



Markus Kraxner

## **Drehquadriken durch vier komplanare Punkte**

### **DIPLOMARBEIT**

zur Erlangung des akademischen Grades

Magister der Naturwissenschaften

Lehramtsstudium Unterrichtsfach Darstellende Geometrie

eingereicht an der

**Technischen Universität Graz**

Betreuer

Ao. Univ.-Prof. Mag.rer.nat. Dr.techn. Anton Gferrer

Institut für Geometrie

## **EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG**

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Diplomarbeit identisch.

---

Datum

---

Unterschrift

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Kurven 2. Ordnung</b>	<b>5</b>
2.1	Kreise . . . . .	6
2.2	Mittelpunkt eines Kegelschnitts . . . . .	6
2.3	Achsen eines Kegelschnitts . . . . .	7
2.4	Euklidische Klassifikation der Kurven 2. Ordnung . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Kurven 2. Ordnung durch vier Punkte allgemeiner Lage</b>	<b>11</b>
3.1	Lineare Algebra Basics . . . . .	11
3.2	Kurven 2. Ordnung durch fünf paarweise verschiedene Punkte . . . . .	12
3.3	Kegelschnittsbüschel erster Art . . . . .	12
3.4	Anpassung des Koordinatensystems . . . . .	13
3.5	Lage der vier komplanaren Punkte . . . . .	15
3.6	Mittelpunkte der Kegelschnitte eines Büschels . . . . .	18
3.7	Die Achsen der Kegelschnitte eines Kegelschnittsbüschels erster Art . . . . .	23
3.8	Sonderfall: Kreisviereck . . . . .	24
3.9	Achsen der Kegelschnitte des Büschels und ihre Hüllkurve . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Quadriken</b>	<b>31</b>
<b>5</b>	<b>Drehquadriken</b>	<b>32</b>
5.1	Kanonische Parametrisierung und Eigenschaften von Drehquadriken . . . . .	32
5.2	Klassifikation und Parameterdarstellung von Drehquadriken . . . . .	33
5.3	Drehquadriken durch vorgegebene Punkte . . . . .	36
5.4	Mittelpunkt einer Drehquadrik . . . . .	38
5.5	Drehquadriken durch einen Kegelschnitt . . . . .	39
5.5.1	Fokalkegelschnitte . . . . .	39
5.5.2	Beispiel 1) Ellipse . . . . .	39
5.5.3	Beispiel 2) Hyperbel . . . . .	40
5.5.4	Beispiel 3) Parabel . . . . .	41
5.5.5	Paare von Fokalkegelschnitten . . . . .	41
5.5.6	Allgemeine Überlegungen zu Drehkegel und Drehzylinder . . . . .	41
5.5.7	Drehquadriken durch einen Kegelschnitt . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Drehquadriken durch vier komplanare Punkte</b>	<b>44</b>
6.1	Allgemeine Überlegungen über Drehkegel und Drehzylinder . . . . .	44
6.2	Drehquadriken durch vier komplanare Punkte . . . . .	45
6.3	Aufgabe 1 . . . . .	49
6.4	Aufgabe 2 . . . . .	54
6.5	Sonderfall . . . . .	60
6.5.1	Sonderfall zur Aufgabe 1 . . . . .	60
6.5.2	Sonderfall zur Aufgabe 2 . . . . .	60
6.5.3	Aufgabe 2 mit vorgegebenen Trapez . . . . .	62
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>63</b>



## Danksagung

Zunächst möchte ich mich an dieser Stelle bei all denjenigen bedanken, die mich während der Anfertigung dieser Diplomarbeit unterstützt haben.

Ganz besonders gilt dieser Dank meinem Betreuer Herrn Ao. Univ.-Prof. Mag. rer.nat. Dr.techn. Anton Gfrerrer für seine ausgiebige Unterstützung. Nicht nur gab er mir durch stetiges kritisches Hinterfragen wertvolle Hinweise - auch durch seine herausragende Expertise auf diesem Fachgebiet konnte er mich bei offenen Fragen und bei meiner Recherche bestmöglich unterstützen. Auch leistete er einen wertvollen Beitrag bei der Erstellung der Bilder der Drehquadriken. Vielen Dank für Ihre Zeit und Mühen, die Sie in meine Arbeit investiert haben. Daneben gilt mein Dank meinem Kollegen Bernhard Wakolbinger, der mich während unserer gemeinsamen Studienzzeit als einziger Mitstudent stets begleitet hat. Ohne seine Mithilfe beim Lernen für gemeinsame Prüfungen wäre eine Vollendung des Studiums niemals zustande gekommen.

Meinen Eltern und meiner Familie möchte ich danken, dass sie mich während meiner gesamten Ausbildungszeit immer herzlich unterstützt haben.

Nicht zuletzt gebührt meiner Freundin Dank, die sehr viel Geduld mit mir hatte. Ihre moralische Unterstützung und kontinuierliche Motivation haben einen großen Teil zur Fertigstellung dieser Arbeit beigetragen.

# 1 Einleitung

Diese Diplomarbeit wurde zur Erlangung des akademischen Grades Mag.rer.nat. in den Unterrichtsfächer Mathematik und Darstellende Geometrie von Markus Kraxner unter der Betreuung von Herrn Ao. Univ.-Prof. Mag.rer.nat. Dr.techn. Anton Gfrerrer verfasst.

Erste Untersuchungen auf diesem Gebiet führte E. Laguerre 1879 ([1]) durch, der die Drehachsen aller Drehquadriken durch fünf Punkte des Raumes betrachtete. Weitere bekannte Ergebnisse finden sich in den Publikationen von H. Schaal ([2], [3]), der Drehkegel und Drehzylinder durch vier Punkte einer Ebene untersuchte. Dadurch angeregt veröffentlichte U. Strobel ein Werk über Drehkegel durch vier allgemeine Punkte ([4]). Einen weiteren Beitrag auf diesem Gebiet leistete O. Röschel mit seiner 1994 erschienenen Arbeit über Drehflächen zweiter Ordnung durch einen Kegelschnitt ([5]). Eine ähnliche Arbeit veröffentlichte bereits schon Narasinga 1928 ([6]). Zu den aktuelleren Werken zählt das von A. Gfrerrer und J.P. Zsombor-Murray ([7]), die in ihrer Arbeit Algorithmen angeben, durch die man Drehquadriken durch vorgegebene Punkte allgemeiner Lage finden kann.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Untersuchung aller Drehquadriken durch vier vorgegebene Punkte, die in einer Ebene liegen. Unter anderem werden auch zwei weitere Aufgaben aufgezeigt, bei der die Vorgabe von Achsenrichtungen oder Mittelpunkten der Drehquadriken die Lösungsmenge dieser einschränkt oder erweitert. Der Aufbau der Arbeit ist wie folgt:

In den Kapiteln 2, 3 und 4 werden grundlegende Eigenschaften von Kegelschnitten durch vier Punkte bestimmten Kegelschnittbüscheln und Quadriken bereit gestellt. Unter anderem wird das zugrundegelegte Koordinatensystem bestmöglich an das gegebene Punktquadrupel angepasst, was eine einfache Beschreibung des durch die vier Punkte bestimmten Kegelschnittsbüschels ermöglicht. Hierbei folgen wir der Vorgangsweise aus [2].

