametervektor  $\mathbf{L}$  wurde wie in diesem Kapitel beschrieben berechnet.
- Die Streckenparameter  $\mathbf{\Phi}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  wurden durch Diskretisierung der kontinuierlichen Strecke mit der Abtastzeit  $h$  errechnet.

Anmerkung: Die Berechnungen von  $\hat{\mathbf{x}}_k$  und  $u_k$  erfolgen zeitkritisch, die Prädiktion  $\mathbf{x}_{k+1}^*$  kann unkritisch vorberechnet werden.

### 3.1.4 Vor- und Nachteile

- + Berechnung einfach
- Stabilität nicht garantiert
- Kostenfunktion ignoriert

## 3.2 Deterministische Regelung mit Puffer

Die durch das Netzwerk verursachte Zeitverzögerung beträgt, wie bereits erläutert,  $\tau_k \in [0, \tau_{\max}]$ . Luck und Ray [9] schlugen daher vor, gezielt Puffer an Regler und Aktor anzubringen. Wählt man die Pufferzeit größer als die maximale Zeitverzögerung, kann das resultierende System deterministisch beschrieben werden.

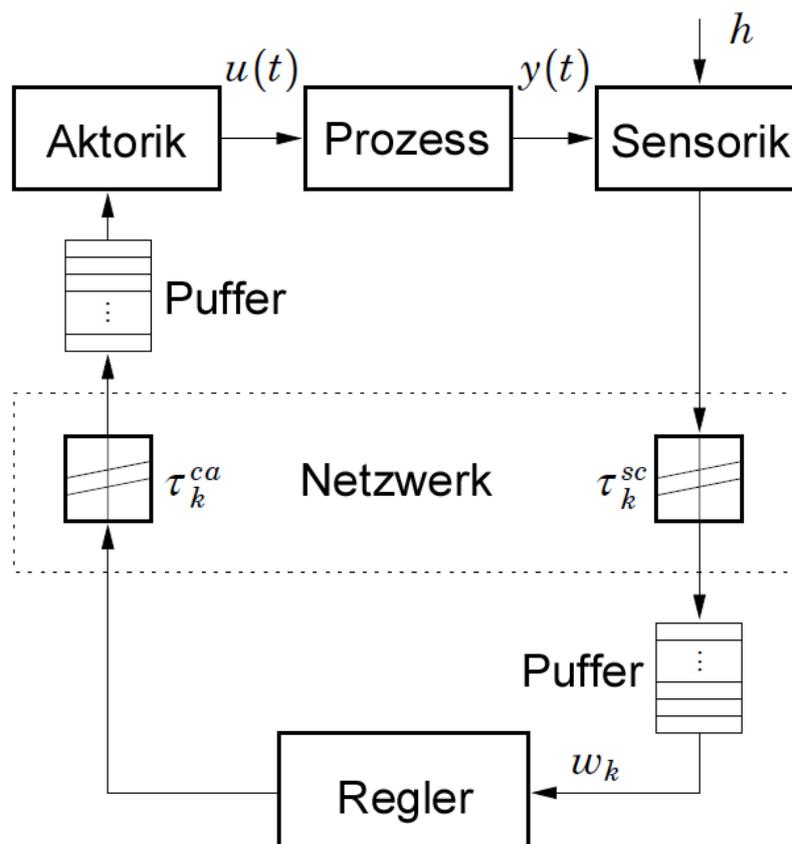


Abbildung 7: Verwendung von Puffern, um das System zeitinvariant zu machen

Somit kann der Prozess beschrieben werden als

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-\Delta} \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k\end{aligned}$$

Die Bezeichnung  $\mathbf{u}_{k-\Delta}$  beschreibt hierbei, dass die Stellgröße  $\mathbf{u}$  aufgrund der Puffer um insgesamt  $\Delta$  Zeitschritte verzögert wird. Dies bedeutet, die Zeitverzögerung innerhalb der Regelschleife wird konstant mit  $\tau_k^{scr} = \Delta \cdot h$ . Ausgehend von diesen Gleichungen kann nun ein LQG-optimaler Regler berechnet werden.

### 3.2.1 Annahmen

Der folgende Reglerentwurf basiert nicht auf den Ergebnissen von Luck und Ray, sondern es wird ein optimaler Reglerentwurf aus [19] verwendet. Dies soll die Simulationsergebnisse vergleichbarer machen, da im nächsten Kapitel ein stochastischer Regler mit denselben Formeln berechnet wird.

Die in der Angabe geforderte Kostenfunktion (1.2) lautet

$$J_N = E\{\mathbf{x}_N^T \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_N\} + E\left\{ \sum_{k=0}^N \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix}^T \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \right\},$$

der folgende Reglerentwurf basiert jedoch auf einer speziellen Form dieser Kostenfunktion, bei der die Stellgröße und der Verlauf der Zustandsgrößen getrennt gewichtet werden. Dadurch gilt folgende Einschränkung für die Gewichtungsmatrix  $\mathbf{Q}$ :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{Q}_u \end{bmatrix}$$

### 3.2.2 Reglerauslegung

Folgendes rekursives System bestimmt die unbekanntenen Matrizen:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_k &= (\mathbf{Q}_u + \mathbf{B}_k^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{B}_k)^{-1} \mathbf{B}_k^T \mathbf{P}_{k+1} \Phi_k \\ \mathbf{P}_k &= \Phi_k^T \mathbf{P}_{k+1} (\Phi_k - \mathbf{B}_k \mathbf{L}_k) + \mathbf{Q}_x\end{aligned}\tag{3.2}$$

Das Ergebnis ist ein zeitvarianter Regler. Nachdem diese Gleichungen jedoch konvergieren, kann der stationäre Endwert als zeitinvarianter Regler verwendet werden. Mit  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0$  gilt nun wieder:

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{L}\mathbf{x}_k$$

Für den Rekursionsbeginn gilt:

$$\mathbf{P}_N = \mathbf{Q}_N$$

### 3.2.3 Anwendung

Die Verwendung eines gepufferten Zustandsreglers lässt sich mit dem folgenden Bild einleuchtend erklären. Um die Vergleichbarkeit der Simulationen zu gewährleisten, basieren die in dieser Arbeit verwendeten Regler auf der Annahme  $\tau_k \in [0, h]$ .

Dadurch wird die maximale Pufferzeit zu  $\tau_{\max} = h$  bzw.  $\Delta = 1$ .

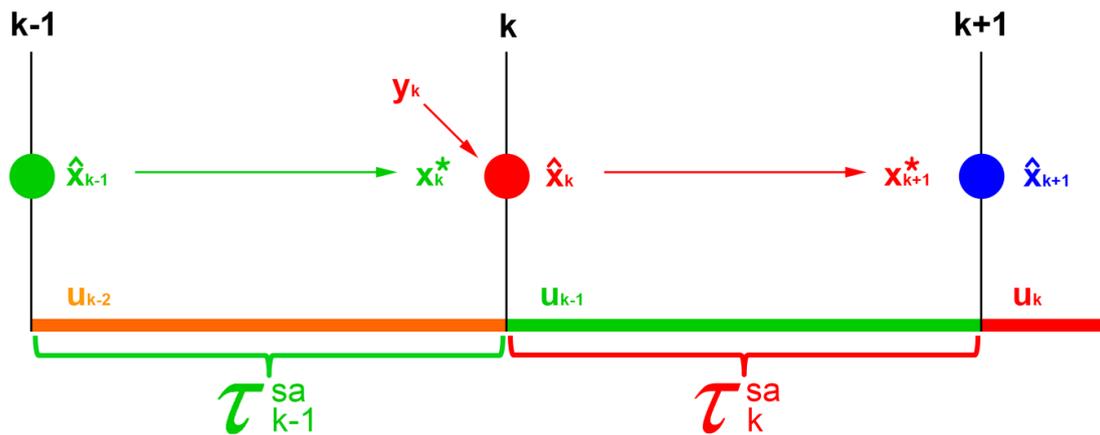


Abbildung 8: Zeitlicher Verlauf der Systemgrößen bei gepufferter Regelung

Wie in Abbildung 8 dargestellt, wird die Stellgröße  $u_k$  aus den bekannten Werten  $\mathbf{x}_k^*$  und  $u_{k-1}$  sowie der gemessenen Ausgangsgröße  $y_k$  durch Prädiktion des zukünftigen Systemzustandes  $\mathbf{x}_{k+1}^*$  berechnet. Die Zeitverzögerung  $\tau_k$  zwischen der Messung der Ausgangsgröße und dem Anlegen der neuen Stellgröße an die Strecke wird durch Pufferung um  $\Delta = 1$  Zeitschritte konstant gehalten und beträgt dadurch genau eine Periodendauer  $h$ .

Vom Regler müssen die folgenden Berechnungen ausgeführt werden:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k^* + \mathbf{K}_k \cdot (y_k - \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_k^*) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{x}_{k+1}^* = \mathbf{\Phi} \cdot \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B} \cdot u_{k-1}$$

$$u_k = -\mathbf{L} \cdot \mathbf{x}_{k+1}^*$$

Es gelten die in den vorherigen Kapiteln aufgestellten Definitionen für die jeweiligen Parameter.

Anmerkung: Diese drei Berechnungen erfolgen zeitkritisch, es ist keine Vorberechnung möglich. Dadurch erhöht sich die Rechenzeit des Reglers, was bei der Wahl der Pufferzeit berücksichtigt werden sollte. Bei Verwendung von

Pufferzeiten  $\tau_{\max} \neq h$  muss die Berechnung etwas abgeändert werden. Für  $\tau_{\max} \leq h$  gilt beispielsweise:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{x}_k^* + \mathbf{K}_\infty \cdot (y_k - \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_k^*) \\ \tilde{\mathbf{x}}_{k+} &= \mathbf{A}(\tau_{\max}) \cdot \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}(\tau_{\max}) \cdot u_{k-1} \\ u_k &= -\mathbf{L} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{k+} \\ \mathbf{x}_{k+1}^* &= \mathbf{\Phi} \cdot \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{\Gamma}_0(\tau_{\max}) \cdot u_k + \mathbf{\Gamma}_1(\tau_{\max}) \cdot u_{k-1}\end{aligned}$$

Dieser Fall, bei dem die Pufferdauer ungleich einem Vielfachen der Periodendauer ist, wurde hier nur der Vollständigkeit halber festgehalten. Im ursprünglichen Algorithmus von Luck und Ray wurde die Anzahl der Zeitschritte  $\Delta$  als positive Ganzzahl bezeichnet, eine Pufferung um beispielsweise  $\Delta = 0,8$ , bzw.  $\tau_k^{sa} = 0,8 \cdot h$ , wäre jedoch grundsätzlich möglich. Die hier verwendeten Symbole werden in Kapitel 3.3 näher erklärt, Abbildung 9 verdeutlicht die zeitlichen Zusammenhänge dieses Falles. Für  $\tau_{\max} \geq h$  muss eine Prädiktion in die fernere Zukunft gemacht werden. Insbesondere bei instabilen Strecken muss dabei Wert auf die Robustheit gegenüber Störungen gelegt werden.

### 3.2.4 Vor- und Nachteile

- + Reglerentwurf für Mehrgrößensysteme geeignet
- + Betrieb unabhängig von der Schwankung der Zeitverzögerung
- + Methode geeignet für Verzögerungen, die länger als die Abtastperiode sind:  $\tau_{\max} > h$
- Einbringung künstlicher Verzögerungen, die länger sind als notwendig

### 3.3 Heuristischer Ansatz zu optimaler stochastischer Regelung

Basierend auf den bisherigen Ergebnissen wird nun ein heuristischer Ansatz verfolgt. Es wird ein nichtlinearer Regelalgorithmus entworfen, welcher versucht, die tatsächliche Netzwerkverzögerung  $\tau_k$  zu berücksichtigen.

#### 3.3.1 Annahmen

- Da dieser stochastische Ansatz auf demselben optimalen Regler basiert, wie im gepufferten Fall, gilt wieder die Einschränkung auf eine Gewichtungsmatrix  $\mathbf{Q}$  der Form:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{Q}_u \end{bmatrix}$$

- Es muss eine Messung der vergangenen Netzwerkverzögerungen  $[\tau_{k-1}, \tau_{k-2}, \dots]$ , sowie der aktuellen Verzögerung bis zum Regler  $\tau_k^{sc}$  erfolgen.
- Es gilt wieder die Bedingung  $\Delta\tau < h$ . Ist die Echtzeitfähigkeit des Netzwerkes nicht garantiert, muss ein Puffer eingeführt werden, sodass die Einhaltung der Bedingung garantiert ist.

#### 3.3.2 Reglerauslegung

Die Systemparameter  $\mathbf{A}(\xi)$  und  $\mathbf{B}(\xi)$  werden durch Diskretisierung in Abhängigkeit der Periodendauer, hier  $\xi \in [E\{\tau_k^{sa}\}, h + E\{\tau_k^{sa}\}]$ , ermittelt. Anschließend wird mithilfe der bekannten rekursiven Gleichungen der nichtlineare Regler  $\mathbf{L}(\xi) = \mathbf{L}_0(\xi)$  berechnet.

$$\mathbf{L}_k(\xi) = (\mathbf{Q}_u + \mathbf{B}_k^T(\xi)\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{B}_k(\xi))^{-1}\mathbf{B}_k^T(\xi)\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{A}_k \quad (3.4)$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{A}_k^T(\xi)\mathbf{P}_{k+1}(\mathbf{A}_k(\xi) - \mathbf{B}_k(\xi)\mathbf{L}_k) + \mathbf{Q}_x$$

Für den Rekursionsbeginn gilt wieder:

$$\mathbf{P}_N = \mathbf{Q}_N$$

### 3.3.3 Anwendung

Durch Messung vergangener Netzwerkverzögerungen  $[\tau_{k-1}, \tau_{k-2}, \dots]$  sowie der aktuellen Verzögerung bis zum Regler  $\tau_k^{sc}$  wird versucht abzuschätzen, wie lange die voraussichtliche Laufzeit des nächsten Steuersignals bis zu den Aktoren  $\tilde{\tau}_k^{sa}$  ist. Der voraussichtliche Systemzustand zu diesem Zeitpunkt  $\tilde{\mathbf{x}}_{k+}$  wird berechnet.

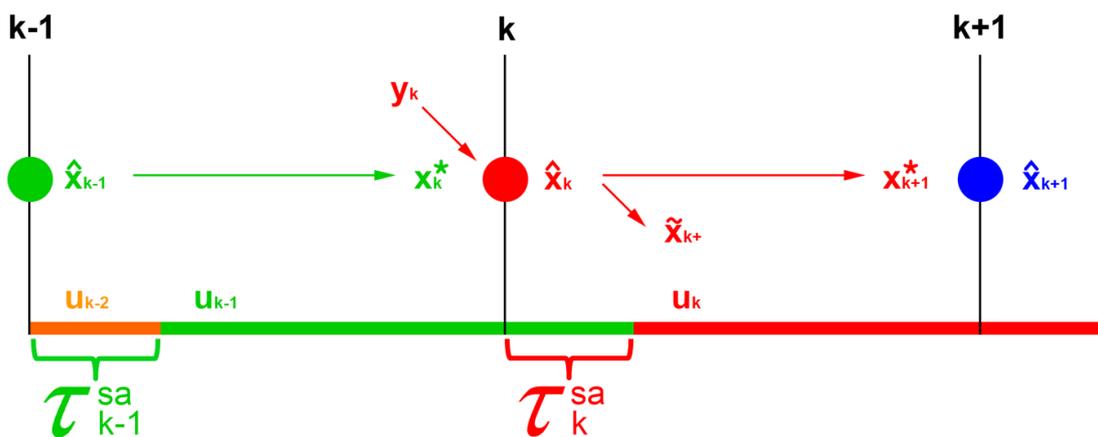


Abbildung 9: Zeitlicher Verlauf der Systemgrößen bei heuristischer Regelung

Wie in Abbildung 9 dargestellt, wird die Stellgröße  $u_k$  aus der dazugehörigen Prädiktion des Systemzustandes  $\mathbf{x}_k^*$ , der gemessenen Ausgangsgröße  $y$ , der gemessenen vergangenen Laufzeit  $\tau_{k-1}$  und einer Schätzung der Signallaufzeit  $\tilde{\tau}_k^{sa}$  durch Prädiktion des voraussichtlichen Systemzustandes  $\tilde{\mathbf{x}}_{k+}$  berechnet.

Vom Regler müssen die folgenden Berechnungen ausgeführt werden:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_k^* &= \mathbf{A}(h) \cdot \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \Gamma_0(\tau_{k-1}^{sa}) \cdot \mathbf{u}_{k-1} + \Gamma_1(\tau_{k-1}^{sa}) \cdot \mathbf{u}_{k-2} \\
 \hat{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{x}_k^* + \mathbf{K}_k \cdot (y_k - \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_k^*) \\
 \tilde{\tau}_k^{sa} &= \tau_k^{sc} + \tau_k^c + E\{\tau_k^{ca}\} \\
 \tilde{\mathbf{x}}_{k+} &= \mathbf{A}(\tilde{\tau}_k^{sa}) \cdot \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}(\tilde{\tau}_k^{sa}) \cdot \mathbf{u}_{k-1} \\
 u_k &= -\mathbf{L}(h + E\{\tau_k^{sa}\} - \tilde{\tau}_k^{sa}) \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{k+}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Anmerkung: Diese fünf Berechnungen erfolgen zeitkritisch, es ist keine Vorberechnung möglich.

Folgende Erklärung soll die Bedeutung dieser Gleichungen verdeutlichen:

1. Der aktuelle Prädiktionwert  $\mathbf{x}_k^*$  kann nicht vorberechnet werden, da die Messwerte von  $\tau_{k-1}^{sa}$  erst zum Zeitpunkt  $k$  vorliegen.
2. Der aktuelle optimale Schätzwert  $\hat{\mathbf{x}}_k$  wird nach Kalman berechnet.
3. Die geschätzte Signallaufzeit, bis zum Eintreffen des aktuellen Steuersignals  $\tilde{\tau}_k^{sa}$ , wird durch Addition der gemessenen aktuellen Laufzeit zwischen Sensor und Regler  $\tau_k^{sc}$ , der konstanten Rechenzeit des Reglers  $\tau_k^c$  und dem Erwartungswert der Laufzeit zwischen Regler und Aktor  $E\{\tau_k^{ca}\}$  berechnet.
4. Der Prädiktionwert  $\tilde{\mathbf{x}}_{k+}$  bezeichnet den Systemzustand, der vermutlich bei Eintreffen des Steuersignals vorliegen wird.
5. Die Stellgröße  $u_k$  wird nun durch Multiplikation der Regelparameter  $\mathbf{L}(\xi)$  mit dem Zustand  $\tilde{\mathbf{x}}_{k+}$  bestimmt. Die Wahl von  $\xi$  bedeutet: Ist die geschätzte Signallaufzeit kürzer als ihr Erwartungswert, es gilt  $E\{\tau_k^{sa}\} - \tilde{\tau}_k^{sa} > 0$ , so wird die Stellgröße vermutlich um diese Zeitdifferenz länger als  $h$  am Aktor anliegen, bevor sie von  $u_{k+1}$  ersetzt wird. Dies wird durch die Länge der farbigen Balken in Abbildung 9 symbolisiert.

### 3.3.4 Vor- und Nachteile

- + Reglerentwurf für Mehrgrößensysteme geeignet
- + Zeitverzögerungen berücksichtigt
  
- Rechenaufwand groß
- Es gilt die Beschränkung  $\Delta\tau < h$ .
- Es wird nicht die allgemeine Form der Gewichtungsmatrix  $\mathbf{Q}$  für die Berechnung der Kostenfunktion verwendet.
- Da es ein heuristischer Ansatz ist, kann nicht einmal die Stabilität garantiert werden, geschweige denn die Optimalität der Lösung.

## 3.4 Optimale Regelung nach Nielsson

Im Jahre 1998 verfasste Johan Nilsson seine Doktorarbeit „Real-Time Control Systems with Delays“ [1]. Seine Arbeit behandelt die mathematische Modellierung, die experimentelle Messung sowie die regelungstechnische Berücksichtigung von Netzwerkverzögerungen. Eines der Kerngebiete war die optimale stochastische Regelung, welche in diesem Kapitel vorgestellt wird.

### 3.4.1 Annahmen

Wie in den vorherigen Ansätzen gelten die folgenden Annahmen:

- Die Sensoren werden mit der Periodendauer  $h$  abgetastet.
- Die Aktoren sind ereignisgesteuert und die Stellgröße wird angelegt, sobald sie verfügbar ist.
- Die Verzögerung zwischen Sensor und Aktor ist kleiner als die Periodendauer.

Es gilt:  $\tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca} < h$ .

- Die Gewichtungsmatrix  $\mathbf{Q}$  ist symmetrisch und hat die Form

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{12}^T & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix},$$

wobei im Vergleich zum deterministischen und heuristischen Ansatz gilt:

$$\mathbf{Q}_{11} = \mathbf{Q}_x \text{ und } \mathbf{Q}_{22} = \mathbf{Q}_u$$

### 3.4.2 Reglerauslegung

Zur Berechnung des Reglers müssen die folgenden rekursiven Gleichungen berechnet werden:

$$\tilde{\mathbf{S}}_{k+1}(\tau_k^{sc}) = \underset{\tau_k^{ca}}{E} \left\{ \mathbf{G}^T(\tau_k^{sc}, \tau_k^{ca}) \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{G}(\tau_k^{sc}, \tau_k^{ca}) \mid \tau_k^{sc} \right\} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{L}_k(\tau_k^{sc}) = (\mathbf{Q}_{22} + \tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^{22})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{12}^T + \tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^{21} & \tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^{23} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_1(\tau_k^{sc}) = (\mathbf{Q}_{22} + \tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^{22})^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_{22} + \tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^{22}) \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ -(\mathbf{Q}_{12}^T + \tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^{21}) & -\tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{L}_k(\tau_k^{sc}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_2(\tau_k^{sc}) = (\mathbf{Q}_{22} + \tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^{22})^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_{22} + \tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^{22}) \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ -(\mathbf{Q}_{12}^T + \tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^{21}) & -\tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^{23} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{Q}_{22} + \tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{L}_k(\tau_k^{sc}) & \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_k = \underset{\tau_k^{ca}}{E} \left\{ \mathbf{F}_1^T(\tau_k^{sc}) \mathbf{Q} \mathbf{F}_1(\tau_k^{sc}) + \mathbf{F}_2^T(\tau_k^{sc}) \tilde{\mathbf{S}}_{k+1}(\tau_k^{sc}) \mathbf{F}_2(\tau_k^{sc}) \right\}$$

Hierbei beschreibt  $\tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^{22}$  den Elementzugriff auf eine Untermatrix von  $\tilde{\mathbf{S}}_{k+1}$ , wie in Kapitel 3.4.3.2 näher beschrieben. Am Ende erhält man somit den Regler  $\mathbf{L}(\tau_k^{sc}) = \mathbf{L}_0(\tau_k^{sc})$ . Wie in den vergangenen Kapiteln beschrieben, ist der berechnete Regler zusätzlich zeitvariant. Da ein festgelegter Endzeitpunkt für die Regelung jedoch nur in mathematischen Berechnungen und Simulationen sinnvoll ist, wird der stationäre Endwert der Berechnung als zeitinvariant angenommen.

Um die Rekursion beginnen zu können, gelten die folgenden Startwerte:

$$\mathbf{G}(\tau_k^{sc}, \tau_k^{ca}) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} & \mathbf{\Gamma}_0(\tau_k^{sc}, \tau_k^{ca}) & \mathbf{\Gamma}_1(\tau_k^{sc}, \tau_k^{ca}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Anmerkungen: Da die Formeln unverändert aus der Arbeit von Nilsson übernommen wurden, sind einige Erklärungen notwendig. Eine Abhängigkeit  $\Psi(\tau_k^{sc}, \tau_k^{ca})$  könnte grundsätzlich auch als  $\Psi(\tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca})$  oder schlicht  $\Psi(\tau_k)$  beschrieben werden. Somit ist es möglich  $\mathbf{G}(\tau_k)$  für alle gültigen Verzögerungen  $\tau_k \in [0, h]$  vorauszuberechnen. In der ersten Zeile der Gleichungen (3.6) wird ein bedingter Erwartungswert gebildet. Dies bedeutet, dass die aktuelle Verzögerung zwischen Regler und Aktor  $\tau_k^{ca}$  noch unbekannt ist, während die Verzögerung zwischen Sensor und Regler  $\tau_k^{sc}$  bereits gemessen wurde. Dies führt dazu, dass die aktuelle Zeitverzögerung nur abgeschätzt werden kann mit  $\tilde{\tau}_k = \tau_k^{sc} + \tau_k^c + E\{\tau_k^{ca}\}$ . Da  $E\{\tau_k^{ca}\}$  im Allgemeinen zeitvariabel ist, ist es somit sinnvoll, alle Berechnungen der Reglerauslegung für den vollen Bereich  $\tau_k$  durchzuführen und einen Regler der Form  $u = -\mathbf{L}(\tilde{\tau}_k) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix}$  zu erstellen.

### 3.4.3 Zusammenfassung der Berechnung

Da die Formeln in (3.6) unübersichtlich sind, werden im Folgenden die notwendigen Berechnungen zusammengefasst. Die verwendeten Formelzeichen werden nochmals definiert, Dimensionen festgelegt und Berechnungsschritte detailliert beschrieben. Dadurch wird die Methodik des optimalen Reglerentwurfs übersichtlich dargestellt und leichter nachvollziehbar.

Zuerst erfolgt ein zusammenfassender Überblick über die bekannten Größen:

$$[\mathbf{A}(h), \mathbf{b}(h), \mathbf{c}(h), d(h)] = c2d(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c, \mathbf{c}_c, d_c, h)$$

$$J_N = E\{\mathbf{x}_N^T \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_N\} + E\left\{\sum_{k=0}^N \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix}^T \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix}\right\}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{12}^T & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\dim(\mathbf{x}) = n \times 1$$

$$\dim(\mathbf{u}) = m \times 1$$

$$\dim(\mathbf{Q}_{11}) = \dim(\mathbf{Q}_{11}) = n \times n$$

$$\dim(\mathbf{Q}_{12}) = n \times m$$

$$\dim(\mathbf{Q}_{22}) = m \times m$$

$$\Phi = \mathbf{A}(h)$$

$$\Gamma_0(\tau^{sa}) = \mathbf{b}(h - \tau_k^{sa})$$

$$\Gamma_1(\tau^{sa}) = \mathbf{A}(h - \tau^{sa}) \cdot \mathbf{b}(\tau^{sa})$$

$$\dim(\Phi) = n \times n$$

$$\dim(\Gamma_0) = \dim(\Gamma_1) = n \times m$$

### 3.4.3.1 Zusammenfassung der Berechnungsschritte

Der nachfolgende Block Pseudocode soll die notwendigen Schritte zur Berechnung des optimalen Reglers nach Nielsson klarer machen.

für alle gewünschten Werte von  $\tau^{sa}$

{

$$\mathbf{S}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_N & \mathbf{0}_{n \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times n} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix}$$

für  $k = N:N-1:0$

{

$$\mathbf{G}_k(\tau^{sa}) = \begin{bmatrix} \Phi_k & \Gamma_{0,k}(\tau^{sa}) & \Gamma_{1,k}(\tau^{sa}) \\ \mathbf{0}_{m \times n} & \mathbf{E}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{k+1}(\tau^{sa}) = \mathbf{G}_k^T(\tau^{sa}) \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{G}_k(\tau^{sa})$$

$$\mathbf{L}_k(\tau^{sa}) = (\mathbf{Q}_{22} + \tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^{22}(\tau^{sa}))^{-1} [\mathbf{Q}_{12}^T + \tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^{21}(\tau^{sa}) \quad \tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^{23}(\tau^{sa})]$$

$$\mathbf{F}_{1,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times m} \\ -\mathbf{L}_k(\tau^{sa}) & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{2,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{1,k} \\ \mathbf{0}_{m \times n} & \mathbf{E}_{m \times m} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{F}_{1,k}^T \mathbf{Q} \mathbf{F}_{1,k} + \mathbf{F}_{2,k}^T \tilde{\mathbf{S}}_{k+1}(\tau^{sa}) \mathbf{F}_{2,k}$$

}

}

### 3.4.3.2 Elementzugriff:

Während der Berechnung des Reglers erfolgt ein Zugriff auf Teile der Matrix  $\tilde{\mathbf{S}}$ . Diese Elemente sind wie folgt definiert:

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_{n \times n}^{11} & \tilde{\mathbf{S}}_{n \times m}^{12} & \tilde{\mathbf{S}}_{n \times m}^{13} \\ \tilde{\mathbf{S}}_{12, T}^{12, T} & \tilde{\mathbf{S}}_{m \times m}^{22} & \tilde{\mathbf{S}}_{m \times m}^{23} \\ \tilde{\mathbf{S}}_{13, T}^{13, T} & \tilde{\mathbf{S}}_{23, T}^{23, T} & \tilde{\mathbf{S}}_{m \times m}^{33} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^{21} = \tilde{\mathbf{S}}(n+1:n+m, 1:n)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^{22} = \tilde{\mathbf{S}}(n+1:n+m, n+1:n+m)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^{23} = \tilde{\mathbf{S}}(n+1:n+m, n+m+1:n+m+m)$$

### 3.4.3.3 Anzahl der Berechnungsschritte:

Da die Berechnung rekursiv erfolgt, muss die Anzahl der Berechnungsschritte  $N$  vorgegeben werden. Dabei wird zwischen Simulationen und der Verwendung für Dauerbetrieb unterschieden:

$$\text{Für Simulationen: } N = \frac{\text{Simulationsdauer}}{h}$$

$$\text{Für Dauerbetrieb: } N \gg 0, \text{ sodass } \mathbf{L}_k(\tau^{sa}) \text{ konvergiert; z. B.: } N = 100$$

### 3.4.4 Anwendung

Vom Regler müssen die folgenden Berechnungen ausgeführt werden:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k^* &= \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \Gamma_0(\tau_{k-1}^{sa}) \cdot \mathbf{u}_{k-1} + \Gamma_1(\tau_{k-1}^{sa}) \cdot \mathbf{u}_{k-2} \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{x}_k^* + \mathbf{K}_k \cdot (y_k - \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_k^*) \\ \tilde{\tau}_k^{sa} &= \tau_k^{sc} + \tau_k^c + E\{\tau_k^{ca}\} \\ u_k &= -\mathbf{L}(\tilde{\tau}_k^{sa}) \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k \\ \mathbf{u}_{k-1} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{3.7}$$

Anmerkung: Diese vier Berechnungen erfolgen zeitkritisch, es ist keine Vorberechnung möglich.

### 3.4.5 Vor- und Nachteile

- + Optimaler Reglerentwurf, der geforderte Kostenfunktion minimiert
- + Reglerentwurf für Mehrgrößensysteme geeignet
- + Zeitverzögerungen berücksichtigt
- + Es wird die allgemeine Form der Gewichtungsmatrix Q für die Berechnung der Kostenfunktion verwendet.
  
- Rechenaufwand groß
- Es gilt die Beschränkung  $\Delta\tau < h$ .

Der Reglerentwurf nach Nielsson stellt den Kerninhalt dieser Arbeit dar. Er beschreibt die optimale stochastische Regelung, die namensgebend für diese Masterarbeit ist. Alle folgenden Simulationen und Berechnungen wurden durchgeführt, um die anderen hier untersuchten Entwurfsverfahren mit diesem optimalen Regler zu vergleichen und eventuelle Vor- bzw. Nachteile festzuhalten.

### 3.5 LMI-Regler

Ein weiterer Ansatz, um mit Netzwerkverzögerungen umzugehen, basiert auf der Lösung linearer Matrix-Ungleichungen (LMI). Hierbei wird versucht einen speicherlosen Regler zu finden, welcher das System asymptotisch stabilisiert. Üblicherweise gehen diese Ansätze davon aus, dass der Zeitabstand zwischen zwei Signalen variabel, aber begrenzt ist  $h_{\min} < h_k < h_{\max}$ . Aufgrund dieser Formulierung als zeitvariante Abtastzeit und der speicherlosen Ausführung des Reglers können diese Regler sowohl mit langen Verzögerungen  $\tau_k > h$  als auch mit Paketverlusten während der Datenübertragung zurechtkommen.

Im Zuge dieser Arbeit wurden mehrere LMI-Ansätze betrachtet. Naghshtabrizi [22] beschreibt beispielsweise einen Zustandsregler der Form  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$ , bei dessen Entwurf die Parameter  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  sowie  $\tau_{\max}$  bekannt sein müssen. Hao [10] geht sogar noch einen Schritt weiter und stellt einen Proportionalregler der Form  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y}$  in Abhängigkeit von  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\tau_{\max}$  sowie  $h$  vor.

Da der LMI-Entwurf asymptotisch stabiler Regler auf Ljapunov-Funktionalen aufbaut, sind diese Regler generell träge, weil ein Überschwingen beim Entwurf ausgeschlossen wurde.

#### 3.5.1 Reglerauslegung

Da diese Gruppe von Reglerentwürfen ihren Namen der numerischen Lösung von Matrix-Ungleichungen verdankt, ist eine analytische Beschreibung der Vorgehensweise nicht möglich. Hier sei lediglich auf die Arbeiten [22] und [10] verwiesen, in denen die zu lösenden LMIs aufgelistet sind. Die in dieser Arbeit verwendeten LMI-Regler wurden vom Institut für Regelungstechnik der TU Graz zur Verfügung gestellt, da LMI-Ansätze weder optimal noch stochastisch sind und folglich das Thema dieser Arbeit nur am Rande berühren.

### 3.5.2 Anwendung

Da alle getesteten LMI-Regler ähnliche Ergebnisse lieferten, wird in den Simulationen der späteren Kapitel nur der Regler nach Hao untersucht. Es gilt:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y}$$

### 3.5.3 Vor- und Nachteile

- + Reglerentwurf für Mehrgrößensysteme geeignet
- + Lange Zeitverzögerungen  $\tau_k > h$  möglich
- + Paketverluste bei der Datenübertragung toleriert
  
- Per Definition träger Regler
- Entwurf ignoriert Kostenfunktion
- Die Lösbarkeit der linearen Matrix-Ungleichungen wird nicht garantiert. Es ist nicht sichergestellt, dass ein Regler überhaupt berechnet werden kann.

Nachdem in diesem Kapitel alle in dieser Arbeit untersuchten Reglerkonzepte vorgestellt wurden, werden in den folgenden Kapiteln die durchgeführten Simulationen beschrieben. Mithilfe dieser Berechnungen werden die Eigenschaften, insbesondere die erreichten Kostenfunktionen, der verschiedenen Regler untersucht. Die Simulationsparameter werden zusammengefasst und die Berechnungsergebnisse grafisch dargestellt.

## 4 Simulationsaufbau

Zum Vergleich der verschiedenen Regelkonzepte wurden verschiedene Simulationen durchgeführt. Strecke, Netzwerk und Regler wurden in MATLAB/Simulink modelliert und die berechneten Verläufe wurden aufgezeichnet.

In Abbildung 10 wird der grundsätzliche Simulationsaufbau dargestellt. Im Block „Strecke“ werden hauptsächlich das von Störgrößen beeinflusste zeitkontinuierliche System und der Verlauf der Zustandsgrößen simuliert. Außerdem werden die bei der Datenübertragung anfallenden Zeitverzögerungen  $\tau_{sc,k}$  und  $\tau_{ca,k}$  generiert. Im Block „Regler“ wird mithilfe der eingehenden Daten eine Schätzung des Systemzustandes berechnet und anschließend die passende Stellgröße  $u_k$  berechnet und ausgegeben.