In Kapitel 5 wird zunächst die Menge aller Drehquadriken des dreidimensionalen euklidischen Raumes gemäß der in [7] vorgeschlagenen Methode parametrisiert. Eigenschaften von Drehquadriken die für die gestellte Aufgabe von Bedeutung sind, werden hergeleitet. Außerdem werden die von Röschel [5] gefundenen Ergebnisse bereit gestellt.

Im Hauptteil der Arbeit (Kapitel 6) bestimmen wir schließlich alle Drehquadriken durch vier gegebene komplanare Punkte und lösen diese Aufgabe auch, wenn zusätzlich die Achsenrichtung oder der Mittelpunkt der gesuchten Quadriken vorgegeben ist.

## 2 Kurven 2. Ordnung

Wir verwenden in dieser Arbeit stets ein ebenes oder räumliches kartesisches Koordinatensystem beziehungsweise das zu diesen gehörende projektive Koordinatensystem  $\Sigma$ :

•) Im ebenen Fall ist  $\Sigma = O_0, O_1, O_2, E$ , wobei  $O_0$  mit dem Koordinatenursprung des kartesischen Koordinatensystems zusammenfällt,  $O_1, O_2$  die Fernpunkte von  $x$ -Achse und  $y$ -Achse sind und  $E$  der Punkt mit kartesischen Koordinaten  $(1, 1)$  ist.

Der Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten  $(x, y)$  eines eigentlichen Punktes  $X$  und seinen homogenen Koordinaten  $(x_0, x_1, x_2)$  ist dann durch  $x = \frac{x_1}{x_0}$ ,  $y = \frac{x_2}{x_0}$  gegeben. Fernpunkte sind durch  $x_0 = 0$  charakterisiert.

•) Im räumlichen Fall ist  $\Sigma = O_0, O_1, O_2, O_3, E$ , wobei  $O_0$  mit dem Koordinatenursprung des kartesischen Koordinatensystems zusammenfällt,  $O_1, O_2, O_3$  die Fernpunkte von  $x$ -Achse,  $y$ -Achse und  $z$ -Achse sind und  $E$  der Punkt mit kartesischen Koordinaten  $(1, 1, 1)$  ist.

Der Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten und homogenen Koordinaten gilt analog wie im ebenen Fall.

**Definition 2.1.** *Eine Kurve zweiter Ordnung kann immer mit einer quadratischen Gleichung beschrieben werden. Dadurch lautet die allgemeine Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung*

$$c_{1,1}x^2 + 2c_{1,2}xy + c_{2,2}y^2 + 2c_{0,1}x + 2c_{0,2}y + c_{0,0} = 0 \quad (1)$$

mit  $c_{i,j} \in \mathbb{R}$   $i, j = 0, 1, 2$   $(c_{1,1}, c_{1,2}, c_{2,2}) \neq (0, 0, 0)$

beziehungsweise

$$(1, x, y) \cdot \begin{pmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & c_{0,2} \\ c_{0,1} & c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{0,2} & c_{1,2} & c_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

wobei der Faktor 2 vor den Skalaren  $c_{1,2}, c_{0,1}$  und  $c_{0,2}$  aus Symmetriegründen verwendet wird.

**Bemerkung 2.2.** *Für eine effektivere Schreibweise wird in dieser Arbeit die symmetrische Matrix mit  $\begin{pmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & c_{0,2} \\ c_{0,1} & c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{0,2} & c_{1,2} & c_{2,2} \end{pmatrix} =: C$  benannt.*

**Bemerkung 2.3.** *Geht man zu homogenen Koordinaten  $(x_0, x_1, x_2)$  über ( $x = \frac{x_1}{x_0}$ ,  $y = \frac{x_2}{x_0}$ ), dann lautet die Gleichung (2) der Kurve zweiter Ordnung wie folgt:*

$$(x_0, x_1, x_2) \cdot C \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

**Lemma 2.4.** *Sei  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dann beschreiben  $C$  und  $\lambda C$  denselben Kegelschnitt.*

*Beweis.*  $x^T C x = 0 \Leftrightarrow \lambda x^T C x = 0 \Leftrightarrow x^T (\lambda C) x = 0$  □

## 2.1 Kreise

Ein beliebiger Kreis  $l$  ist mit

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 - r^2 = 0 \quad (4)$$

gegeben. Ausmultipliziert ergibt das  $x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + m^2 + n^2 - r^2 = 0$ . Dieser Ausdruck in homogenen Koordinaten dargestellt, schaut wie folgt aus:

$$(x_0, x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} m^2 + n^2 - r^2 & -m & -n \\ -m & 1 & 0 \\ -n & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (5)$$

Schneidet man diese Kurve zweiter Ordnung mit der Ferngeraden  $u$  ( $x_0 = 0$ ), so ergibt sich

$$\begin{aligned} x_1^2 &= -x_2^2 \Rightarrow \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 = -1 \\ \left(\frac{x_1}{x_2}\right) &= \pm i, \text{ mit } i^2 = -1 \end{aligned} \quad (6)$$

**Bemerkung 2.5.** *Alle Kreise sind Kurven zweiter Ordnung, die durch zwei feste konjugiert komplexe Punkte der Ferngeraden  $u$  gehen. Sie heißen absolute Kreispunkte  $I(0 : 1 : i)$  und  $\bar{I}(0 : 1 : -i)$ .*

Dadurch ergeben sich für Kreise zwei Bedingungen:

$$c_{1,1} = c_{2,2}, \text{ und } c_{1,2} = 0 \quad (7)$$

Die Darstellung für Kreise in der Form wie aus (2) sieht dann wie folgt aus:

$$(1, x, y) \cdot \begin{pmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & c_{0,2} \\ c_{0,1} & 1 & 0 \\ c_{0,2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad (8)$$

## 2.2 Mittelpunkt eines Kegelschnitts

**Definition 2.6.** *Sei  $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , regulär und symmetrisch und  $x^T C x = 0$  die Gleichung eines Kegelschnitts  $k$ .  $P$  ist ein Punkt der projektiven Ebene mit der homogenen Koordinatenspalte  $\vec{p} = (p_0, p_1, p_2)^T$ . Sei die Gerade  $g$  mit den homogenen Koordinaten  $p^T C$ . Dann heißt  $P$  der Pol zu  $g$  und  $g$  Polare zu  $P$  bezüglich des Kegelschnitts  $k$ .*

*Das Paar  $(\wp, \hat{\wp})$  von Abbildungen*

$$\wp : P(\mathbb{R}^3) \rightarrow \{\text{Geraden des } P(\mathbb{R}^3)\}, [p] \mapsto p^T C$$

$$\hat{\wp} : \{\text{Geraden des } P(\mathbb{R}^3)\} \rightarrow P(\mathbb{R}^3), g \mapsto [C^{-1}g]$$

*heißt Polarsystem des Kegelschnitts  $k$ .*

**Definition 2.7.** *Sei  $k$  ein Kegelschnitt, der nicht die Ferngerade berührt. Der Pol der Ferngerade heißt Mittelpunkt  $M_k$  des Kegelschnittes  $k$ .*

Mit obigen Definitionen berechnet man den Mittelpunkt  $M_k$  eines gegebenen Kegelschnitts wie folgt:

Sei  $k$  der Kegelschnitt mit der Gleichung  $x^T C x = 0$ . Die Ferngerade besitzt die Gleichung  $x_0 = 0$  beziehungsweise die homogenen Geradenkoordinaten  $(1, 0, 0)$ .

Der Pol der Ferngeraden zum Kegelschnitt  $k$  ist der gesuchte Mittelpunkt. Da  $C$  einen Kegelschnitt beschreibt und somit regulär ist, existiert  $C^{-1}$ . Daher muss für die homogenen Koordinaten  $(m_0, m_1, m_2)$  des Mittelpunktes  $M_k$  von  $k$  gelten:

$$\begin{aligned} (m_0, m_1, m_2) \cdot C &= (1, 0, 0) \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_{0,1} \\ c_{1,1} \\ c_{1,2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{0,2} \\ c_{1,2} \\ c_{2,2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

### 2.3 Achsen eines Kegelschnitts

Gegeben sei ein Mittelpunktskegelschnitt (Kegelschnitt ist keine Parabel)  $k$ .  $\iota_k$  bezeichne die Involution konjugierter Punkte, die durch  $k$  auf der Ferngeraden  $u$  induziert wird.

Ist

$$(x_0, x_1, x_2) \begin{pmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & c_{0,2} \\ c_{0,1} & c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{0,2} & c_{1,2} & c_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (10)$$

die Gleichung von  $k$ , dann gilt  $X_{u\dots}(0, x_1, x_2)$  und  $Y_{u\dots}(0, y_1, y_2)$  entsprechen einander bei  $\iota_k \Leftrightarrow$

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{1,2} & c_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (11)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_{1,2} & -c_{2,2} \\ c_{1,1} & c_{1,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Kreise sind wie wir bereits wissen durch  $c_{1,1} = c_{2,2}$  und  $c_{1,2} = 0$  gekennzeichnet. Ist daher  $l$  ein Kreis, dann wird die Involution konjugierter Fernpunkte  $\iota_l$  bezüglich  $l$  durch

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

beschrieben:

$\iota_l$  wird durch jede Rechtwinkel-Involution auf  $u$  induziert. Die Achsenfernpunkte eines gegebenen Kegelschnitts  $k$  sind jene Punkte  $X_u, Y_u$  auf  $u$ , die einander sowohl bei  $\iota_k$  als auch  $\iota_l$  entsprechen. Daher gilt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -c_{1,2} & -c_{2,2} \\ c_{1,1} & c_{1,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -c_{1,2} & -c_{2,2} + \sigma \\ c_{1,1} - \sigma & c_{1,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= 0, \end{aligned}$$

also

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} - \sigma & c_{1,2} \\ c_{1,2} & c_{2,2} - \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (14)$$

Daher sind die Koordinatenspalten  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  der Achsenfernpunkte Eigenvektoren der  $2 \times 2$ -Untermatrix  $\tilde{C} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{1,2} & c_{2,2} \end{pmatrix}$  von  $C$ .

Die Eigenwerte  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  bekommt man Hilfe der Determinante von  $(C - \sigma E)$  und setzt die quadratische Gleichung gleich Null:

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} - \sigma & c_{1,2} \\ c_{1,2} & c_{2,2} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (c_{1,1} - \sigma) \cdot (c_{2,2} - \sigma) - c_{1,2}^2 = \\ \sigma^2 - \sigma c_{1,1} - \sigma c_{2,2} + c_{1,1}c_{2,2} - c_{1,2}^2 = 0$$

Diese quadratische Gleichung wird nach  $\sigma$  aufgelöst und man erhält die beiden Eigenwerte  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ :

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(c_{1,1} + c_{2,2} \pm \sqrt{(c_{1,1} - c_{2,2})^2 + 4c_{1,2}^2}) \quad (15)$$

Die Eigenvektoren erhält man am einfachsten, indem man (13) in (11) einsetzt:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{1,2} & c_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} &= 0 \\ (x_1, x_2) \begin{pmatrix} -c_{1,1}x_2 + c_{1,2}x_1 \\ -c_{1,2}x_2 + c_{2,2}x_1 \end{pmatrix} &= 0 \\ -c_{1,1}x_1x_2 + c_{1,2}x_1^2 - c_{1,2}x_2^2 + c_{2,2}x_1x_2 &= 0 \\ c_{1,2}x_1^2 + (c_{2,2} - c_{1,1})x_1x_2 - c_{1,2}x_2^2 &= 0 \\ \Rightarrow c_{1,2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + (c_{2,2} - c_{1,1})\frac{x_1}{x_2} - c_{1,2} &= 0 \\ \left(\frac{x_1}{x_2}\right)_{1,2} &= \frac{c_{1,1} - c_{2,2} \pm \sqrt{(c_{1,1} - c_{2,2})^2 + 4c_{1,2}^2}}{2c_{1,2}} \end{aligned}$$

Also lauten die beiden Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} - c_{2,2} \pm \sqrt{(c_{1,1} - c_{2,2})^2 + 4c_{1,2}^2} \\ 2c_{1,2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

## 2.4 Euklidische Klassifikation der Kurven 2. Ordnung

Die verschiedenen Typen der Kurven zweiter Ordnung kann man nun wie folgt klassifizieren. Wir setzen allerdings voraus, dass die Ferngerade  $u$  kein Teil der Kurve ist, was bedeutet, dass  $c_{1,1}, c_{1,2}, c_{2,2}$  nicht gleichzeitig null sind.

Die Größen

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & c_{0,2} \\ c_{0,1} & c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{0,2} & c_{1,2} & c_{2,2} \end{vmatrix}, \quad (17)$$

$$\delta = \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{1,2} & c_{2,2} \end{vmatrix}, \quad (18)$$

$$H = c_{1,1} + c_{2,2} \quad (19)$$

und

$$S = c_{0,0}H - (c_{0,1}^2 + c_{0,2}^2) \quad (20)$$

geben nun die Art der Kurve zweiter Ordnung an.

Eine vollständige Auflistung findet sich in folgender Tabelle:

	$\Delta \neq 0$ : reguläre Kurve 2. Ordnung (Kegelschnitt)	$\Delta = 0$ : singuläre Kurve 2. Ordnung
$\delta \neq 0$ : Kurve 2. Ordnung mit Mittelpunkt	$\delta > 0$ : <i>nullteilige Ellipse</i> $H\Delta \begin{cases} > 0 & \textit>nullteilige Ellipse} \\ < 0 & \textit{einteilige Ellipse} \end{cases}$	$\delta > 0$ : Paar konjugiert komplexer Geraden mit eigentlichem Schnittpunkt
	$\delta < 0$ : Hyperbel	$\delta < 0$ : Paar reeller Geraden mit eigentlichem Schnittpunkt
$\delta = 0$ : Kurve 2. Ordnung mit einer einzigen Symmetrieachse	Parabel	$S > 0$ : Paar konjugiert komplexer paralleler Geraden
		$S = 0$ : reelle Doppelgerade
		$S < 0$ : Paar reeller paralleler Geraden

Für die Herleitung und Beweise vergleiche [8].