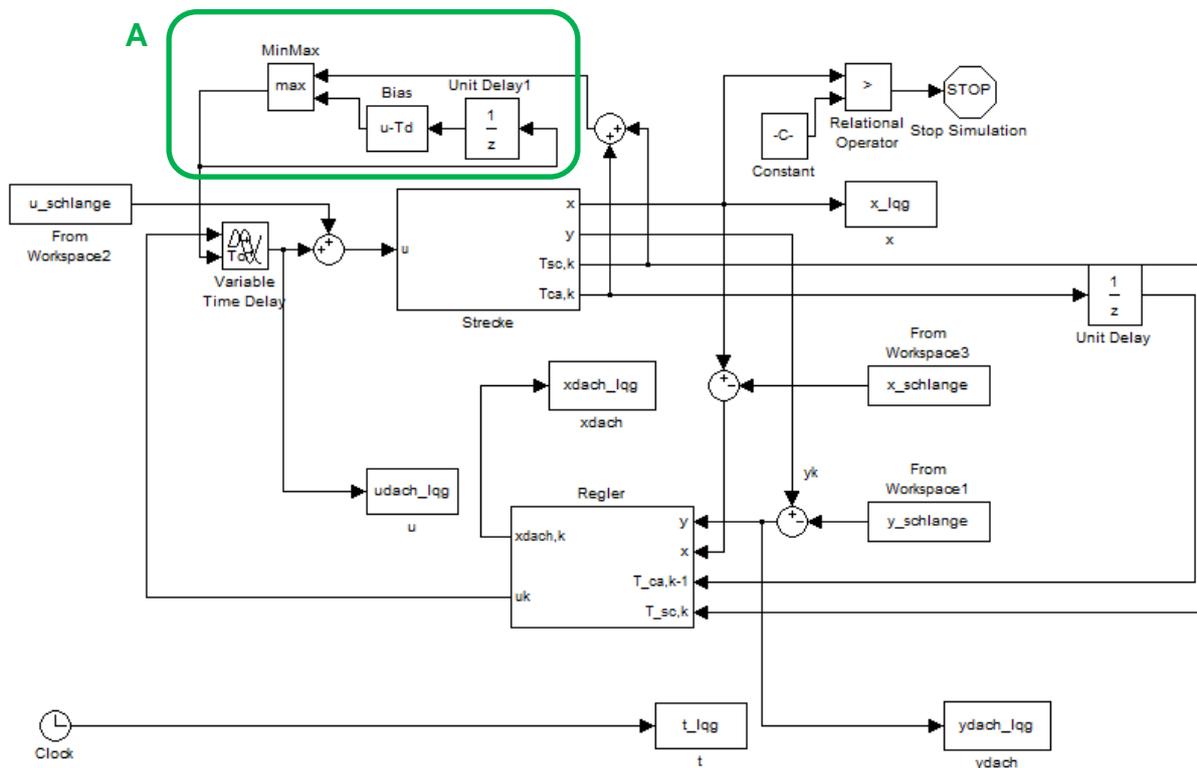


Abbildung 10: Grundsätzlicher Simulationsaufbau in Simulink

Die Konstruktion im markierten Bereich A sorgt dafür, dass bei langen Zeitverzögerungen  $\tau_{k,max} > h$  ein FIFO-Verhalten des Netzwerks sichergestellt ist.

Dies soll verhindern, dass sich Nachrichten während der Übertragung im Netzwerk gegenseitig überholen, um die Reihenfolge der Informationspakete aufrecht zu erhalten. Die Zeitverzögerung von  $\tau_{ca,k}$  um einen Takt soll symbolisieren, dass der Wert dieser Größe zum Berechnungszeitpunkt der Stellgröße nicht verfügbar ist, da  $\tau_{ca,k}$  schließlich die Übertragungsverzögerung zwischen Regler und Aktor darstellt.

#### 4.1 Aufbau der Strecke

Die folgende Abbildung zeigt den Simulationsaufbau einer linearen Strecke. Die Störgrößen  $w_u$  und  $w_y$ , sowie die anfallenden Zeitverzögerungen  $\tau_{sc,k}$  und  $\tau_{ca,k}$  sind normalverteilte Zufallsprozesse, deren Parameter im Hauptprogramm festgelegt werden.

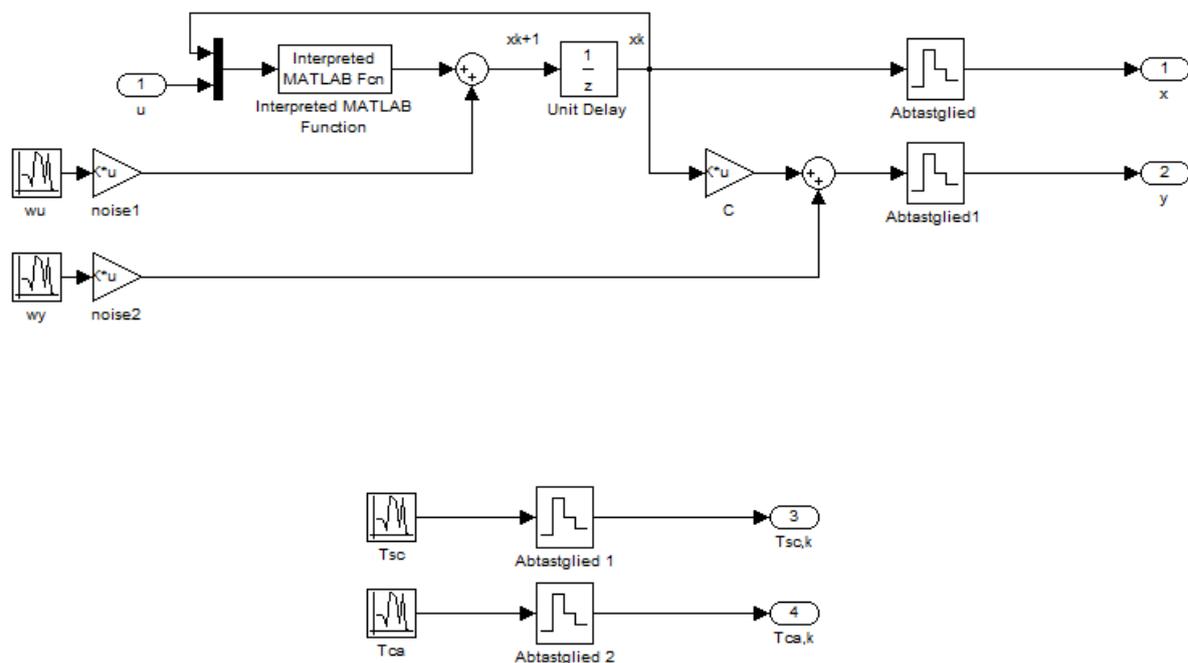


Abbildung 11: Aufbau einer linearen Strecke

Hervorgehoben werden soll die Tatsache, dass die Eingangsgrößen nicht abgetastet werden, da es sich um eine asynchrone Regelung handelt. Die Ausgangsgrößen werden jedoch mit Haltegliedern abgetastet und während der jeweiligen Periodendauer konstant gehalten.

## 4.2 Einbringung der variablen Zeitverzögerung

Ebenfalls in Abbildung 11 werden die im Netzwerk zum Zeitpunkt  $k$  auftretenden Zeitverzögerungen  $\tau_{sc,k}$  und  $\tau_{ca,k}$  generiert. Wie in Abbildung 10 dargestellt, werden diese Zeiten addiert und die eintreffende Stellgröße  $\mathbf{u}_k$  um diese Zeit verzögert. Dadurch soll eine reale Datenübertragung über ein Netzwerk simuliert werden.

## 4.3 Aufbau der Regler

Da der Simulationsaufbau der verschiedenen Regler nicht einheitlich und die schematische Darstellung unübersichtlich ist, wird hier auf eine Abbildung der verschiedenen Reglerimplementationen verzichtet. Schlussendlich werden nur jeweils die in den vorhergehenden Kapiteln beschriebenen Formeln angewandt und in Blockform abgebildet. Stellvertretend stellt Abbildung 31 im Anhang den Aufbau des LQG-Reglers dar.

## 5 Anwendungsbeispiele

In Kapitel 3 wurden die fünf zu untersuchenden Regelkonzepte vorgestellt. Nun werden diese in mathematischen Simulationen verglichen. Dadurch soll festgestellt werden, ob der optimale Regler nach Nilsson deutliche Vorteile gegenüber den einfacheren Entwürfen aufweist.

### 5.1 Regelverhalten einer stabilen linearen Strecke

Um das Verhalten der verschiedenen Architekturen zu untersuchen, wird nun ein stabiles lineares SISO-System betrachtet. Um die Ergebnisse vergleichbar zu halten, wird dieselbe Strecke verwendet, die auch Nilsson in seiner Arbeit [1] getestet hat. Diese Streckendimensionierung wurde erstmals von Doyle und Stein [23] untersucht:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 35 \\ -61 \end{bmatrix} \tilde{w} \\ y &= [2 \quad 1] \mathbf{x} + \tilde{v}\end{aligned}\tag{5.1}$$

Die Systemmatrix  $\mathbf{A}$  hat Eigenwerte bei  $\lambda_1 = -1$  bzw.  $\lambda_2 = -3$  und ist somit stabil. Die Störgrößen  $\tilde{w}(t)$  und  $\tilde{v}(t)$  sind mittelwertfreie stochastische Zufallsprozesse mit Einheitsvarianz. Die Kostenfunktion hat die Form

$$J = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{x}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + u^2) dt \right\}$$

wobei  $\mathbf{H} = 4\sqrt{5} \begin{bmatrix} \sqrt{35} & 1 \end{bmatrix}$  gilt. Für die Abtastperiode wurde  $h = 0,05s$  gewählt. Die Zeitverzögerungen  $\tau_k^{sc}$  und  $\tau_k^{ca}$  sind gleichverteilt im Intervall  $[0, \alpha \cdot h/2]$ . Der Parameter  $\alpha$  ist grundsätzlich frei wählbar, jedoch wurden die Regler unter der Annahme  $0 \leq \alpha \leq 1$  entworfen – dies ist gleichbedeutend mit  $\tau_{\max} \leq h$ . Alle Polstellen des Zustandsreglers nach Ackermann wurden als  $s_i = 0,8$  festgelegt.

### 5.1.1 Zusammenfassung der Simulationsparameter

Zugehörigkeit	Wert
Streckenparameter, zeitkontinuierlich	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{c} = [2 \quad 1]$
	$d = 0$
Startwert	$\mathbf{x}_0 = 100 \cdot [1 \quad -1]$
Abtastzeit	$h = 0,05 s$
Simulationsdauer	$T_{sim} = 5 s$
Rauschen	$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 35 \\ -61 \end{bmatrix} \tilde{w}$
	$\mathbf{v} = \tilde{v}$

Tabelle 1: Stabile Strecke: Simulationsparameter, Angabe

Zugehörigkeit	Wert
Kalman	$\mathbf{P}_0^* = \begin{bmatrix} 2500 & 0 \\ 0 & 2500 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2,8108 & -4,8348 \\ -4,8348 & 8,3160 \end{bmatrix}$
	$R = 1$
Ackermann	$s_i = 0,8$
Puffer, Heuristisch und Nielsson	$\mathbf{Q}_x = 1000 \cdot \begin{bmatrix} 2,8000 & 0,4733 \\ 0,4733 & 0,0800 \end{bmatrix}$
	$Q_u = 1$
	$\mathbf{P}_0 = \mathbf{Q}_N = \mathbf{Q}_x$
Hao	$\tau_{\min} = 0 \cdot h$
	$\tau_{\max} = 2 \cdot h$

Tabelle 2: Stabile Strecke: Simulationsparameter, Berechnung

Zugehörigkeit	Wert
Kalman	$\mathbf{K}_\infty = \begin{bmatrix} 1,1643 \\ -1,9363 \end{bmatrix}$
Ackermann	$\mathbf{L} = [14,6643 \quad 4,3035]$
Puffer, Heuristisch ( $\tau_k = konst$ )	$\mathbf{L} = [38,3588 \quad 8,0013]$
Nielsson ( $\tau_k = 0,5 \cdot h$ )	$\mathbf{L}_0 = [38,5800 \quad 8,2927 \quad 0,2055]$
Hao	$\mathbf{K} = -0,0708$

Tabelle 3: Stabile Strecke: Simulationsparameter, Regler

### 5.1.2 Verhalten im Nennbereich

Bis auf den LMI-Regler verwenden alle behandelten Reglerentwürfe die Annahme  $\tau_{\max} \leq h$ . Um das Regelverhalten der verschiedenen Konzepte innerhalb dieses Nennbereichs zu vergleichen, werden für alle Regleransätze Simulationen durchgeführt und die in der Angabe geforderte Kostenfunktion berechnet. In Abbildung 12 werden die Verläufe der Kostenfunktionen über die variable Zeitverzögerung grafisch dargestellt.

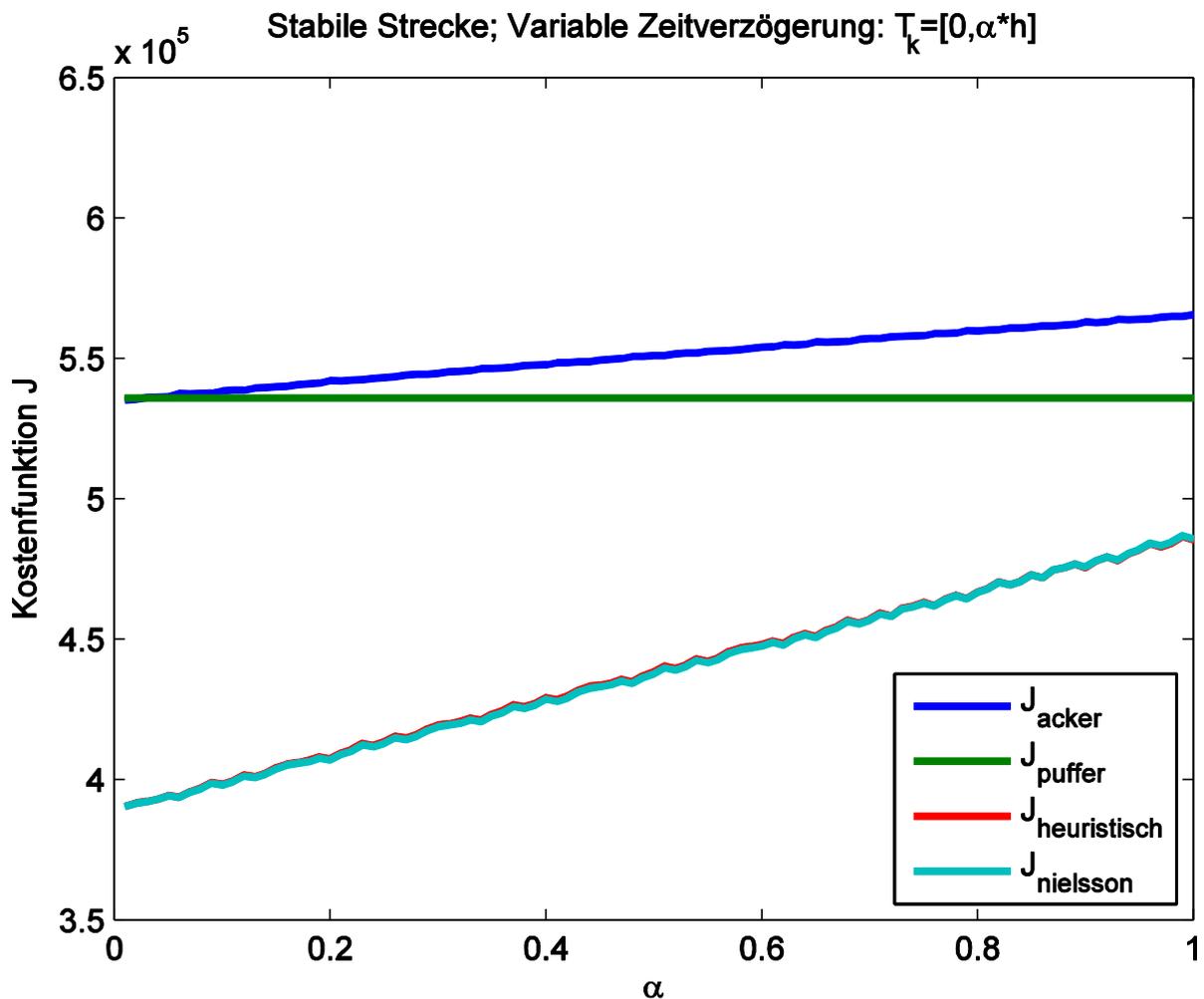


Abbildung 12: Kostenfunktionen der Reglertypen bei stabiler Strecke im Nennbereich

In dieser Abbildung wurde die Kostenfunktion des LMI-Reglers nicht berücksichtigt, um den relevanten Ausschnitt detailliert darstellen zu können. Wie in Abbildung 13 ersichtlich ist, bleibt die Kostenfunktion dieses Reglers erstens größtenteils stabil und ist diese zweitens circa viermal größer als die der anderen Reglertypen. Es zeigt

sich, dass ein LMI-Entwurf zwar sehr robuste Regler hervorbringt, diese aber äußerst träge sind und deshalb das geforderte Kriterium der Optimalität nicht erfüllen.

Hervorzuheben ist außerdem, dass der aus dem heuristischen Ansatz gewonnene Regler nahezu deckungsgleiche Verläufe liefert wie jener, der nach Nielsson berechnet wurde. Obwohl sich die Berechnungsverfahren unterscheiden, kommen sie zu sehr ähnlichen Ergebnissen.

In Abbildung 12 erkennt man, dass die niedrigsten Kostenfunktionen von eben diesen beiden stochastischen Ansätzen erreicht werden. Die Kostenfunktion des gepufferten Reglers ist wie erwartet konstant, da der Puffer dafür sorgt, dass alle Nachrichten nach exakt  $\tau_k = h$  ankommen. Diese unnötige Zusatzverzögerung von Nachrichten wirkt sich jedoch nachteilig auf die Kostenfunktion aus. Der Zustandsregler nach Ackermann liefert die schlechtesten Ergebnisse, was auch wieder den Erwartungen entspricht, da dieser die Zeitverzögerung der Datensignale schlichtweg ignorierte und aus Stabilitätsgründen träger dimensioniert wurde als der Regler mit Puffer.