In den meisten Schulbüchern und mathematischen Formelsammlungen werden häufig nur die regulären Kurven zweiter Ordnung behandelt. Dazu zählen wie oben bereits erwähnt die Kegelschnitte. Dabei werden diese mit Gleichungen zweiten Grades in einem kartesischen Koordinatensystem beschrieben, wobei sich die Kegelschnitte in Hauptlagen befinden. Das heißt ihre Achsen liegen in den Koordinatenachsen, und der Mittelpunkt beziehungsweise bei der Parabel der Scheitel liegt im Ursprung  $(0, 0)$ .

$$\textit{Ellipse} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \textit{ mit } a, b \neq 0 \quad (21)$$

und bei  $a = b$  ergibt sich ein Kreis.

$$\textit{Hyperbel} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \textit{ mit } a, b \neq 0 \quad (22)$$

$$\textit{Parabel} \quad y = ax^2 \textit{ mit } a \neq 0 \quad (23)$$

Besitzt die Kurve zweiter Ordnung einen Mittelpunkt  $M_k$  und kennt man ihre zugehörigen Achsenrichtungen, so kann man für diese Kurve die halbe Hauptachsenlänge  $\tilde{a}$  und halbe Nebenachsenlänge  $\tilde{b}$  einfach berechnen.

Im regulären Fall, das heißt  $\Delta \neq 0$ , haben wir wie oben bereits in der Tabelle

aufgelistet zu unterscheiden, ob es sich um ein Hyperbel oder nullteilige beziehungsweise einteilige Ellipse handelt. In allen drei Fällen hat man als halbe Hauptachsenlänge und halbe Nebenachsenlänge

$$\tilde{a} := \sqrt{\left| \frac{\Delta}{\delta \cdot \sigma_1} \right|}, \quad \tilde{b} := \sqrt{\left| \frac{\Delta}{\delta \cdot \sigma_2} \right|} \quad (24)$$

### 3 Kurven 2. Ordnung durch vier Punkte allgemeiner Lage

#### 3.1 Lineare Algebra Basics

Wir wiederholen einige Sachverhalte aus der linearen Algebra: Beschreibt die Gleichung

$$M \cdot \vec{x} = \vec{d} \tag{25}$$

ein lineares Gleichungssystem mit  $M = \begin{pmatrix} m_{1,1}, \dots, m_{1,n} \\ \vdots \\ m_{n,1}, \dots, m_{n,n} \end{pmatrix}$ ,  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  als Unbekannte, und  $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$  als Vektor, so lässt sich Folgendes über den zugehörigen Lösungsraum sagen.

**Satz 3.1.** a) Der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems  $M \cdot \vec{x} = \vec{d}$  ist genau dann nicht leer, wenn  $\text{Rang}(M) = \text{Rang}(M, \vec{d})$ .

b) Die Lösung des linearen Gleichungssystems ist eindeutig, wenn  $\det(M) \neq 0$  ist. Die Lösung ist dann  $\vec{x} = M^{-1} \cdot \vec{d}$ .

**Bemerkung 3.2.** Ist der Vektor  $\vec{d} = \vec{0}$ , dann spricht man von einem homogenen Gleichungssystem.

**Satz 3.3.** Gilt für ein homogenes Gleichungssystem  $\det(M) \neq 0$ , so besitzt es als Lösungsraum nur die triviale Lösung  $\vec{x} = \vec{0}$ .

Spricht man von einem homogenen linearen Gleichungssystem, so besitzt dieses  $n + 1$  Unbekannte und nur  $n$  Gleichungen

$$\begin{aligned} m_{1,0}x_0 + \dots + m_{1,n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ m_{n,0}x_0 + \dots + m_{n,n}x_n &= 0 \end{aligned}$$

**Satz 3.4.** Ein homogenes lineares Gleichungssystem hat als Lösungsraum folgende Menge:

$$(x_0 : \dots : x_n) = (-1)^0 \cdot \Delta_0 : \dots : (-1)^n \cdot \Delta_n \text{ mit } \Delta_i = \begin{vmatrix} m_{1,0} \dots m_{1,i-1} & m_{1,i+1} \dots m_{1,n} \\ \vdots & \vdots \\ m_{n,0} \dots m_{n,i-1} & m_{n,i+1} \dots m_{n,n} \end{vmatrix}, \tag{26}$$

sofern nicht alle  $\Delta_i = 0$  sind.

**Beispiel 3.5.**  $m_{1,0}x_0 + m_{1,1}x_1 + m_{1,2}x_2 = 0$   
 $m_{2,0}x_0 + m_{2,1}x_1 + m_{2,2}x_2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^0 \cdot \begin{pmatrix} m_{1,1}, m_{1,2} \\ m_{2,1}, m_{2,2} \end{pmatrix} \\ (-1)^1 \cdot \begin{pmatrix} m_{1,0}, m_{1,2} \\ m_{2,0}, m_{2,2} \end{pmatrix} \\ (-1)^2 \cdot \begin{pmatrix} m_{1,0}, m_{1,1} \\ m_{2,0}, m_{2,1} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1}m_{2,2} - m_{1,2}m_{2,1} \\ -(m_{1,0}m_{2,2} - m_{2,0}m_{1,2}) \\ m_{1,0}m_{2,1} - m_{2,0}m_{1,1} \end{pmatrix}$$

**Bemerkung 3.6.** *Im vorigen Beispiel ist leicht zu erkennen, dass die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystem im Fall für  $n = 2$  mit dem Kreuzprodukt von  $\begin{pmatrix} m_{1,0} \\ m_{1,1} \\ m_{1,2} \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} m_{2,0} \\ m_{2,1} \\ m_{2,2} \end{pmatrix}$  übereinstimmt.*

### 3.2 Kurven 2. Ordnung durch fünf paarweise verschiedene Punkte

**Satz 3.7.** *Sind fünf paarweise verschiedene komplanare Punkte, die nicht kollinear liegen, vorgegeben, so kann man eine eindeutige Kurve zweiter Ordnung durch diese fünf Punkte legen.*

Sind 5 Punkte  $P_i$  mit Koordinaten  $(p_{i,0}, p_{i,1}, p_{i,2})$  mit  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  gegeben.

Gesucht ist die Gleichung der Kurve zweiter Ordnung durch diese fünf Punkte  $P_i$ .

Die fünf Punkte liegen alle auf der Kurve zweiter Ordnung und erfüllen Gleichung (2). Eingesetzt ergibt das die Gleichungen

$$p_{i,1}^2 \cdot c_{1,1} + 2 \cdot p_{i,1}p_{i,2} \cdot c_{1,2} + p_{i,2}^2 \cdot c_{2,2} + 2 \cdot p_{i,0}p_{i,1} \cdot c_{0,1} + 2 \cdot p_{i,0}p_{i,2} \cdot c_{0,2} + p_{i,0}^2 \cdot c_{0,0} = 0 \quad (27)$$

für  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . Dadurch erhält man fünf homogene Gleichungen in den sechs Unbekannten  $c_{0,0}, c_{0,1}, c_{0,2}, c_{1,1}, c_{1,2}$  und  $c_{2,2}$ .

Die Lösungsmenge dieses homogenen linearen Gleichungssystem erhält man nun in Abhängigkeit von der

$$\text{Matrix } M = \begin{pmatrix} p_{1,1}^2, 2 \cdot p_{1,1}p_{1,2}, p_{1,2}^2, 2 \cdot p_{1,0}p_{1,1}, 2 \cdot p_{1,0}p_{1,2}, p_{1,0}^2 \\ \vdots \\ p_{5,1}^2, 2 \cdot p_{5,1}p_{5,2}, p_{5,2}^2, 2 \cdot p_{5,0}p_{5,1}, 2 \cdot p_{5,0}p_{5,2}, p_{5,0}^2 \end{pmatrix} \text{ wie in (26) be-}$$

schrieben. Man kann zeigen, dass wenn die fünf Punkte  $P_i$  nicht alle auf einer Geraden liegen, dann ist mindestens ein  $\Delta_i \neq 0$  aus (26). Dadurch sind die Einträge  $c_{i,j}$ ,  $i, j = 0, 1, 2$  bis auf ein Vielfaches bestimmt und definieren daher nach Lemma (2.4) eine eindeutige Kurve zweiter Ordnung.

### 3.3 Kegelschnittsbüschel erster Art

Sind allerdings nur vier Punkte vorgegeben, kann man den fünften Punkt, der die Kurve zweiter Ordnung eindeutig bestimmt, frei wählen. Das heißt, dass man bei vier vorgegebenen komplanaren Punkte einen Freiheitsgrad hat, um alle Kurven zweiter Ordnung durch diese vier Punkte zu bestimmen.

**Definition 3.8.** *Unter einem Kegelschnittsbüschel erster Art versteht man die Menge aller Kurven zweiter Ordnung durch vier in einer Ebene liegende Punkte  $P_0, P_1, P_2, P_3$  allgemeiner Lage.*

**Definition 3.9.** *Gleichungen der Kegelschnitte des Büschels:*

*Sind die Gleichungen  $x^T Ax = 0$  und  $x^T Bx = 0$  von zwei Kurven zweiter Ordnung durch die vier vorgegebenen Punkte bekannt, so lassen sich die Gleichungen aller Kurven zweiter Ordnung durch die vier vorgegebenen Punkte mit Hilfe einer Linearkombination*

$$x^T(\alpha A + \beta B)x = 0 \text{ mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ (\alpha, \beta) \neq (0, 0) \quad (28)$$

erzeugen.

**Bemerkung 3.10.** *Im weiteren Verlauf dieser Arbeit beschreibt  $C(\alpha : \beta) = (\alpha A + \beta B)$  ein Kegelschnittsbüschel.*

**Bemerkung 3.11.** *Die singulären Kurven zweiter Ordnung dieses Büschels sind all jene Kurven zweiter Ordnung, für die  $\det(\alpha A + \beta B) = 0$  gilt.*

Ein Kegelschnitt aus dem obigen dargestellten Kegelschnittsbüschel  $C(\alpha : \beta)$  ist durch das Verhältnis  $\frac{\alpha}{\beta}$  der Skalare  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  eindeutig festgelegt. Daraus folgt, dass eine Kurve zweiter Ordnung mit festen  $\alpha, \beta$  durch die Matrix  $\alpha A + \beta B$  dargestellt wird. Im Fall  $\beta \neq 0$  kann man diese Darstellung in  $\frac{\alpha}{\beta} A + B$  umformen. Wenn man das Verhältnis  $\frac{\alpha}{\beta} = \lambda$  setzt, kann man jede Kurve zweiter Ordnung des Kegelschnittsbüschel mit Ausnahme von  $\beta = 0$  wie folgt darstellen:

$$x^T(\lambda A + B)x = 0 \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \quad (29)$$

### 3.4 Anpassung des Koordinatensystems

Gegeben sei eine Ebene  $\epsilon$  und vier darin liegende Punkte  $P_0, P_1, P_2$  und  $P_3$  allgemeiner Lage - das heißt je drei der Punkte seien nicht kollinear. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir  $\epsilon$  als  $xy$ -Ebene des zugrundegelegten kartesischen Koordinatensystems.

Außerdem wählen wir die  $x$ -Achse und  $y$ -Achse als Winkelsymmetralen der beiden Geraden  $P_0P_1$  und  $P_2P_3$ . Dann besitzen die vier Punkte  $P_i$  die Koordinaten  $(p_i, q_i)$ , wobei  $q_i = \pm k \cdot p_i$  für  $p_i \neq 0$ ,  $k \neq 0$  ist. Dadurch ergeben sich für die Punkte  $P_i$  folgende kartesische Koordinaten (aus [2]):

$$P_0 \dots \begin{pmatrix} p_0 \\ k \cdot p_0 \end{pmatrix}, P_1 \dots \begin{pmatrix} p_1 \\ k \cdot p_1 \end{pmatrix}, P_2 \dots \begin{pmatrix} p_2 \\ -k \cdot p_2 \end{pmatrix} \text{ und } P_3 \dots \begin{pmatrix} p_3 \\ -k \cdot p_3 \end{pmatrix} \quad (30)$$

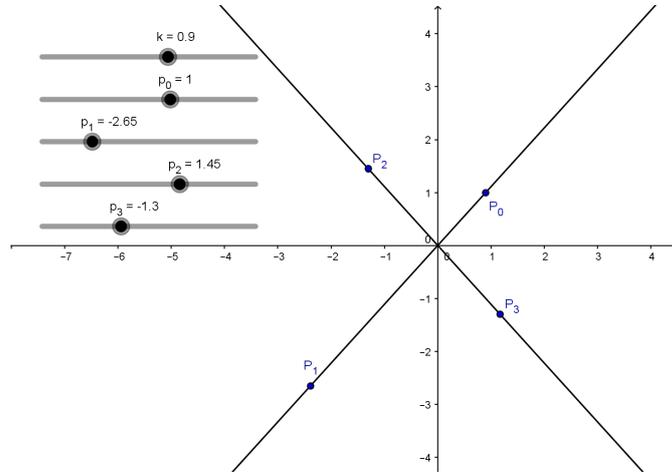


Abbildung 1: Für beliebige Werte  $k, p_i, i = 0, \dots, 3$  ungleich Null, bilden die  $x$ - und  $y$ -Achse immer die Winkelsymmetrale der Geraden  $P_0P_1$  und  $P_2P_3$ .  $k$  gibt zudem die Steigung der Geraden an.

Die Punkte  $P_i$  besitzen folgende homogene Koordinatenspalten:

$$P_0 \dots \begin{pmatrix} 1 \\ p_0 \\ k \cdot p_0 \end{pmatrix}, P_1 \dots \begin{pmatrix} 1 \\ p_1 \\ k \cdot p_1 \end{pmatrix}, P_2 \dots \begin{pmatrix} 1 \\ p_2 \\ -k \cdot p_2 \end{pmatrix} \text{ und } P_3 \dots \begin{pmatrix} 1 \\ p_3 \\ -k \cdot p_3 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt es das Problem sämtliche Kurven zweiter Ordnung zu finden, die durch die vier vorgegebenen komplanaren Punkte gehen. Die vier Punkte wurden bereits vorher bestmöglich in ein Koordinatensystem eingebettet. Wie oben definiert wurde, sucht man nun das Kegelschnittsbüschel erster Art, welches von diesen vier Punkten aufgespannt wird. Dazu erstellt man die Gleichung des Kegelschnittsbüschels mit Hilfe zweier verschiedener Kurven zweiter Ordnung, die durch die vorgegebenen Punkte verlaufen. Zwei leicht aufzustellende Gleichungen für singuläre Kurven zweiter Ordnung  $k_1$  und  $k_2$ , die  $P_0, P_1, P_2, P_3$  beinhalten, sind die Geradenpaare  $P_0P_1, P_2P_3$  sowie  $P_0P_3, P_1P_2$ . Die Gleichungen des Geradenpaares  $P_0P_1, P_2P_3$  in homogenen Koordinaten ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned} P_0P_1 \dots -kx_1 + x_2 &= 0, \\ P_2P_3 \dots kx_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Daher ist  $(-kx_1 + x_2)(kx_1 + x_2) = -k^2x_1^2 + x_2^2 = 0$  beziehungsweise

$$(x_0, x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (31)$$

die Gleichung des Geradenpaares  $P_0P_1, P_2P_3$ .