### 5.1.3 Verhalten bei Verlust der Echtzeitfähigkeit

Da auch das Verhalten der Regler außerhalb des Definitionsbereiches interessiert, wurde die maximale Zeitverzögerung immer weiter erhöht, bis die Stabilität der Regler verloren ging. Die Ergebnisse dieser Simulationen sind in Abbildung 13 dargestellt.

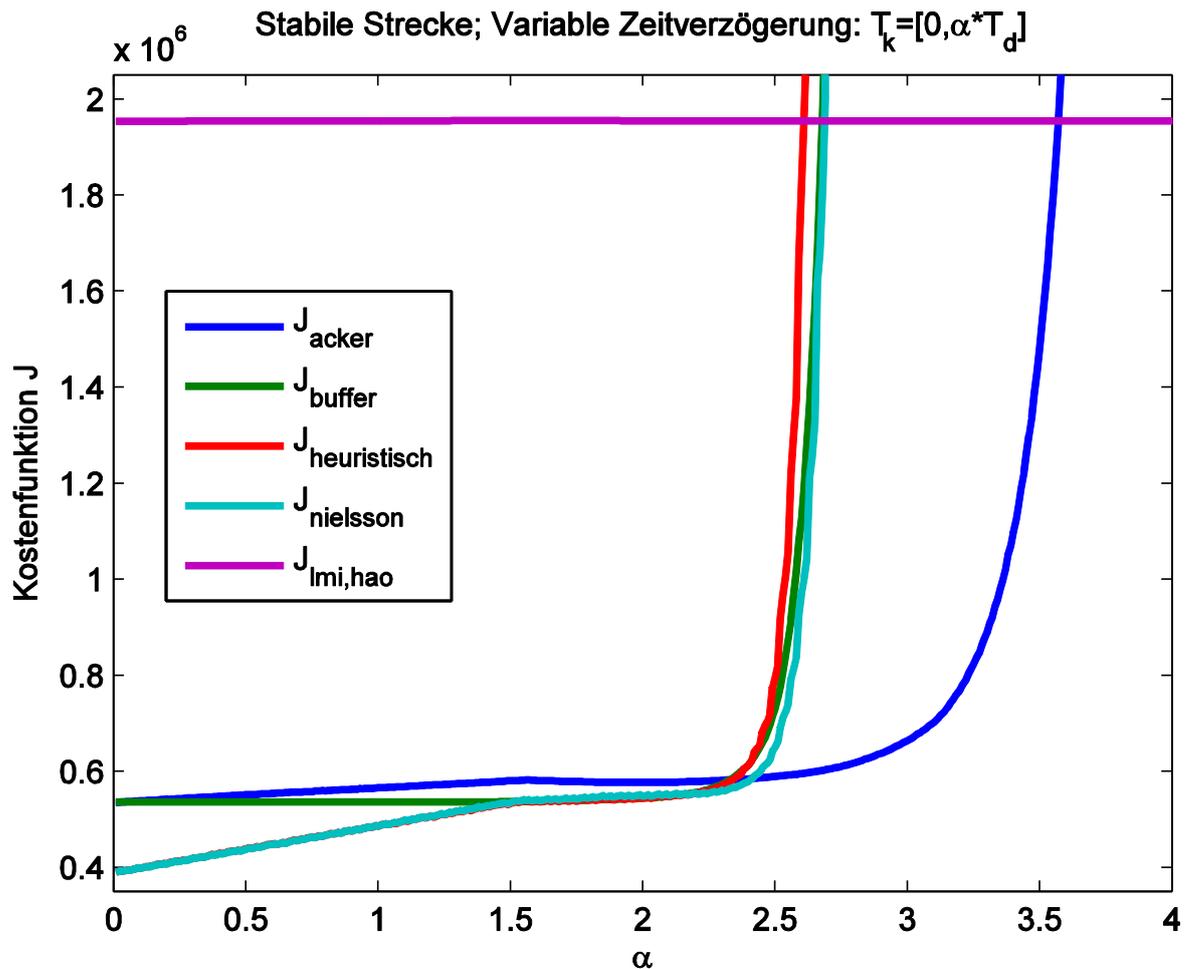


Abbildung 13: Kostenfunktionen der Regler bei stabiler Strecke im gesamten Bereich

Es ist ersichtlich, dass die stochastischen Regler – sowohl der heuristische als auch der Regler nach Nielsson – bis zu einer maximalen Übertragungsverzögerung von  $\tau_{\max} \leq 1,5 \cdot h$  niedrigere Kostenfunktionen liefern als alle anderen Regler. Ab diesem Wert sind die Ergebnisse näherungsweise deckungsgleich mit dem deterministischen Regler, welcher mit einem Puffer arbeitet. Ab einer Verzögerung von circa  $\tau_{\max} \leq 2 \cdot h$  verlieren diese drei Reglertypen schließlich ihre Stabilität.

## 5.2 Regelverhalten einer instabilen linearen Strecke

Da die Regelung einer ohnehin stabilen Strecke im Allgemeinen keine Herausforderung darstellt, wurden anschließend kleine Änderungen am Modell durchgeführt, um ein instabiles Systemverhalten zu simulieren. Die neue Strecke

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 35 \\ -61 \end{bmatrix} \tilde{w} \\ y &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \tilde{v}\end{aligned}\tag{5.2}$$

zeichnet sich durch eine andere Systemmatrix  $\mathbf{A}$  aus, hat Eigenwerte bei  $\lambda_1 = -0,6458$  bzw.  $\lambda_2 = 4,6458$  ( $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{7}$ ) und ist somit instabil. Alle anderen Parameter wurden unverändert belassen.

Hervorzuheben ist, dass diese Vorzeichenänderung innerhalb der Systemmatrix dazu geführt hat, dass die Berechnung des LMI-Reglers nach Hao fehlschlägt. Der nach diesem Verfahren berechnete Regler kann die simulierte Strecke nicht stabilisieren. Im folgenden Abschnitt wird deshalb der LMI-Regler nicht weiter betrachtet.

### 5.2.1 Zusammenfassung der Simulationsparameter

Zugehörigkeit	Wert
Streckenparameter, zeitkontinuierlich	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{c} = [2 \quad 1]$
	$d = 0$
Startwert	$\mathbf{x}_0 = 100 \cdot [1 \quad -1]$
Abtastzeit	$h = 0,05 s$
Simulationsdauer	$T_{sim} = 5 s$
Rauschen	$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 35 \\ -61 \end{bmatrix} \tilde{w}$
	$\mathbf{v} = \tilde{v}$

Tabelle 4: Instabile Strecke: Simulationsparameter, Angabe

Zugehörigkeit	Wert
Kalman	$\mathbf{P}_0^* = \begin{bmatrix} 2500 & 0 \\ 0 & 2500 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2,8108 & -4,8348 \\ -4,8348 & 8,3160 \end{bmatrix}$
	$R = 1$
Ackermann	$s_i = 0,8$
Puffer, Heuristisch und Nielsson	$\mathbf{Q}_x = 1000 \cdot \begin{bmatrix} 2,8000 & 0,4733 \\ 0,4733 & 0,0800 \end{bmatrix}$
	$Q_u = 1$
	$\mathbf{P}_0 = \mathbf{Q}_N = \mathbf{Q}_x$
Hao	$\tau_{\min} = 0 \cdot h$
	$\tau_{\max} = 2 \cdot h$

Tabelle 5: Instabile Strecke: Simulationsparamter, Berechnung

Zugehörigkeit	Wert
Kalman	$\mathbf{K}_\infty = \begin{bmatrix} -0,6157 \\ 2,0085 \end{bmatrix}$
Ackermann	$\mathbf{L} = [17,4443 \quad 10,9412]$
Puffer, Heuristisch( $\tau_k = konst$ )	$\mathbf{L} = [36,5482 \quad 14,1522]$
Nielsson( $\tau_k = 0,5 \cdot h$ )	$\mathbf{L}_0 = [37,7981 \quad 15,7713 \quad 0,2282]$

Tabelle 6: Instabile Strecke: Simulationsparamter, Regler

## 5.2.2 Verhalten im Nennbereich

In Abbildung 14 werden die Verläufe der berechneten Kostenfunktionen über die variable Zeitverzögerung wieder grafisch dargestellt.

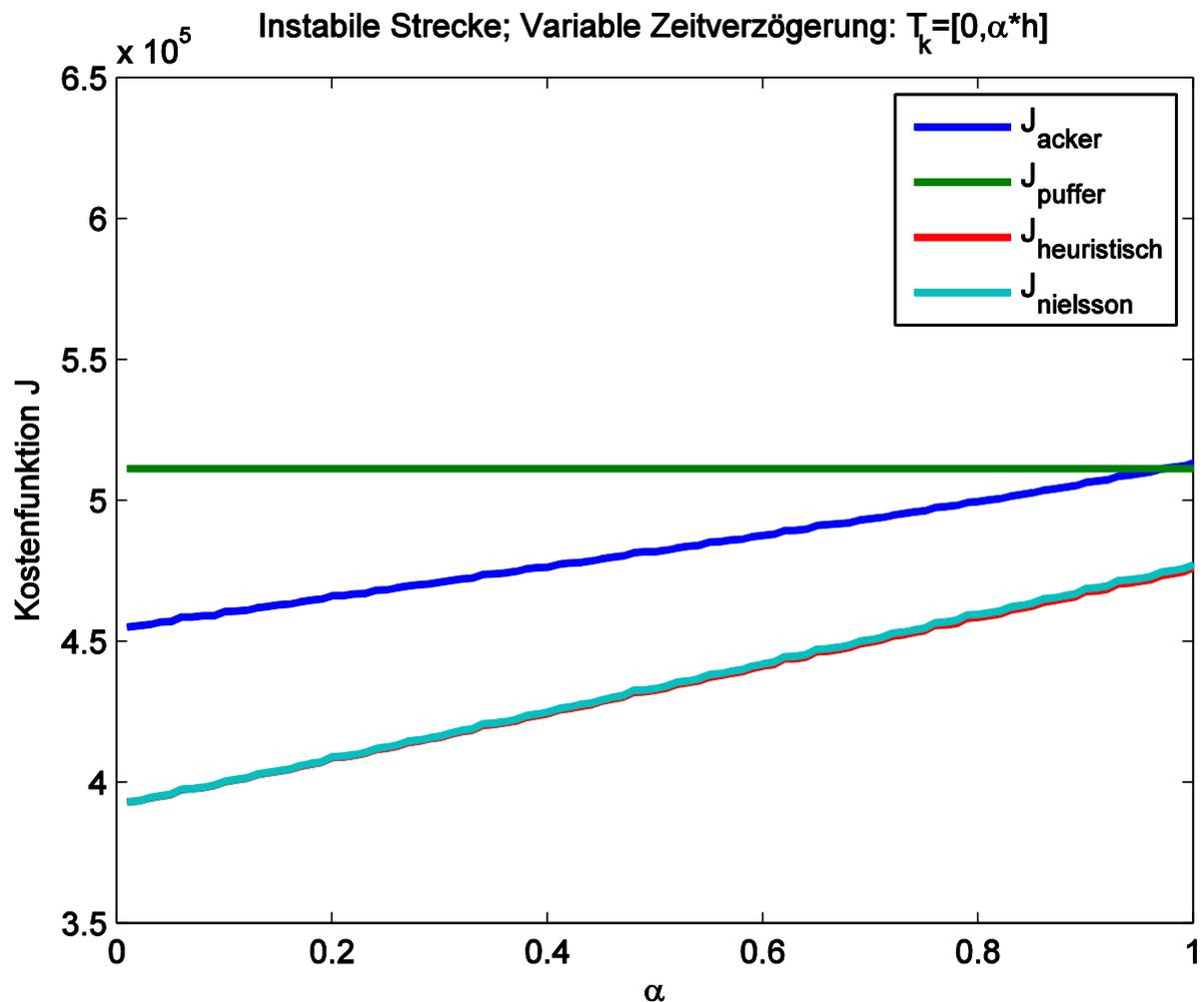


Abbildung 14: Kostenfunktionen der Regler bei instabiler Strecke im Nennbereich

Es ist ersichtlich, dass die beiden stochastischen Ansätze sehr ähnliche Ergebnisse liefern und durchgehend eine niedrigere Kostenfunktion aufweisen als die Vergleichsregler, während der gepufferte Regler innerhalb des Nennbereiches funktionsgemäß eine konstante Kostenfunktion hat. Bemerkenswert ist jedoch das Abschneiden des Zustandsreglers nach Ackermann. Entgegen der Erwartung ist dessen Kostenfunktion im Großteil des Nennbereichs deutlich niedriger als jene des gepufferten Reglers, wobei beide besser abschneiden als im stabilen Fall.

Um dieses Ergebnis zu untersuchen, wurden die simulierten Verläufe festgehalten. Im Anhang befinden sich dazu Abbildung 25, Abbildung 26, Abbildung 27 und Abbildung 28. Diese legen die Vermutung nahe, dass der Anfangsschätzfehler im Fall der Polvorgabe nach Ackermann dazu führt, dass die Stellgröße  $u$  niedriger ausfällt als eigentlich notwendig. Da die Zustandsgrößen aber trotzdem relativ zügig abnehmen, ergibt sich somit eine geringere Kostenfunktion verglichen mit dem gepufferten Regler.

### 5.2.3 Verhalten bei Verlust der Echtzeitfähigkeit

Wird die maximal zugelassene Zeitverzögerung wieder über die Grenzen des Nennbereiches hinaus erhöht, ergibt sich der in Abbildung 15 dargestellte Verlauf.

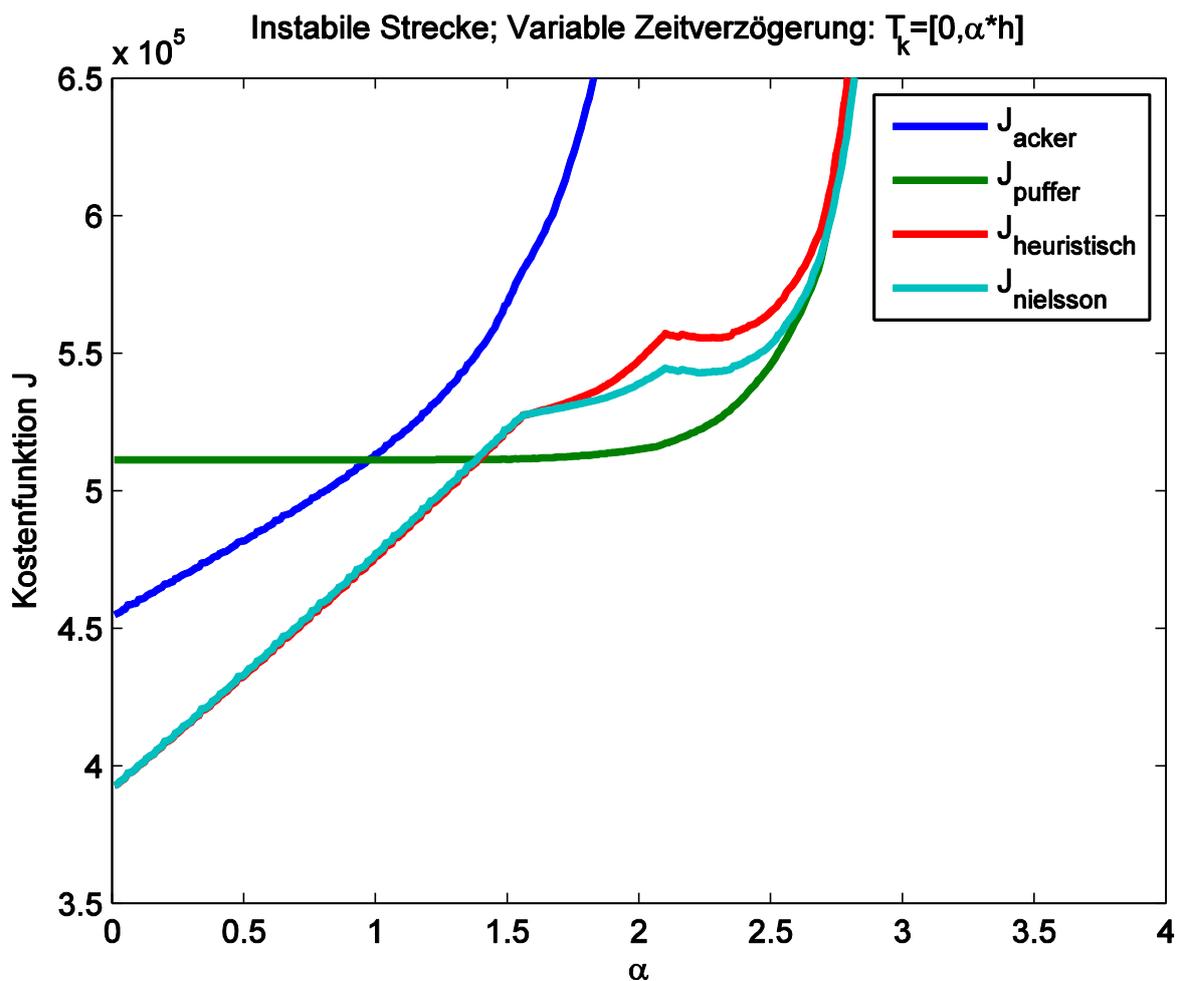


Abbildung 15: Kostenfunktionen der Regler bei instabiler Strecke im gesamten Bereich

Es zeigt sich, dass bis zu einer Zeitverzögerung von circa  $\tau_{\max} \leq 1,5 \cdot h$  die beiden stochastischen Regler die niedrigsten Kostenfunktionen aufweisen. Bei längeren Verzögerungen schneidet in diesem Fall der gepufferte Regelansatz merklich besser ab.