Für die Gleichungen der Geraden  $P_0P_3, P_1P_2$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} P_0 P_3 \dots (-2k p_0 p_3) x_0 + k(p_0 + p_3) x_1 + (p_3 - p_0) x_2 &= 0, \\ P_1 P_2 \dots (-2k p_1 p_2) x_0 + k(p_1 + p_2) x_1 + (p_2 - p_1) x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Somit ist

$$(x_0, x_1, x_2) \begin{pmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} \\ b_{0,1} & b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{0,2} & b_{1,2} & b_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (32)$$

mit

$$\begin{aligned} b_{0,0} &= 4k^2 p_0 p_1 p_2 p_3, \\ b_{0,1} &= -k^2 [p_1 p_2 (p_0 + p_3) + p_0 p_3 (p_1 + p_2)], \\ b_{0,2} &= k [p_1 p_2 (p_0 - p_3) + p_0 p_3 (p_1 - p_2)], \\ b_{1,1} &= k^2 (p_1 + p_2) (p_0 + p_3), \\ b_{1,2} &= k (p_2 p_3 - p_0 p_1) \text{ und} \\ b_{2,2} &= (p_1 - p_2) (p_0 - p_3). \end{aligned}$$

Wir setzen  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} \\ b_{0,1} & b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{0,2} & b_{1,2} & b_{2,2} \end{pmatrix}$  und erhalten für die allgemeine Kurve 2. Ordnung des durch  $P_0, P_1, P_2, P_3$  aufgespannten Kegelschnittsbüschels erster Art die Gleichung

$$(x_0, x_1, x_2) \cdot (\alpha A + \beta B) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (33)$$

$$(x_0, x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} \beta b_{0,0} & \beta b_{0,1} & \beta b_{0,2} \\ \beta b_{0,1} & -k^2 \alpha + \beta b_{1,1} & \beta b_{1,2} \\ \beta b_{0,2} & \beta b_{1,2} & \alpha + \beta b_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (34)$$

### 3.5 Lage der vier komplanaren Punkte

Durch die Wahl der vier komplanaren Punkte  $P_0, P_1, P_2$  und  $P_3$  können nun die unterschiedlichsten Vierecke aus der Familie der Vierecke auftreten. Diese besondere Lage der vier Punkte hat sowohl auf die Einträge der Matrix  $B$  als auch auf den Mittelpunkt und die Achsenrichtung eines Kegelschnitts des Büschels Auswirkungen. Je nach aufgespannten Viereck der vier komplanaren Punkte ergeben sich unterschiedliche Fälle, wobei ich hier die veränderten  $b_{i,j}$ ,  $i, j = 0, 1, 2$  auflisten möchte:

**Bemerkung 3.12.** Vier Punkte  $P_0, P_1, P_2, P_3$  allgemeiner Lage bestimmen ein  $\begin{cases} \text{nicht-konvexes} \\ \text{konvexes} \end{cases}$  Viereck  $\Rightarrow$  Die Desargues-Involution auf der Ferngeraden  $u$ , welche durch das  $P_0, P_1, P_2, P_3$  aufgespannte Kegelschnittsbüschel bestimmt ist, ist  $\begin{cases} \text{elliptisch.} \\ \text{hyperbolisch.} \end{cases}$

*Beweis.* Ist das Viereck nicht-konvex, dann liegt einer der Punkte - ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $P_3$  - im Inneren des Dreiecks der anderen drei Punkte  $P_0, P_1, P_2$ . Ist hingegen das Viereck konvex, dann liegt jeder der Punkte im Äußeren des Dreiecks der anderen drei Punkte.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liegt  $P_3$  in der Halbebene  $P_0 P_1$  die  $P_2$  enthält und in der Halbebene  $P_0 P_2$  die  $P_1$  enthält. Wir betrachten das affine

Koordinatensystem  $\Sigma = O_0 = P_0, P_0\vec{P}_1 = \vec{b}_1, P_0\vec{P}_2 = \vec{b}_2$ .

Dann gilt  $P_0, P_1, P_2, P_3$  haben die Koordinatenspalten  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_{3x} \\ P_{3y} \end{pmatrix}$

bezüglich  $\Sigma$ , wobei  $\begin{cases} P_{3x} + P_{3y} < 1 & \text{nicht-konvex} \\ P_{3x} + P_{3y} > 1 & \text{konvex} \end{cases}$  mit  $P_{3x}, P_{3y} > 0$ .

Bezüglich des auf  $u$  induzierten projektiven Koordinatensystems  $\Lambda = O_1, O_2, E_0$

mit  $E_0$  als Fernpunkt von  $O_0E$  haben die Fernpunkte der Geraden  $\begin{cases} P_0P_1 \\ P_2P_3 \\ P_0P_2 \\ P_1P_3 \end{cases}$

die homogenen Koordinatenspalten  $\begin{cases} (1, 0)^T \\ (P_{3x}, P_{3y} - 1)^T \\ (0, 1)^T \\ (P_{3x} - 1, P_{3y})^T \end{cases}$ .

Die Desargues-Involution wird dann durch die Punktepaare  $((1, 0)^T, (P_{3x}, P_{3y} - 1)^T)$  und  $((0, 1)^T, (P_{3x} - 1, P_{3y})^T)$  bestimmt. Für das Doppelverhältnis der beiden Punktepaare gilt:

$$DV = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_{3x} & P_{3x} - 1 \\ P_{3y} - 1 & P_{3y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_{3x} & 0 \\ P_{3y} - 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & P_{3x} - 1 \\ 0 & P_{3y} \end{vmatrix}} = \frac{P_{3x} + P_{3y} - 1}{P_{3x}P_{3y}} \quad (35)$$

$$\frac{P_{3x} + P_{3y} - 1}{P_{3x}P_{3y}} \begin{cases} < 0 & \text{falls nicht-konvex} \\ > 0 & \text{falls konvex} \end{cases}.$$

Das heißt, die Desargues-Involution ist elliptisch, falls die Punktepaare trennend sind, und hyperbolisch, falls die Punktepaare nicht trennend sind.  $\square$

Sonderfall 1: Die vier Punkte liegen auf einem Kreis  $\Leftrightarrow b_{1,2} = 0 \Leftrightarrow p_0p_1 - p_2p_3 = 0$

Dadurch ist die Bedingung  $p_0p_1 = p_2p_3$  erfüllt:  $\Rightarrow p_1 = \rho p_3, p_2 = \rho p_0$ .