### 5.3 Robustheit gegenüber Modellungenauigkeiten

Nun soll untersucht werden, wie sich Ungenauigkeiten in der Angabe auf das Regelverhalten auswirken. Dafür wurde die Systemmatrix  $\mathbf{A}$  zufällig verzerrt, die folgenden Zeilen MATLAB-Code zeigen die Methode:

```
km = 0.5;  
A = A_.*((1-(km/2))*ones(size(A_)) + km*rand(size(A_)));
```

Hierbei stellt  $\mathbf{A}_$  die tatsächliche Systemmatrix dar, während  $\mathbf{A}$  das angenommene Modell kennzeichnet. Dies bedeutet, alle Regler wurden mithilfe der Matrix  $\mathbf{A}$  berechnet, während die modellierte Strecke jedoch die Form  $\mathbf{A}_$  hatte. Mithilfe des wählbaren Parameters  $k_m$  kann der Verzerrungsgrad gewählt werden. Aufgrund des Einflusses der Zufallsfunktion  $rand()$ , sind die gefundenen Ergebnisse nicht absolut, sondern sollen lediglich als Beispiel dienen. Es wurden mehrere Versuche durchgeführt und markante Ergebnisse festgehalten.

In Abbildung 16 ist ein Ergebnis eines Versuches dargestellt. Die stochastischen Regler liefern hier durchwegs niedrige Kostenfunktionen.

In Abbildung 17 ist ein weiterer Versuch festgehalten, welcher mit gleichen Parametern durchgeführt wurde. Der Zufallscharakter der angewandten Verzerrung führte jedoch diesmal zu einem deutlich unterschiedlichen Ergebnis. Die stochastischen Regler liefern nun deutlich höhere Kostenfunktionen und werden im direkten Vergleich teilweise sogar vom Zustandsregler mit Polvorgabe unterboten.

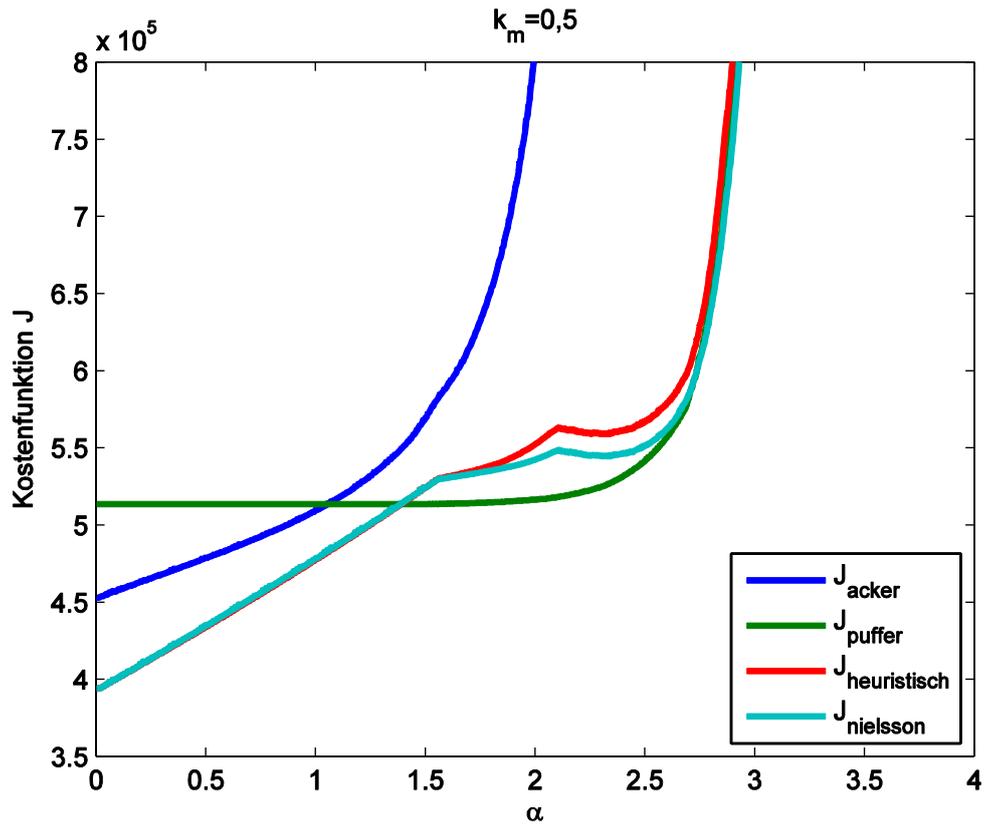


Abbildung 16: Kostenfunktionen bei Modellungenauigkeit, Versuch 1

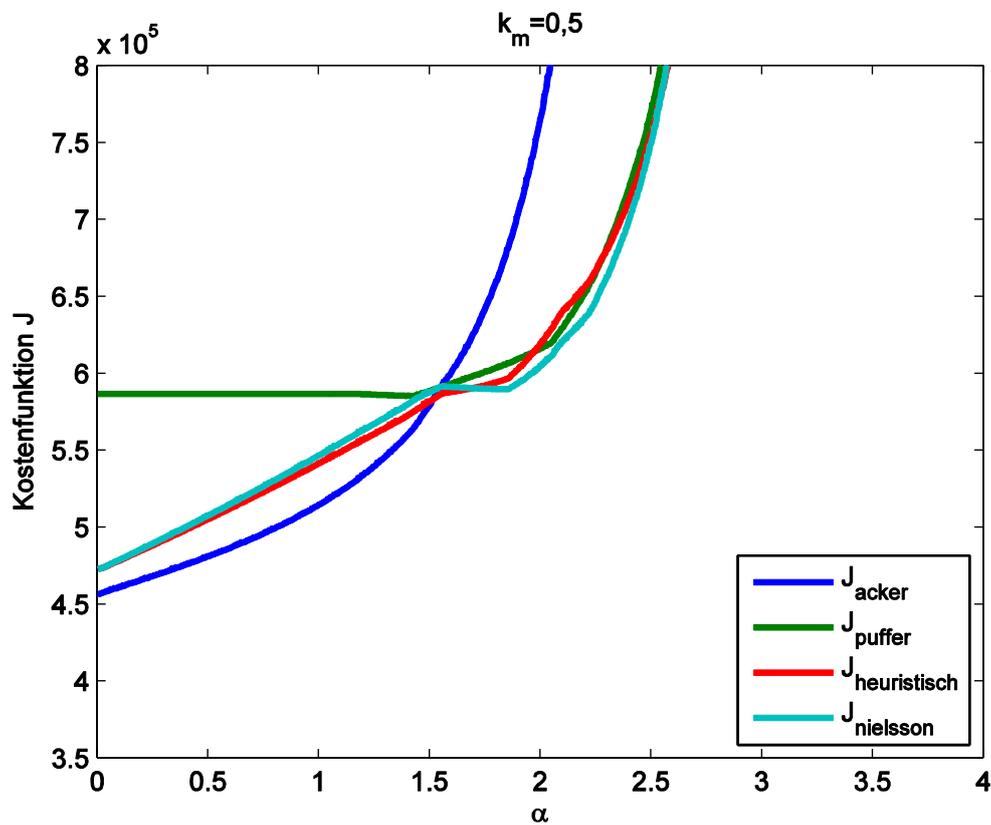


Abbildung 17: Kostenfunktionen bei Modellungenauigkeit, Versuch 2

Insgesamt zeigt sich, dass die aggressivere Wahl der Pole im Falle der optimalen Regelung dazu führt, dass die entworfenen Regler empfindlicher auf Modellungenauigkeiten reagieren als der langsamere Regler nach Ackermann. Es soll jedoch angemerkt werden, dass es, im Nennbereich, erst bei gravierender Ungenauigkeit zu einem Verlust der Stabilität kommt. Bei den abgebildeten Beispielbildern wurde eine Schwankungsbreite von  $\pm 25\%$  ( $k_m = 0,5$ ) gewählt. Dies soll unterstreichen, dass die stochastischen Regler robust auf Parameterschwankungen reagieren.

### 5.3.1 Zusammenfassung der Simulationsparameter

Grundstrecke	$\mathbf{A}_- = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
Versuch 1	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0,8135 \\ 3,6087 & 4,8268 \end{bmatrix}$
Versuch 2	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0,8885 \\ 2,2977 & 3,0923 \end{bmatrix}$

Tabelle 7: Robustheit: Versuchsstrecken

Die Robustheit wurde am Beispiel der instabilen linearen Strecke untersucht. Für die restlichen Simulationsparameter sei deshalb auf Tabelle 4, Tabelle 5 und Tabelle 6 verwiesen.

## 5.4 Anwendungsbeispiel an Strecke mit langer Zeitverzögerung

### 5.4.1 Modellierung der Kugeldynamik

Nun soll das Verhalten des LQG-Reglers an einem einfachen Beispiel untersucht werden. Als Grundlage dafür dient die Seminararbeit „Inbetriebnahme und Regelung eines Ball on Plate Systems“ [24] von Karner und Tschiggerl. In Abbildung 18 wird der grundlegende Modellaufbau skizziert. Der reale Aufbau verfügt über zwei unabhängige Schwenkachsen und die Positionsregelung der Kugel erfolgt auf der gesamten Plattenebene anstatt nur in einer Richtung, dies soll hier jedoch vernachlässigt werden.

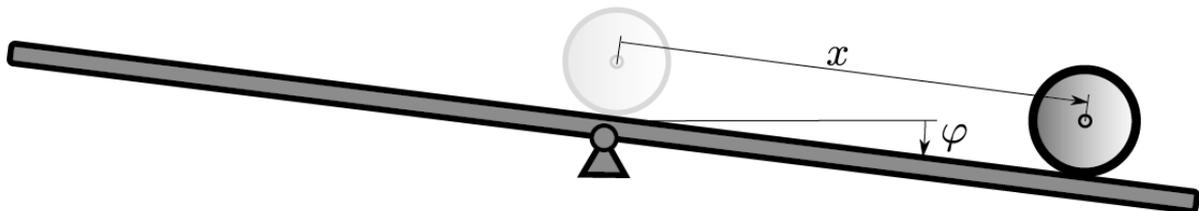


Abbildung 18: Schematischer Modellaufbau aus [24]

Die Regelung des Gesamtsystems erfolgt kaskadiert, wie in Abbildung 19 dargestellt. Ein innerer Regelkreis ist für die Winkelregelung der Platte zuständig, während der äußere Kreis die Position der Kugel kontrolliert. Die quadratischen Symbole mit Pfeilen und der Zahl Vier im Inneren stellen Down- bzw. Upsampling dar. Dies bedeutet, dass der äußere Positionsregelkreis mit einer niedrigeren Abtastrate arbeitet, als der innere Winkelregelkreis.  $\tau_{sc}$  ist die Übertragungszeit zwischen Sensor und Regler,  $\tau_{ca}$  ist die Verzögerung zwischen Regler und Aktor.

Bei vorgegebenem Winkelregler soll nun der äußere Positionsregelkreis als LQG-Regler ausgeführt werden.

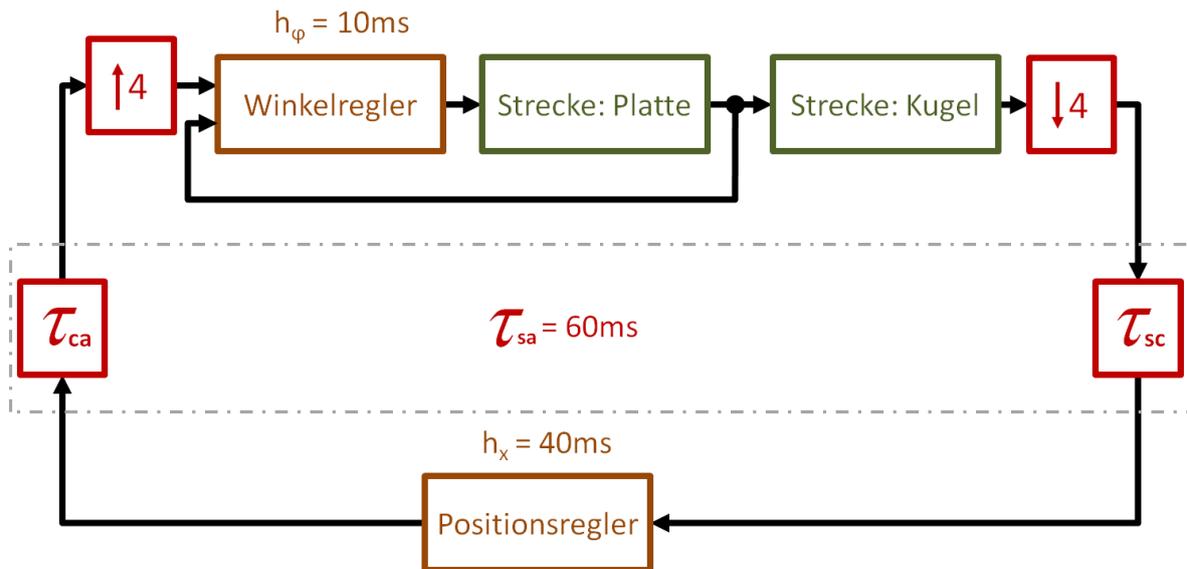


Abbildung 19: Aufbau der Kaskadenregelung

Unter der Annahme einer idealen Winkelregelung kann der innere Kreis für die Reglerauslegung vernachlässigt werden. Die Kugelstrecke wird wie folgt modelliert:

Der Zustandsvektor wird durch  $\mathbf{x}_{Kugel} = [x \quad \dot{x}]^T$  beschrieben. Die Steuergröße ist der Plattenwinkel  $\varphi$ . Für das ideale Zustandsraummodell ergibt sich:

$$\dot{\mathbf{x}}_{Kugel} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{Kugel} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{7} \cdot g \end{bmatrix} \varphi \quad (5.3)$$

$$y_{Kugel} = [1 \quad 0] \mathbf{x}_{Kugel}$$

Der Positionsregler arbeitet mit einer Abtastperiode von  $h_p = 0,04s$ . Die Übertragungszeit  $\tau_{sa} = \tau_{sc} + \tau_{ca}$  hat ein Minimum von  $\tau_{min} = 40ms$  und ein Maximum von  $\tau_{max} = 80ms$ . Die Gesamtverzögerung liegt also im Intervall  $[h_p, 2h_p]$ .

Diese Verzögerung hat einen konstanten Anteil und kann deshalb in zwei Teile aufgespalten werden zu:  $\tau_{sa} = \tau_{konst} + \tau_{\Delta}$  mit  $\tau_{konst} = h_p$  und  $\tau_{\Delta} \in [0, h_p]$ . Die Einbringung eines konstanten Terms ändert die Prädiktionsgleichungen der Zustandsschätzung, wie im nächsten Kapitel verdeutlicht wird.

## 5.4.2 Auswirkung der konstanten Zeitverzögerung

Um die konstante Zeitverzögerung von  $\tau_{konst} = h_p$  zu berücksichtigen, ist ein zusätzlicher Prädiktionsschritt in der Zustandsschätzung notwendig. Folgende Gleichungen beschreiben den verwendeten LQG-Regler:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_k^* &= \mathbf{\Phi} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{\Gamma}_0(\tau_{k-1}^{sa}) \cdot u_{k-1} + \mathbf{\Gamma}_1(\tau_{k-1}^{sa}) \cdot u_{k-2} & (5.4) \\
 \hat{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{x}_k^* + \mathbf{K}_k \cdot (y_k - \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_k^*) \\
 \mathbf{x}_{k+1}^{**} &= \mathbf{\Phi} \cdot \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{\Gamma}_0(\tau_k^{sc} + E\{\tau_k^{ca}\}) \cdot u_k + \mathbf{\Gamma}_1(\tau_k^{sc} + E\{\tau_k^{ca}\}) \cdot u_{k-1} \\
 u_{k+1} &= -\mathbf{L}(E\{\tau_{k+1}^{sc}\}) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1}^{**} \\ u_k \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Das obige Gleichungssystem unterscheidet sich vom Standardfall in zwei Punkten. Die neu hinzugefügte dritte Zeile wirft einen Blick in die Zukunft und prädiziert den nächsten Systemzustand  $\mathbf{x}_{k+1}^{**}$  ohne vollständiges Wissen über die aktuelle Übertragungsdauer  $\tau_k$ , welche definitionsgemäß zu diesem Zeitpunkt noch unbekannt ist. In der letzten Zeile wird die Stellgröße nun ausgehend von diesem Prädiktionswert berechnet, anstatt wie üblich vom Schätzwert  $\hat{\mathbf{x}}_k$ .

### 5.4.3 Zusammenfassung der Simulationsparameter

Zugehörigkeit	Wert
Streckenparameter, zeitkontinuierlich	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{7} \cdot g \end{bmatrix}$
	$\mathbf{c} = [1 \quad 0]$
	$d = 0$
Startwert	$\mathbf{x}_0 = [0.3 \quad 0.12]$
Abtastzeit	$h = 0,04 s$
Simulationsdauer	$T_{sim} = 5 s$
Rauschen	$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0,003 \\ 0,15 \end{bmatrix} \tilde{w}$
	$\mathbf{v} = 0,00006 \cdot \tilde{v}$

Tabelle 8: Lange Verzögerung: Simulationsparameter, Angabe

Zugehörigkeit	Wert
Kalman	$\mathbf{P}_0^* = 10^{-8} \cdot \begin{bmatrix} 1,44 & 0 \\ 0 & 0,008 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{Q} = 10^{-5} \cdot \begin{bmatrix} 0,006 & 0,144 \\ 0,144 & 3,6 \end{bmatrix}$
	$R = 10^{-9} \cdot 3,6$
Nielsson	$\mathbf{Q}_x = \begin{bmatrix} 1,6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$Q_u = 1$
	$\mathbf{P}_0 = \mathbf{Q}_N = \mathbf{Q}_x$

Tabelle 9: Lange Verzögerungen: Simulationsparameter, Berechnung

Zugehörigkeit	Wert
Kalman	$\mathbf{K}_\infty = \begin{bmatrix} 0,9530 \\ 21,6845 \end{bmatrix}$
Nielsson ( $\tau_k = 0,5 \cdot h_p$ )	$\mathbf{L}_0 = [1,0838 \quad 1,0432 \quad 0,1447]$

Tabelle 10: Lange Verzögerungen: Simulationsparameter, Regler

Zu Beginn der Simulation erfährt die Kugel einen Anstoßimpuls. Dafür wird zum Zustandsvektor ein Störvektor der Größe  $\mathbf{w}_k = [0 \quad -0,15]^T \cdot \delta(k-1)$  addiert. Dies bedeutet, dass im ersten Taktschritt die Geschwindigkeit der Kugel um  $\Delta v = 0,15$  reduziert wird und das System ansonsten störungsfrei arbeitet.

#### 5.4.4 Simulationsergebnisse

Die folgende Abbildung 20 zeigt den Verlauf der Zustandsgrößen im Simulationszeitraum. Die Positionsregelung funktioniert wie gewünscht und nach einer Simulationszeit von  $t = 3\text{ s}$  wird die Ruhelage erreicht.

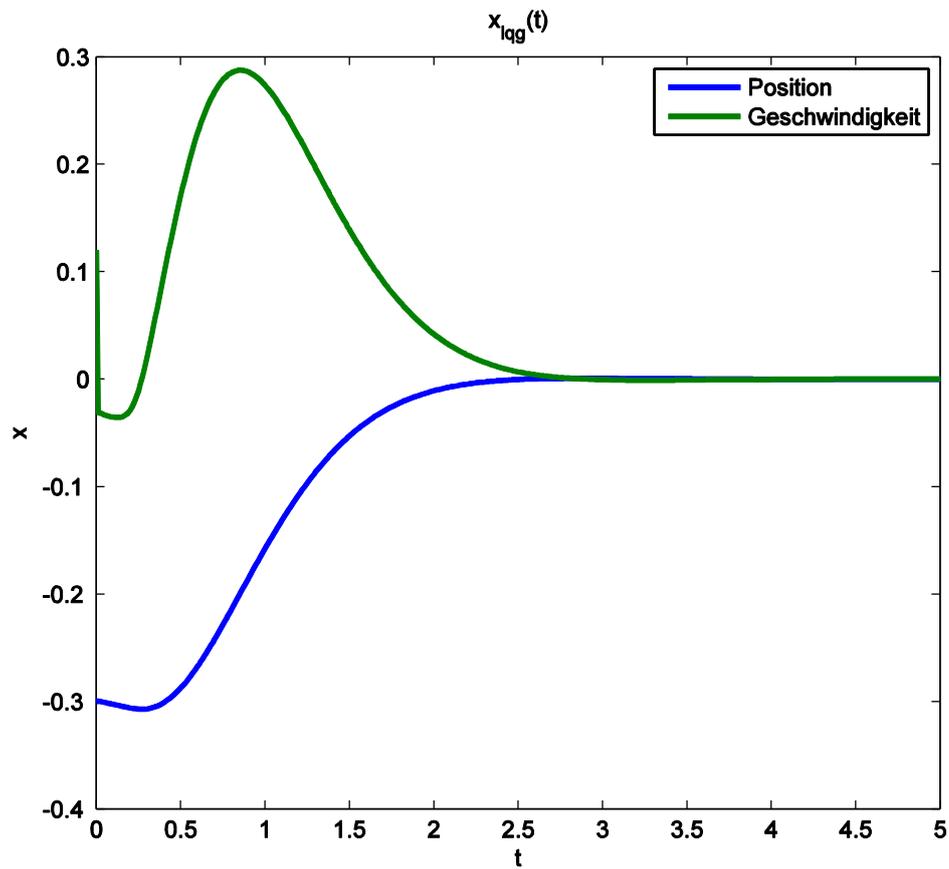


Abbildung 20: Verlauf der Zustandsgrößen,  $\tau_k = 1,5 \cdot h_p = konst$

## 5.5 Anwendungsbeispiel an nichtlinearer Strecke

### 5.5.1 Modellierung des Fahrzeugverhaltens

Als abschließender Punkt soll das mathematische Modell eines autonomen Fahrzeuges auf einer Straße aus „Motion planning under uncertainty for on-road autonomous driving“ [25] von Xu u. a. verwendet werden, um die Performance des LQG-Reglers zu testen. Der Zustand des Autos wird durch  $\mathbf{x} = [x \ y \ \theta]^T$  beschrieben und der Steuereingang ist definiert als  $\mathbf{u} = [v \ \kappa]^T$ , wobei  $x$  und  $y$  die Position repräsentieren,  $\theta$  ist die Fahrzeugorientierung,  $\kappa$  ist die Krümmung und  $v$  die Geschwindigkeit. Die Bedeutung der einzelnen Systemgrößen soll durch Abbildung 21 verdeutlicht werden. Bei gegebener Diskretisierungszeit  $h$  kann die ideale Fahrzeugdynamik nun beschrieben werden als:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k && -v_k h \cdot \sin(\theta_k) \cdot \theta_k && + v_k h \cdot \cos(\theta_k) \\ y_{k+1} &= y_k && + v_k h \cdot \cos(\theta_k) \cdot \theta_k && + v_k h \cdot \sin(\theta_k) \\ \theta_{k+1} &= && \theta_k && + \kappa_k v_k h \end{aligned}$$

Durch Zusammenfassung der Parameter ergibt sich das folgende nichtlineare System:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_k(\mathbf{x}_{k-1})\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k(\mathbf{x}_{k-1})\mathbf{u}_{k-1} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -v_{k-1} h \cdot \sin(\theta_{k-1}) \\ 0 & 1 & v_{k-1} h \cdot \cos(\theta_{k-1}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} h \cdot \cos(\theta_{k-1}) & 0 \\ h \cdot \sin(\theta_{k-1}) & 0 \\ 0 & v_{k-1} h \end{bmatrix}$$

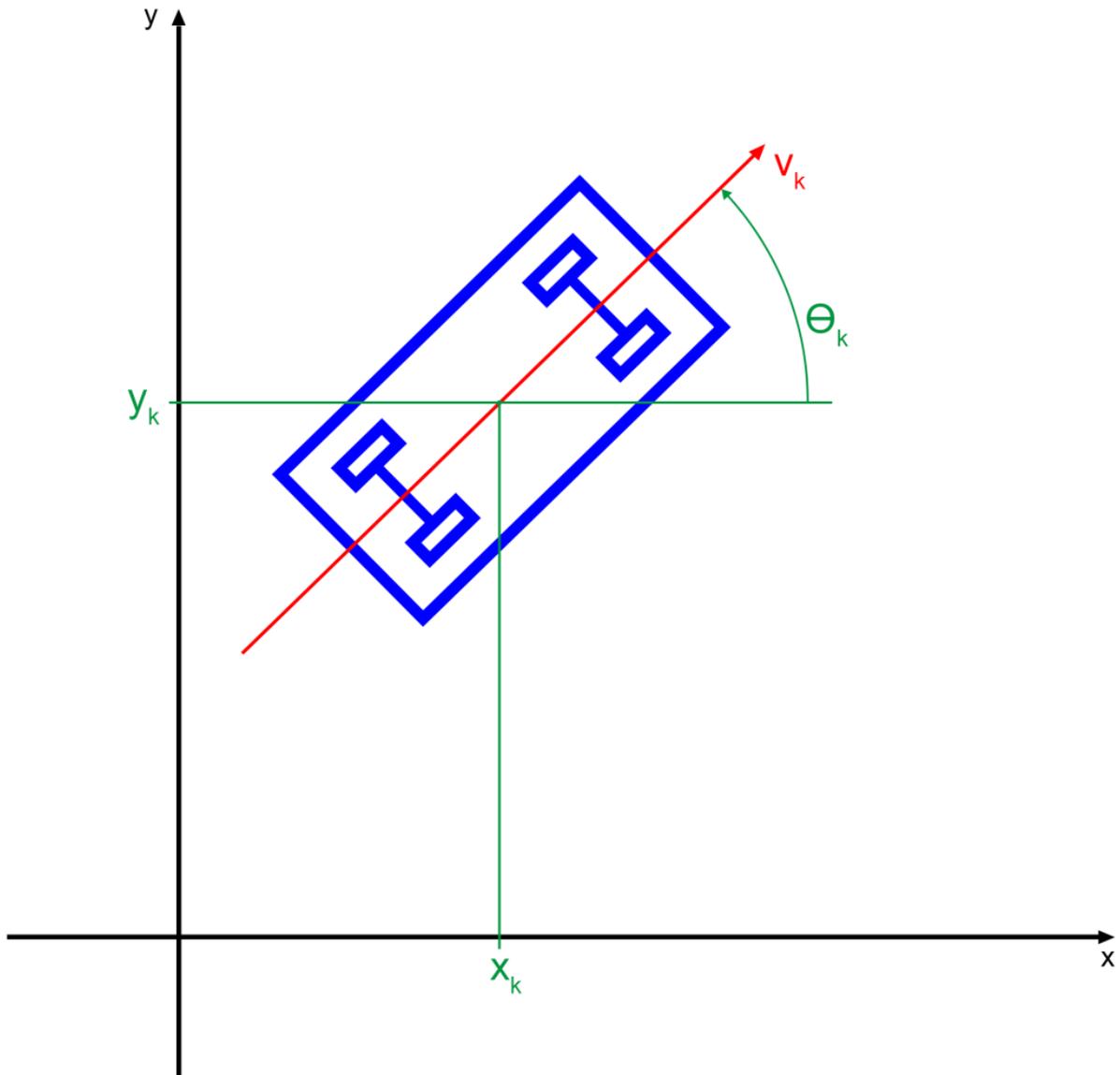


Abbildung 21: Darstellung der Fahrzeugkoordinaten und Systemzustände

Um das reale Verhalten eines Autos naheliegender darzustellen, wurde diese Vorgabe im Weiteren leicht abgeändert, indem die Fahrzeuggeschwindigkeit  $v_k$  als zusätzliche Zustandsgröße aufgenommen wurde, während die Beschleunigung  $a_k$  als neue Eingangsgröße hinzugefügt wurde. Dieses erweiterte System lässt sich nun mit den folgenden Gleichungen beschreiben:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_{k-1} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -v_{k-1}h \cdot \sin(\theta_{k-1}) & h \cdot \cos(\theta_{k-1}) \\ 0 & 1 & v_{k-1}h \cdot \cos(\theta_{k-1}) & h \cdot \sin(\theta_{k-1}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & v_{k-1}h \\ h & 0 \end{bmatrix}$$

Diese Beschreibung der Fahrzeugdynamik ist ein zeitvariantes nichtlineares MIMO-Modell. Der Zustand des Autos wird somit durch  $\mathbf{x} = [x \ y \ \theta \ v]^T$  beschrieben und der Steuereingang ist definiert als  $\mathbf{u} = [a \ \kappa]^T$

Wird außerdem berücksichtigt, dass sowohl Zustandsrauschen als auch Messrauschen auftreten und die Ausgangsgröße nur teilweise messbar ist, erhält man das folgende zeitvariante Modell:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_k \quad (5.7)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{v}_k$$

Hier beschreibt  $\mathbf{x}_k$  den Zustandsvektor,  $\mathbf{u}_k$  ist der Steuereingangsvektor,  $\mathbf{y}_k$  ist der Messvektor,  $\mathbf{w}_k$  ist das Prozessrauschen und  $\mathbf{v}_k$  ist das Messrauschen.

## **5.5.2 Anmerkung zur Modellierung**

Das vorhergehend beschriebene Modell ist zeitdiskret und benötigt somit eine periodische Abtastung, das Hauptziel dieser Arbeit ist jedoch die Untersuchung asynchroner Regelungen. Für die durchgeführten Simulationen wurde deshalb die Zeitverzögerung stets konstant gehalten. Dadurch bleibt die Abtastung der Strecke periodisch und das bekannte Modell kann verwendet werden.

Um eine wirklich asynchrone Regelung mit schwankenden Zeitverzögerungen zu untersuchen, muss eine zeitkontinuierliche Strecke simuliert werden. Dieser zusätzliche Schritt wurde jedoch unterlassen, da die vorläufigen Ergebnisse bereits zeigten, dass die verwendeten Reglertypen für diese Strecke ungeeignet sind. Insbesondere zeigte sich, dass die hier behandelte Strecke nicht mittels Kalmanfilter beobachtet werden kann – dies wird in den Kapiteln 5.5.6 und 6 näher ausgeführt.

### 5.5.3 Trajektorienplanung

Um das Fahrzeugverhalten zu testen, müssen zuerst Wunschverläufe der Zustandstrajektorien berechnet werden. In der Arbeit von Xu [25] erfolgt diese Trajektorienplanung nach einem Schema, welches schon in seinem früheren Werk „A Real-Time Motion Planner with Trajectory Optimization for Autonomous Vehicles“ [26] vorgestellt wurde.

Hier soll ein einfaches Überholmanöver untersucht werden. Ein Fahrzeug mit der Ausgangsgeschwindigkeit  $v_0 = 80\text{km/h}$  wechselt von der rechten Fahrspur auf die Überholspur, beschleunigt auf  $v_1 = 100\text{km/h}$  und reiht sich wieder auf der rechten Spur ein. Der Verlauf ist in Abbildung 22 dargestellt. Die Bodenmarkierungen in dieser Abbildung sollen nur ein Gefühl für die Fahrzeugspuren vermitteln und sind nicht maßstabsgetreu. Der Spurwechsel wirkt zwar etwas abrupt, dauert aber eine Sekunde und nimmt eine Strecke von circa  $20\text{m}$  in Anspruch. Nach  $10\text{s}$  und einer zurückgelegten Entfernung von circa  $240\text{m}$  ist der Überholvorgang abgeschlossen.

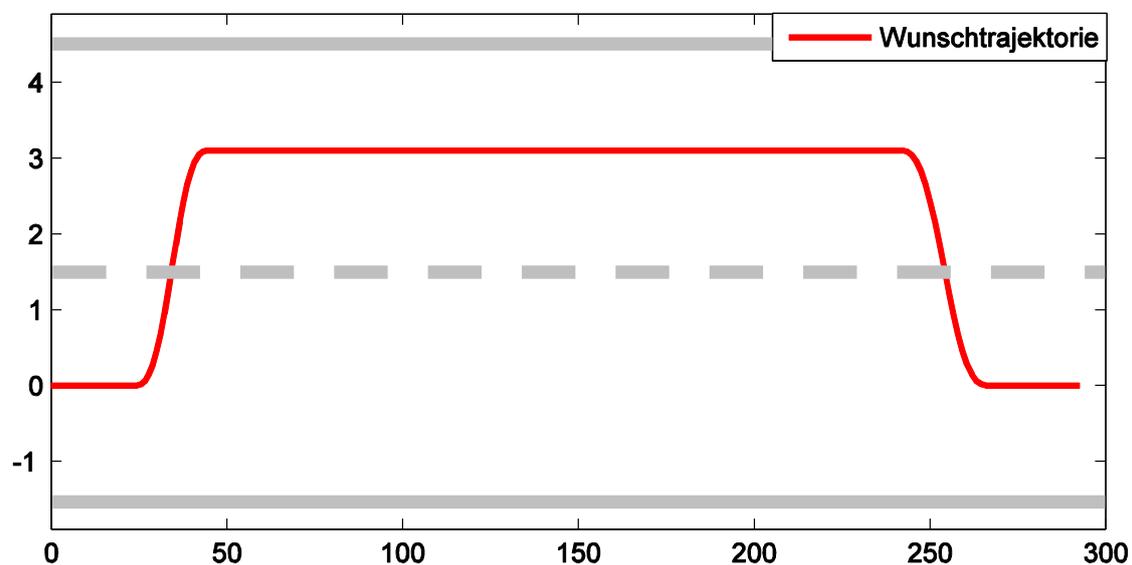


Abbildung 22: Trajektorienplanung für Überholvorgang

Entlang dieser Plantrajektorie nimmt der Zustandsvektor die Werte  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  an, der Eingangsvektor wird als  $\tilde{\mathbf{u}}_k$  notiert und der Ausgangsvektor wird als  $\tilde{\mathbf{y}}_k$  bezeichnet. Um die Zustandsschätzung mittels Kalmanfilter zu ermöglichen, muss nun das Problem wie folgt umformuliert werden:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k \\ \bar{\mathbf{u}}_k &= \mathbf{u}_k - \tilde{\mathbf{u}}_k \\ \bar{\mathbf{y}}_k &= \mathbf{y}_k - \tilde{\mathbf{y}}_k\end{aligned}\tag{5.8}$$

Nun bezeichnen  $\bar{\mathbf{x}}_k$ ,  $\bar{\mathbf{u}}_k$  und  $\bar{\mathbf{y}}_k$  die Abweichung zwischen der Plantrajektorie und der realen Trajektorie zum Abtastpunkt  $k$ .

Für die nachfolgende Simulation wurden die Plan-Stellgrößen empirisch ermittelt. Anstatt die erwähnte Trajektorienplanung nach Xu durchzuführen, wurden wiederholt Simulationen der unregelten gesteuerten Strecke durchgeführt, bis das Ergebnis einen annehmbaren Verlauf bildete. Die resultierenden Plan-Stellgrößen wurden mithilfe des folgenden Auszugs MATLAB-Code berechnet.

```

stoptime=12;
Td=0.05;
tu=1;

v0=80/3.6;
v1=100/3.6;
ts=stoptime/2;
u0=0.0005;
u1=-u0;%0.005;%0.003;

ua1=0.02/(tu^2);
ua2=0.01390013/(tu^2);
uf=2*pi/tu;

v_in.time=[0,1+tu,1+tu+Td,stoptime-tu-Td-1,stoptime-tu-
1,stoptime]';
v_in.signals.values=[0,0,(v1-v0)/(stoptime-2*tu),(v1-
v0)/(stoptime-2*tu),0,0]';

tx=0:Td:tu;
k_in.time=[0,1+tx,stoptime-tu-1+tx,stoptime]';
k_in.signals.values=[0,ua1*sin(uf.*tx),-ua2*sin(uf.*tx),0]';

```

## 5.5.4 Simulationsparameter

Um nun die Simulationen durchzuführen, müssen zuerst die folgenden Parameter definiert und gewählt werden.