Es ergeben sich folgende  $b_{i,j}, i, j = 0, 1, 2$ :

$$b_{0,0} = 4k^2 \rho^2 p_0^2 p_3^2,$$

$$b_{0,1} = -k^2 \rho p_0 p_3 (p_0 + p_3)(1 + \rho),$$

$$b_{0,2} = k \rho p_0 p_3 (p_0 - p_3)(\rho - 1),$$

$$b_{1,1} = k^2 \rho (p_0 + p_3)^2,$$

$$b_{1,2} = 0,$$

$$b_{2,2} = -\rho (p_0 - p_3)^2$$

$$C = \begin{pmatrix} 4k^2 \rho^2 p_0^2 p_3^2 & -k^2 \rho p_0 p_3 (p_0 + p_3)(1 + \rho) & k \rho p_0 p_3 (p_0 - p_3)(\rho - 1) \\ -k^2 \rho p_0 p_3 (p_0 + p_3)(1 + \rho) & k^2 (\rho (p_0 + p_3)^2 - \alpha) & 0 \\ k \rho p_0 p_3 (p_0 - p_3)(\rho - 1) & 0 & \alpha - \rho (p_0 - p_3)^2 \end{pmatrix} \quad (36)$$

Im Fall eines Kreisvierecks ergeben sich für die Büschelparameter

$$\begin{aligned} \alpha &= \rho (k^2 (p_0 + p_3)^2 + (p_0 - p_3)^2), \\ \beta &= k^2 + 1 \end{aligned} \quad (37)$$

der Kreis des Büschels und durch Einsetzen und Ermitteln wie in (2.2) lautet der Mittelpunkt

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(1+k^2)(1+\rho)(p_0+p_3) \\ -\frac{1}{4}(-1+k^2)(-1+\rho)(p_0-p_3) \end{pmatrix} \quad (38)$$

Sonderfall 2: Die vier Punkte bilden ein Trapez. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die parallelen Seiten  $P_0P_2, P_1P_3$ .

Es ergibt sich daraus die Bedingung  $p_1 = \varepsilon p_0, p_3 = \varepsilon p_2$ .

Es ergeben sich folgende  $b_{i,j}, i, j = 0, 1, 2$ :

$$\begin{aligned} b_{0,0} &= 4k^2\varepsilon^2 p_0^2 p_2^2, \\ b_{0,1} &= -k^2\varepsilon p_0 p_2 (p_0 + p_2)(1 + \varepsilon), \\ b_{0,2} &= k\varepsilon p_0 p_2 (p_0 - p_2)(1 + \varepsilon), \\ b_{1,1} &= k^2(\varepsilon(p_0^2 + p_2^2) + (1 + \varepsilon^2)p_0 p_2), \\ b_{1,2} &= k\varepsilon(p_2^2 - p_0^2), \\ b_{2,2} &= \varepsilon(p_0^2 + p_2^2) - (1 + \varepsilon^2)p_0 p_2 \\ C &= \begin{pmatrix} 4k^2\varepsilon^2 p_0^2 p_2^2 & -k^2\varepsilon p_0 p_2 (p_0 + p_2)(1 + \varepsilon) & k\varepsilon p_0 p_2 (p_0 - p_2)(1 + \varepsilon) \\ -k^2\varepsilon p_0 p_2 (p_0 + p_2)(1 + \varepsilon) & k^2(\varepsilon(p_0^2 + p_2^2) + (1 + \varepsilon^2)p_0 p_2) - \alpha & k\varepsilon(p_2^2 - p_0^2) \\ k\varepsilon p_0 p_2 (p_0 - p_2)(1 + \varepsilon) & k\varepsilon(p_2^2 - p_0^2) & \varepsilon(p_0^2 + p_2^2) - (1 + \varepsilon^2)p_0 p_2 + \alpha \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (39)$$

Sonderfall 3: Die vier Punkte bilden ein Parallelogramm

Es folgt daraus, dass  $p_1 = -p_0, p_3 = -p_2$ .

Es ergeben sich folgende  $b_{i,j}, i, j = 0, 1, 2$ :

$$\begin{aligned} b_{0,0} &= 4k^2 p_0^2 p_2^2, \\ b_{0,1} &= 0, \\ b_{0,2} &= 0, \\ b_{1,1} &= -k^2(p_0 - p_2)^2, \\ b_{1,2} &= k(p_0^2 - p_2^2), \\ b_{2,2} &= -(p_0 + p_2)^2 \\ C &= \begin{pmatrix} 4k^2 p_0^2 p_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & -k^2((p_0 - p_2)^2 + \alpha) & k(p_0^2 - p_2^2) \\ 0 & k(p_0^2 - p_2^2) & -(p_0 + p_2)^2 + \alpha \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (40)$$

Sonderfall 1+2: Die vier Punkte bilden ein gleichseitiges Trapez mit parallelen Seiten  $P_0P_2, P_1P_3$ .

Es gilt daher  $p_2 = -p_0, p_3 = -p_1$ .

Es ergeben sich folgende  $b_{i,j}$ ,  $i, j = 0, 1, 2$ :

$$\begin{aligned}
b_{0,0} &= 4k^2 p_0^2 p_1^2, \\
b_{0,1} &= 0, \\
b_{0,2} &= -2k p_0 p_1 (p_0 + p_1), \\
b_{1,1} &= -k^2 (p_0 - p_1)^2, \\
b_{1,2} &= 0, \\
b_{2,2} &= (p_0 + p_1)^2 \\
C &= \begin{pmatrix} 4k^2 p_0^2 p_1^2 & 0 & -2k p_0 p_1 (p_0 + p_1) \\ 0 & -k^2 ((p_0 - p_1)^2 + \alpha) & 0 \\ -2k p_0 p_1 (p_0 + p_1) & 0 & (p_0 + p_1)^2 + \alpha \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{41}$$

Sonderfall 1+3: Die vier Punkte bilden ein Rechteck

Dadurch gilt die Bedingung  $p_1 = p_2 = -p_0$ ,  $p_3 = p_0$ .

Es ergeben sich folgende  $b_{i,j}$ ,  $i, j = 0, 1, 2$ :

$$\begin{aligned}
b_{0,0} &= 4k^2 p_0^4, \\
b_{0,1} &= 0, \\
b_{0,2} &= 0, \\
b_{1,1} &= -4k^2 p_0^2, \\
b_{1,2} &= 0, \\
b_{2,2} &= 0 \\
C &= \begin{pmatrix} 4k^2 p_0^4 & 0 & 0 \\ 0 & -4k^2 p_0^2 - k^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{42}$$

Die Auswirkungen auf den Ort der Mittelpunkte und den Achsenrichtungen eines Kegelschnitts des Büschels wird in (3.6) und (3.7) besprochen.

### 3.6 Mittelpunkte der Kegelschnitte eines Büschels

Den Mittelpunkt eines Kegelschnitts des Kegelschnittsbüschels erster Art bekommt man analog zu (2.2). Hierbei verwendet man für die regulären Kurven zweiter Ordnung die Inverse der Matrix-Linearkombination  $(\alpha A + \beta B)$ . Dann ergibt sich für den Mittelpunkt eines Kegelschnitts des Büschels die Gleichung:

$$M_k = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = (\alpha A + \beta B)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha, \beta) \neq (0, 0) \tag{43}$$