Für das Prozessrauschen  $\mathbf{w}_k$  soll gelten:

- Das Rauschen von  $x$  und das Rauschen von  $y$  sind unkorreliert. Winkel und Geschwindigkeit sind der Einfachheit halber nicht von Rauschen betroffen. Somit nimmt  $\mathbf{w}_k$  die Form  $\mathbf{w}_k = [\mathbf{w}_{x,k} \quad \mathbf{w}_{y,k} \quad 0 \quad 0]^T$  an.
- Das Rauschen soll die Fahrt über eine Forststraße simulieren, d. h. bei einer Schottergröße von maximal  $2\text{ cm}$  sollte die Standardabweichung von  $\mathbf{w}_{x,k}$  und  $\mathbf{w}_{y,k}$  den Wert  $0,01\text{ m}$  annehmen.
- Somit kann das Rauschen in der Form  $\mathbf{w}_k = [0,01 \cdot \tilde{w}_{x,k} \quad 0,01 \cdot \tilde{w}_{y,k} \quad 0 \quad 0]^T$  implementiert werden, wobei  $\tilde{w}_{x,k}$  und  $\tilde{w}_{y,k}$  unkorreliertes Rauschen mit Einheitsvarianz sind.
- Bei der Auslegung des Kalmanfilters ergibt sich somit die Wahl

$$Q = \begin{bmatrix} 0,01^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Für den Ausgangsvektor  $\mathbf{y}_k$  gilt:

- Es wird nur die derzeitige Position gemessen, d. h. es werden die Zustandsgrößen  $x_k$  und  $y_k$  erfasst. Es wäre naheliegend, auch die Fahrzeuggeschwindigkeit als Messgröße zu verwenden, da ein Tachometer Grundbestandteil jedes Fahrzeuges ist, hier wird darauf aber bewusst verzichtet.
- Das Messrauschen von  $x$  und das Messrauschen von  $y$  sind wieder unkorreliert. Somit nimmt  $\mathbf{v}_k$  die Form  $\mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} v_{x,k} & v_{y,k} \end{bmatrix}^T$  an.
- Die Positionsmessung wird üblicherweise mittels GPS erfolgen. Es wird angenommen, dass eine Genauigkeit von  $0,5m$  erreicht wird. Dadurch nimmt die Standardabweichung von  $v_{x,k}$  und  $v_{y,k}$  den Wert  $0,25m$  an.
- Somit kann das Rauschen in der Form  $\mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} 0,25 \cdot \tilde{v}_{x,k} & 0,25 \cdot \tilde{v}_{y,k} \end{bmatrix}^T$  implementiert werden, wobei  $\tilde{v}_{x,k}$  und  $\tilde{v}_{y,k}$  unkorreliertes Rauschen mit Einheitsvarianz sind.
- Bei der Auslegung des Kalmanfilters ergibt sich somit die Wahl

$$R = \begin{bmatrix} 0,25^2 & 0 \\ 0 & 0,25^2 \end{bmatrix}$$

Für die Verwendung des Kalmanfilters gilt:

- Um mit der Nichtlinearität umzugehen, wird von einem zeitvarianten linearen Modell ausgegangen, dessen Parameter durch die Trajektorienplanung bekannt sind:

$$\tilde{\mathbf{A}}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\tilde{v}_{k-1}h \cdot \sin(\tilde{\theta}_{k-1}) & h \cdot \cos(\tilde{\theta}_{k-1}) \\ 0 & 1 & \tilde{v}_{k-1}h \cdot \cos(\tilde{\theta}_{k-1}) & h \cdot \sin(\tilde{\theta}_{k-1}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \tilde{v}_{k-1}h \\ h & 0 \end{bmatrix}$$

- Es wird angenommen, dass der Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  im Bereich  $-\bar{\mathbf{x}}_0^* \leq \bar{\mathbf{x}}_0 \leq \bar{\mathbf{x}}_0^*$  liegt, mit  $\bar{\mathbf{x}}_0^* = [0,5 \ 0,5 \ 0,01 \ 1]^T$ . Somit ergibt sich für den Iterationsbeginn des Kalmanfilters der Startwert

$$\mathbf{P}_0^* = \begin{bmatrix} (0,5/2)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (0,5/2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (0,01/2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1/2)^2 \end{bmatrix}.$$

Für den Simulationsstartwert wurde  $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 80/3,6]^T$  gewählt.

### 5.5.5 Simulationsergebnisse

Abbildung 23 zeigt den realen Verlauf des Fahrzeuges in der Simulation. Trotz der ungenauen Positionserfassung hält das Auto die Spur relativ stabil. Auch die in Abbildung 24 dargestellte Trajektorienabweichung  $\bar{\mathbf{x}}_k$ , die den Abstand vom Wunschverlauf darstellt, bestätigt die Funktion des Reglers.

Die Bilder des Simulationsaufbaues befinden sich im Anhang.

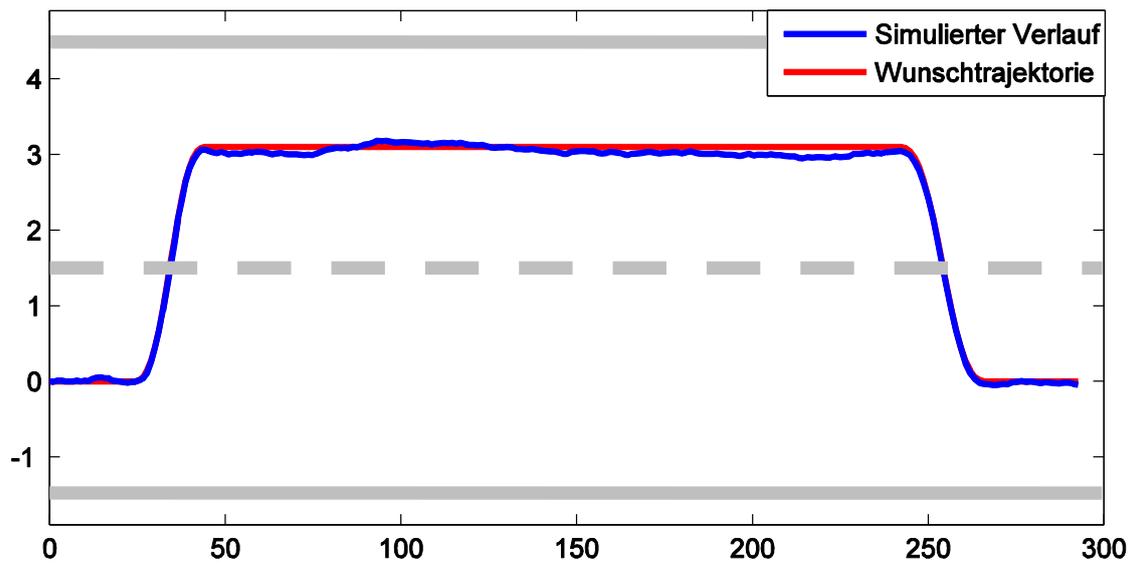


Abbildung 23: Reales Verhalten des Fahrzeuges,  $\tau_{\max} = 0,5 \cdot h$

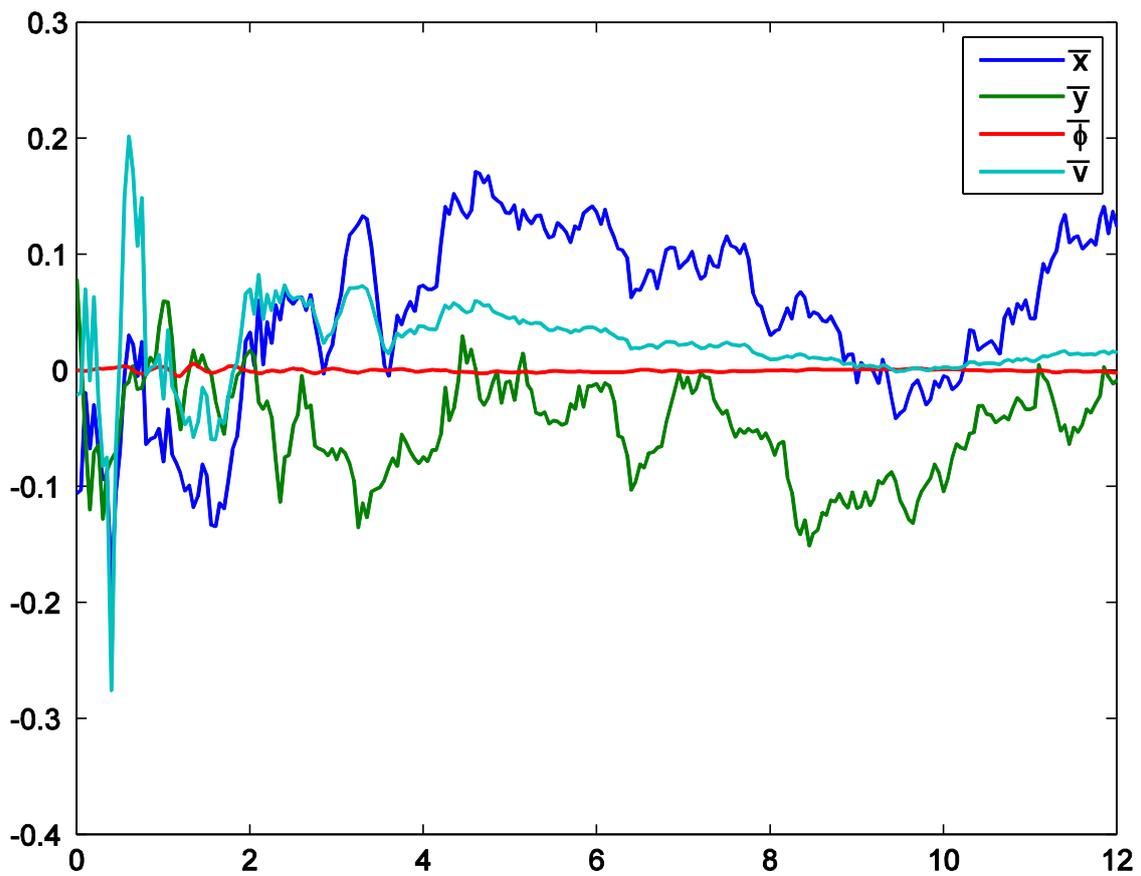


Abbildung 24: Verlauf der Trajektorienabweichung  $\bar{\mathbf{x}}_k$ ,  $\tau_{\max} = 0,5 \cdot h$

### 5.5.6 Anmerkung zu den Simulationsergebnissen

Aufgrund der Streckennichtlinearität benötigt der Zustandsbeobachter relativ genaue Startwerte, deshalb wurde  $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 80/3,6]^T$  gewählt, um den Anfangsschätzfehler zu minimieren. Wäre das Fahrzeugmodell tatsächlich zeitvariant linear, könnte der Beobachter mit Anfangsfehlern umgehen, dies wurde auch getestet. Da das Modell aber in Wirklichkeit zeitinvariant nichtlinear ist, kann der Beobachter den Anfangsfehler nicht ausgleichen. Schätzung und realer Wert konvergieren in Folge nicht und der Gesamtregler funktioniert nicht mehr.

Selbiges gilt für das Prozessrauschen, welches nur auf die Fahrzeugkoordinaten angewandt wurde. Ein Versuch mit verrauschter Geschwindigkeit, die Standardabweichung wurde mit  $(1/h) \cdot 0,01m$  gewählt, zeigte instabiles Verhalten auf. In weiterer Folge wurde versucht den Beobachter zu erweitern, sodass durch ein Tachometer die Fahrzeuggeschwindigkeit gemessen wird. Diese Erweiterung konnte das System jedoch nicht stabilisieren.

## 6 Zusammenfassung

Regelgesetze, die über ein LQG-Problem (linear quadratic gaussian) berechnet werden, minimieren eine gegebene Kostenfunktion der Form

$$J_N = E\{\mathbf{x}_N^T \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_N\} + E\left\{ \sum_{k=0}^N \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix}^T \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \right\}$$

und ermöglichen ein optimales stabiles Systemverhalten bei Signalverzögerungen in vernetzten Systemen. Die durch diese Methodik entworfenen Regler können zeitvariante lineare Mehrgrößensysteme mit Rauschbelastung regeln, was für die anderen untersuchten Konzepte nicht möglich ist. Bei der Anwendung auf nichtlineare Strecken stößt die Zustandsschätzung durch Kalmanfilter jedoch an ihre Grenzen.

## A Anhang

Die folgenden Bilder zeigen ausgewählte Simulationsverläufe der Anwendungsbeispiele und den Aufbau der Simulation in Simulink.

### A.1 Sonstige Abbildungen

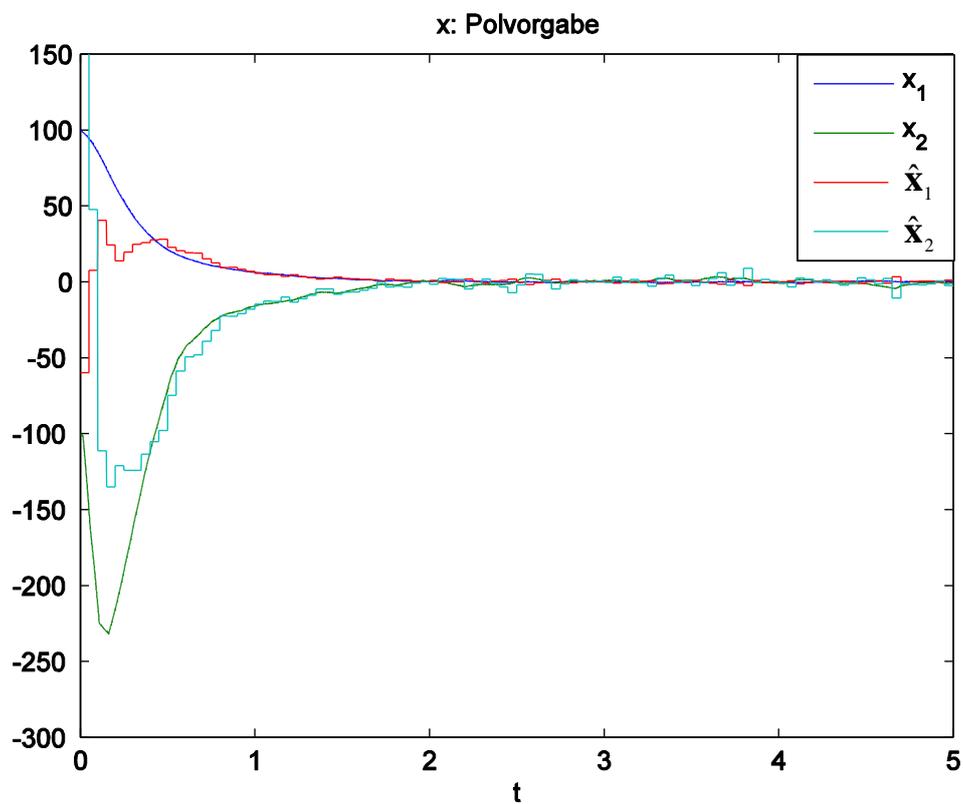


Abbildung 25: Zustandsschätzung, Ackermann, instabile Strecke

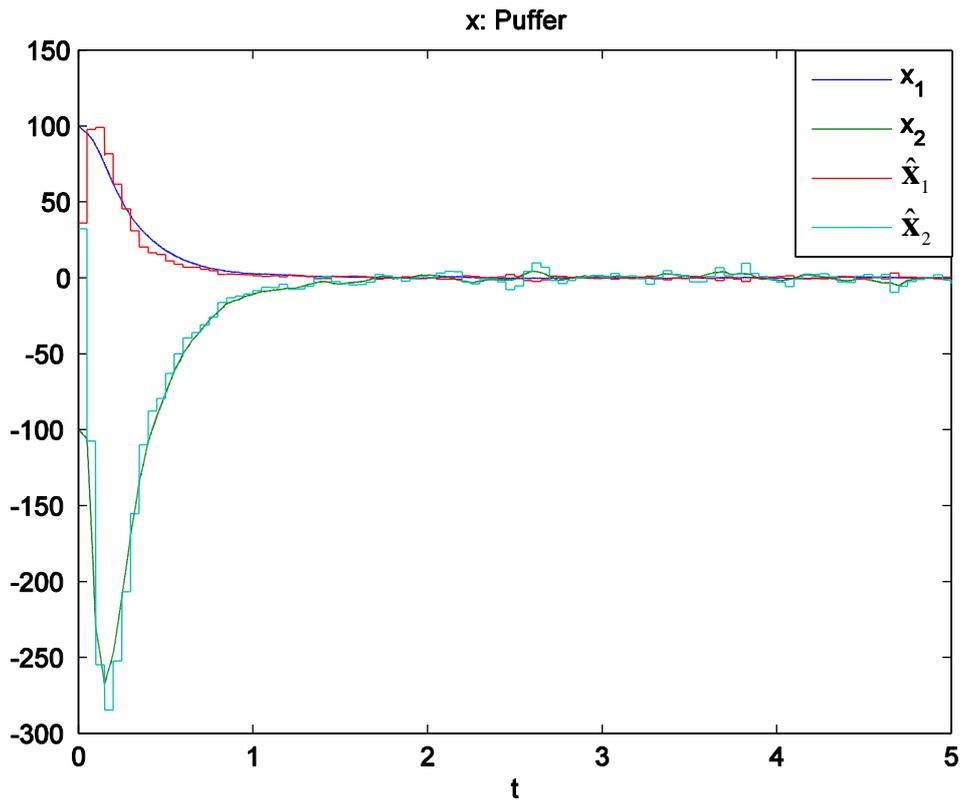


Abbildung 26: Zustandsschätzung, Puffer, instabile Strecke

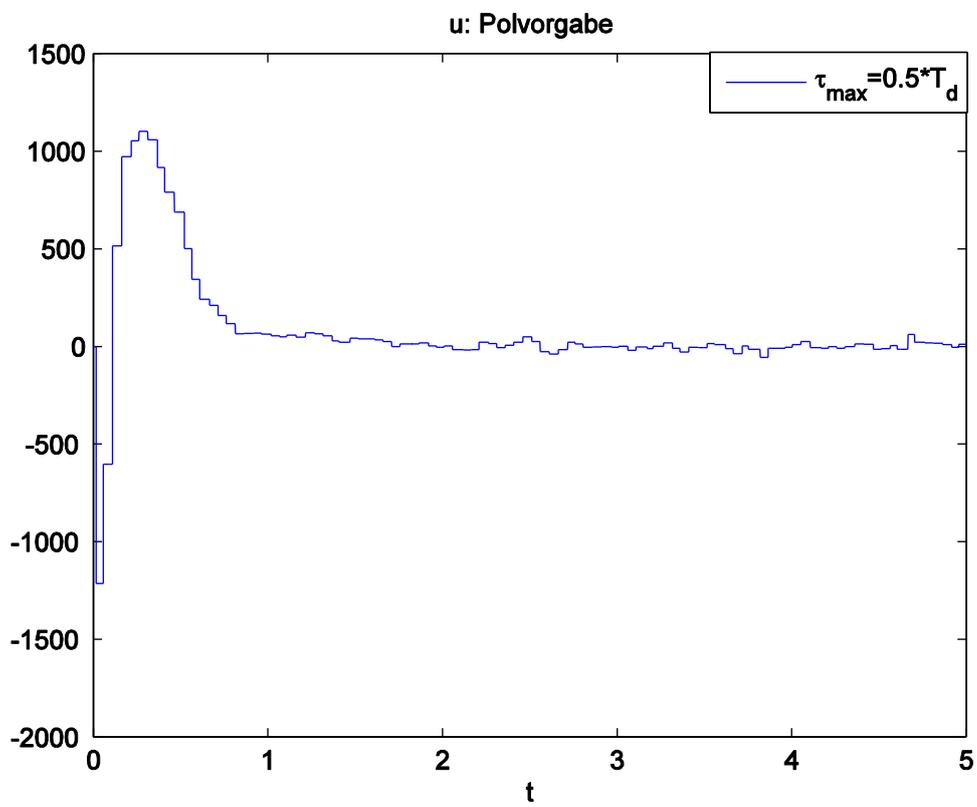


Abbildung 27: Stellgröße, Ackermann, instabile Strecke

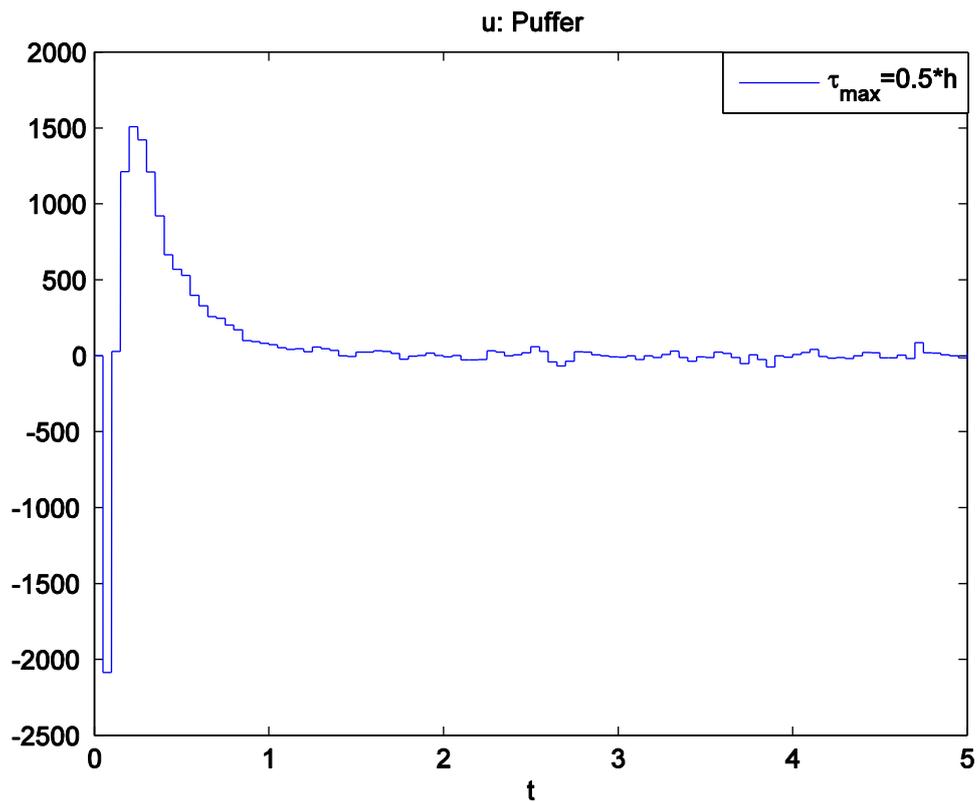


Abbildung 28: Stellgröße, Puffer, instabile Strecke

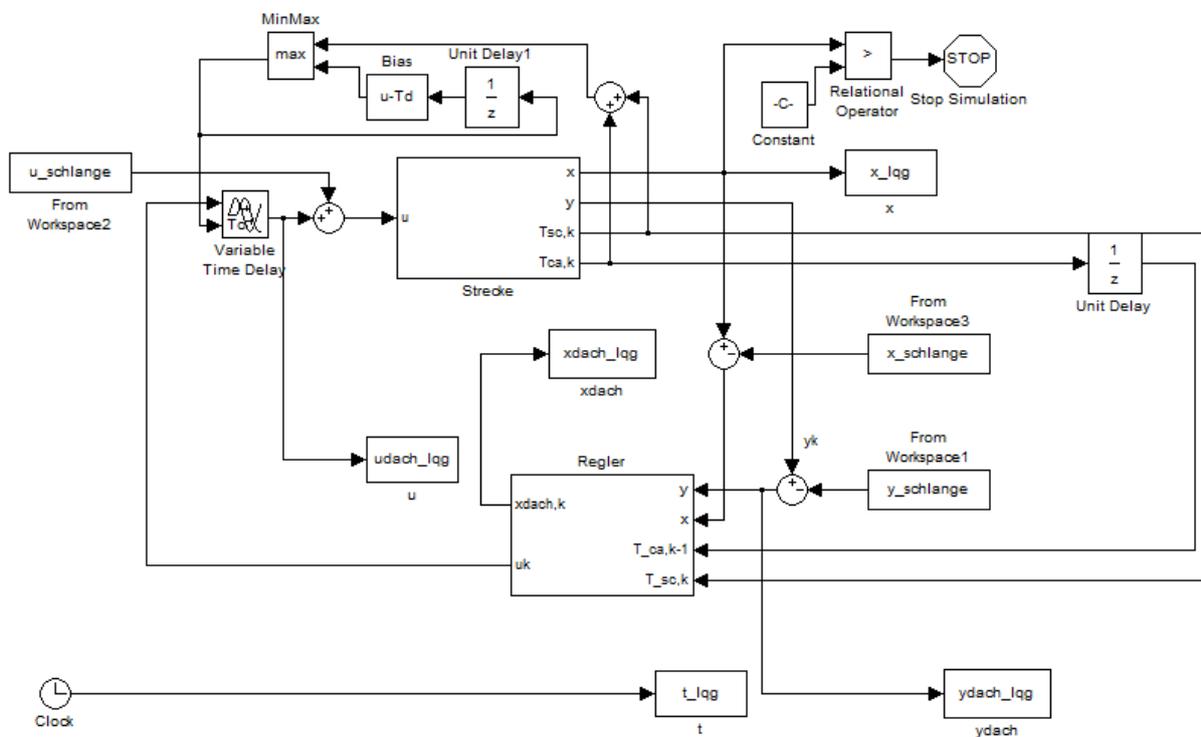


Abbildung 29: Nichtlinearer Streckenaufbau, Überblick

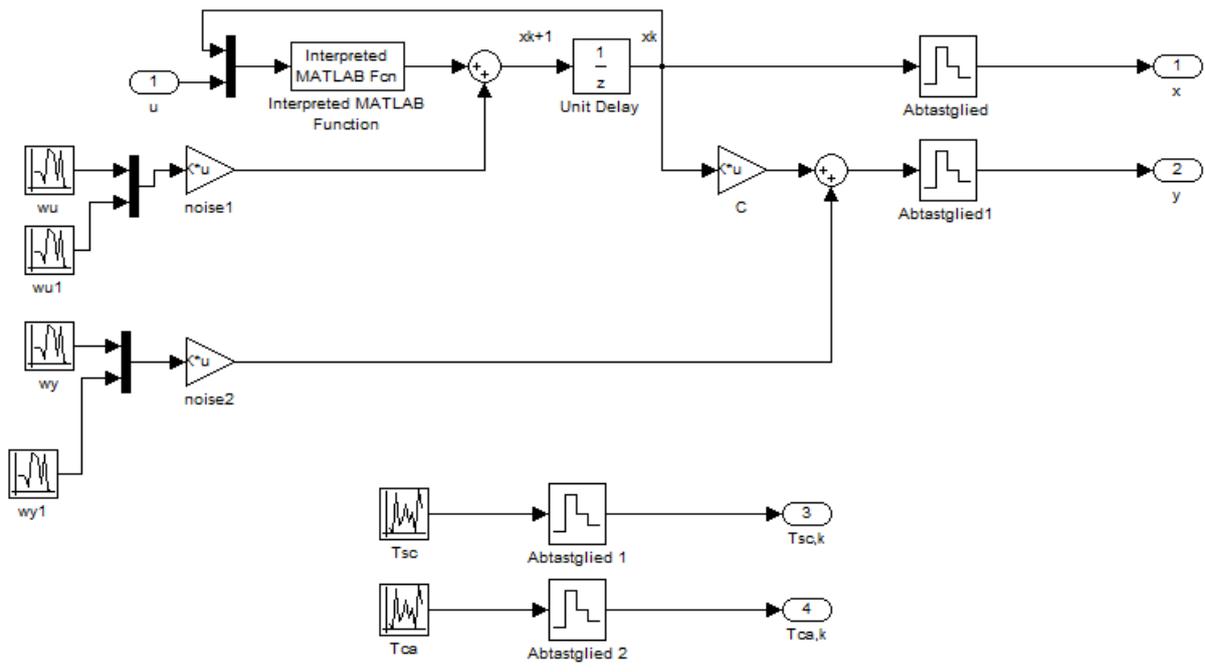


Abbildung 30: Nichtlinearer Streckenaufbau, Detail Strecke

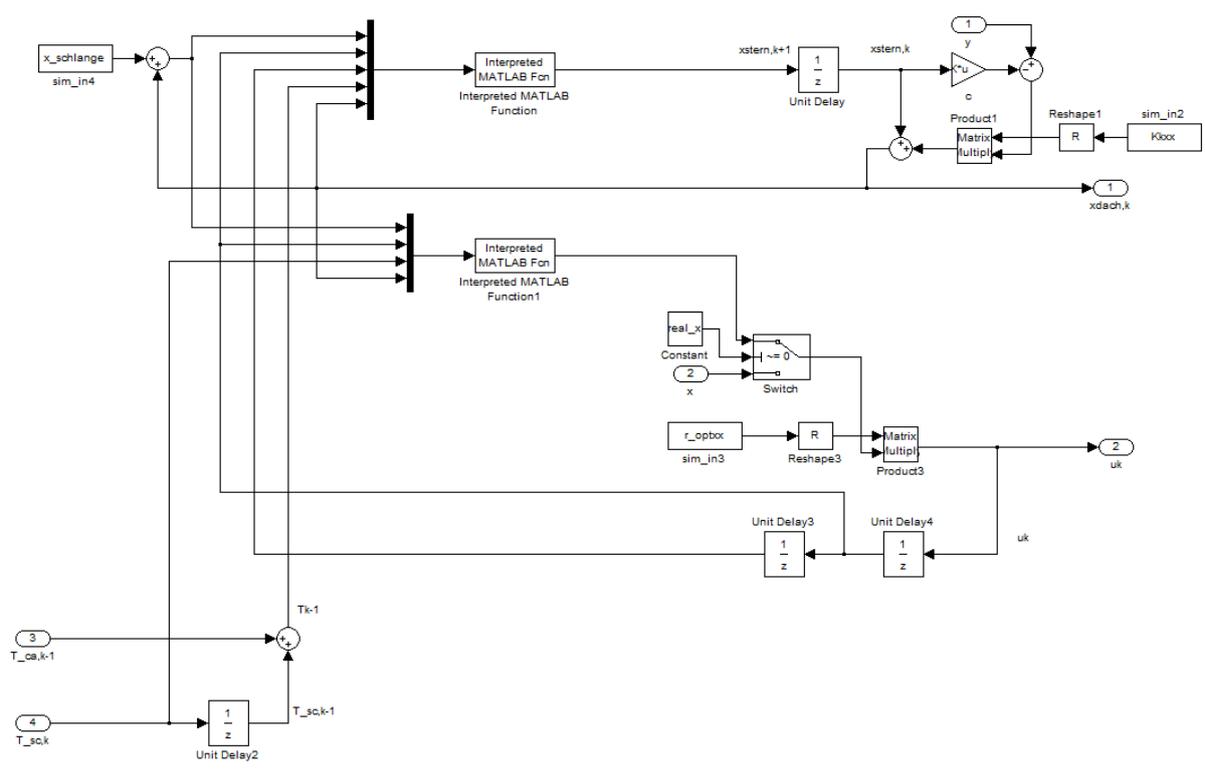


Abbildung 31: Nichtlinearer Streckenaufbau, Detail Regler

## A.2 Literaturverzeichnis

- [1] J. Nilsson, Real-Time Control Systems with Delays, Lund Institute of Technology, Schweden: Department of Automatic Control, 1998.
- [2] F. Gausch, A. Hofer und K. Schlacher, Digitale Regelkreise, Wien, Österreich: R. Oldenbourg Verlag, 1993.
- [3] A. Onat und M. E. Parlakay, Implementation of Model Based Networked Predictive Control System, Linz, Österreich: 9th Real-Time Linux Workshop (RTLW09), 2007.
- [4] C. F. Căruntu, Networked Predictive Control for Fast Processes, Iași, Rumänien: Technische Universität "Gheorghe Asachi" Iași, 2011.
- [5] D. Hristu-Varsakelis und L. Zhang, LQG control of networked control systems with access constraints and delays, Thessaloniki, Griechenland: Taylor & Francis, 2008.
- [6] O. C. Imer und T. Başar, To Measure or to Control: Optimal Control with Scheduled Measurements and Controls., Minneapolis, USA: American Control Conference, 2006.
- [7] D. L. Mills, Internet Time Synchronization: The Network Time Protocol., IEEE Transactions on Communications: IEEE, 1991.
- [8] B. Azimi-Sadjadi, Stability of Networked Control Systems in the Presence of Packet Losses., IEEE Conference on Decision and Control: IEEE, 2003.
- [9] R. Luck und A. Ray, An Observer-based Compensator for Distributed Delays, Elsevier, 1990.
- [10] F. Hao und X. Zhao, Linear matrix inequality approach to static output-feedback stabilisation of discrete-time networked control systems, Peking, China: IET, 2010.
- [11] Y. Tipsuwan und M.-Y. Chow, Control methodologies in networked control systems, Raleigh, USA: Elsevier, 2003.
- [12] J.-P. Richard, Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems, Cedex, France: Elsevier, 2003.
- [13] A. Barkefors, M. Sternad und L.-J. Brännmark, Design and Analysis of Linear Quadratic Gaussian Feedforward Controllers for Active Noise Control, IEEE, 2014.

- [14] A. Kalbat, Linear Quadratic Gaussian (LQG) Control of Wind Turbines, Istanbul, Turkey: IEEE, 2013.
- [15] S. M. Darbandi, M. Behzad, H. Salarieh und H. Mehdigholi, Linear Output Feedback Control of a Three-Pole Magnetic Bearing, IEEE, 2014.
- [16] J. Fischer, A. Hekler, M. Dolgov und U. D. Hanebeck, Optimal Sequence-Based LQG Control over TCP-like Networks Subject to Random Transmission Delays and Packet Losses, Washington DC, USA: American Control Conference, 2013.
- [17] T. Alpcan, J. P. Singh und T. Başar, Robust Rate Control for Heterogeneous Network Access in Multihomed Environments, IEEE, 2009.
- [18] A. Molin und S. Hirche, On LQG Joint Optimal Scheduling and Control under Communication Constraints, Shanghai, China: IEEE, 2009.
- [19] R. Bauer, Zustandsschätzung und Filterung, Graz, Österreich: IRT TUGraz, 2007.
- [20] M. Horn und N. Dourdoumas, Regelungstechnik - Regelungstechnischer Entwurf zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Regelkreise, Pearson Studium, 2004.
- [21] A. Linnemann, Numerische Methoden für lineare Regelungssysteme, BI Wissenschaftsverlag, 1993.
- [22] P. Naghshtabrizi, J. P. Hespanha und A. R. Teel, Exponential stability of impulsive systems with application to uncertain sampled-data systems, Santa Barbara, USA: Elsevier, 2007.
- [23] J. C. Doyle und G. Stein, Robustness with observers, San Diego, USA: IEEE, 1978.
- [24] D. Karner und S. Tschiggerl, Inbetriebnahme und Regelung eines Ball on Plate Systems, Graz, Österreich: IRT TU Graz, 2014.
- [25] W. Xu, J. Pan, J. Wei und J. M. Dolan, Motion Planning under Uncertainty for On-Road Autonomous Driving, Hong Kong, China: IEEE, 2014.
- [26] W. Xu, J. Wei, J. M. Dolan, H. Zhao und H. Zha, A Real-Time Motion Planner with Trajectory Optimization for Autonomous Vehicles, Saint Paul, USA: IEEE, 2012.