Umgeformt ergibt das für den Mittelpunktsort der Kegelschnitte eines Büschels:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow M_k^T (\alpha A + \beta B) = \\
&= \begin{pmatrix} (\alpha a_{0,0} + \beta b_{0,0})m_0 + (\alpha a_{0,1} + \beta b_{0,1})m_1 + (\alpha a_{0,2} + \beta b_{0,2})m_2 \\ (\alpha a_{1,0} + \beta b_{1,0})m_0 + (\alpha a_{1,1} + \beta b_{1,1})m_1 + (\alpha a_{1,2} + \beta b_{1,2})m_2 \\ (\alpha a_{2,0} + \beta b_{2,0})m_0 + (\alpha a_{2,1} + \beta b_{2,1})m_1 + (\alpha a_{2,2} + \beta b_{2,2})m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aus den Zeilen 2 und 3, welche beide in Summe gleich Null ergeben müssen und ein homogenes lineares Gleichungssystem bilden, erhält man nun die Koordinaten der gesuchten Mittelpunkte des Kegelschnittsbüschels:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha a_{0,1} + \beta b_{0,1} \\ \alpha a_{1,1} + \beta b_{1,1} \\ \alpha a_{1,2} + \beta b_{1,2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha a_{0,2} + \beta b_{0,2} \\ \alpha a_{1,2} + \beta b_{1,2} \\ \alpha a_{2,2} + \beta b_{2,2} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} k_{0,0}\alpha\beta + k_{0,1}\alpha^2 + k_{0,2}\beta^2 \\ k_{1,0}\alpha\beta + k_{1,1}\alpha^2 + k_{1,2}\beta^2 \\ k_{2,0}\alpha\beta + k_{2,1}\alpha^2 + k_{2,2}\beta^2 \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha, \beta) \neq (0, 0) \quad (44)
\end{aligned}$$

mit gewissen Konstanten  $k_{i,j}, i, j = 0, 1, 2$ .

Verwenden wir das in (3.4) gewählte Koordinatensystem, dann gilt für  $a_{0,1} = 0, a_{1,1} = k^2, a_{2,2} = 1$ , etc. und wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(b_{1,1} - b_{2,2}k^2) & k^2 & (-b_{1,1}b_{2,2} + b_{1,2}^2) \\ b_{0,1} & 0 & (b_{0,1}b_{2,2} - b_{0,2}b_{1,2}) \\ -b_{0,2}k^2 & 0 & (b_{0,2}b_{1,1} - b_{0,1}b_{1,2}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \alpha^2 \\ \beta^2 \end{pmatrix} \quad (45)$$

Dabei können nun verschiedenen Fälle für die Ortskurve der Mittelpunkte auftreten, die es zu untersuchen gilt.

Gegeben sei ein Kegelschnittsbüschel erster Art  $C$  mit Grundpunkten  $P_0, P_1, P_2$  und  $P_3$  und eine Gerade  $g$ .

Gesucht wird die Ortskurve  $l$  der Pole von  $g$  bezüglich der Kurven zweiter Ordnung des Büschels  $C$ .

$U, V$  und  $W$  bilden das Diagonaldreieck von  $P_0, P_1, P_2, P_3$ , das immer ein Pol-dreieck von jedem Kegelschnitt aus dem Büschel  $C$  ist. Außerdem wählen wir ein projektives Koordinatensystem mit  $\Sigma = O_0, O_1, O_2, E$  mit  $O_0 = U, O_1 = V, O_2 = W$ .

$\Rightarrow$  Das Kegelschnittsbüschel  $C$  hat dann folgende Darstellung:

$$(x_0, x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} \alpha a_0 + \beta b_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha a_1 + \beta b_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha a_2 + \beta b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (46)$$

Wir setzen voraus, dass  $\Delta_{01} = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \Delta_{12} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_{20} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_0 & b_0 \end{vmatrix}$  sind  $> 0$  und paarweise verschieden, da  $P_0, P_1, P_2, P_3$  nicht kollinear sind.

Ein singulärer Kegelschnitt des Büschels  $C$  tritt auf, wenn  $\det(C) = 0$  gilt:

$$\det(C) = 0 \Leftrightarrow (\alpha a_0 + \beta b_0)(\alpha a_1 + \beta b_1)(\alpha a_2 + \beta b_2) = 0$$

Das ist genau erfüllt, wenn einer der drei Faktoren  $= 0$  ist.

$$\text{Zum Beispiel } \alpha a_0 + \beta b_0 = 0 \Rightarrow (\alpha : \beta) = -b_0 : a_0$$

$$\Rightarrow \text{Der singuläre Kegelschnitt ist } (a_0 b_1 - a_1 b_0)x_1^2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0)x_2^2 = 0$$

$$\Delta_{01}x_1^2 - \Delta_{20}x_2^2 = 0 \quad (47)$$

$$\text{Also: } x_1 : x_2 = \pm\sqrt{\Delta_{20}} : \sqrt{\Delta_{01}}$$

Das beschreibt ein reelles Geradenpaar durch  $O_0$ . Analog für  $\alpha a_1 + \beta b_1 = 0$  beziehungsweise  $\alpha a_2 + \beta b_2 = 0$ .

Die Koordinaten der Schnittpunkte bekommt man dann wie folgt:

Die möglichen Vorzeichenverteilungen liefern acht verschiedene Fälle:  $x_0 : x_1 : x_2 = \pm\sqrt{\Delta_{12}} : \pm\sqrt{\Delta_{20}} : \pm\sqrt{\Delta_{01}}$ , da es allerdings nur auf das Verhältnis ankommt, liefern die Fälle  $+++$ , dieselbe Bedingung wie  $---$ , etc., also gibt es nur 4 Schnittpunkte.

Also: Das ist tatsächlich ein Kegelschnittsbüschel erster Art durch 4 Punkte.

Untersucht man jetzt die Ortskurve  $l$  der Pole von  $g$  bezüglich der Kurven zweiter Ordnung des Büschels  $C$ , dann ergeben sich drei verschiedene Fälle:

- Fall 1:  $g$  fällt mit einer Seite des Poldreiecks zusammen. Zum Beispiel ist  $g = u = VW = O_1O_2$   
 $\Rightarrow$  Pol von  $g$  ist  $U$  für alle Kegelschnitte des Büschels.

- Fall 2:  $g$  geht durch eine Ecke des Poldreiecks, fällt aber nicht mit einer Seite des Poldreiecks zusammen. Zum Beispiel  $g \ni W$ .

$\Rightarrow$  Pol von  $g$  liegt auf der Polaren von  $W$ , das ist  $w = UV$  und hat folgende Form:

$$g \dots \gamma_0 x_0 + \gamma_1 x_1 = 0$$

Der Ansatz für den Pol  $G \dots (g_0, g_1, g_2)$  von  $g$  bezüglich irgendeines Kegelschnitts

des Büschels  $C$  sieht wie folgt aus:  $(g_0, g_1, g_2) \cdot C = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$g_0(\alpha a_0 + \beta b_0) : g_1(\alpha a_1 + \beta b_1) : g_2(\alpha a_2 + \beta b_2) = \gamma_0 : \gamma_1 : 0$$

$$g_0 : g_1 = \gamma_0(\alpha a_1 + \beta b_1) : \gamma_1(\alpha a_0 + \beta b_0)$$

$$\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \gamma_0 a_1 \\ \gamma_1 a_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \gamma_0 b_1 \\ \gamma_1 b_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (48)$$

Da allerdings gilt, dass  $\det \begin{pmatrix} \gamma_0 a_1 & \gamma_0 b_1 \\ \gamma_1 a_0 & \gamma_1 b_0 \end{pmatrix} = -\gamma_0 \gamma_1 \Delta_{01} \neq 0$  ist  $\Rightarrow$  Das ist die Gerade  $O_0O_1 = UV$  auf der die Pole von  $g$  bezüglich aller Kurven zweiter Ordnung des Büschels  $C$  liegen.

- Fall 3:  $g$  geht durch keinen der Punkte  $U = O_0, V = O_1, W = O_2 \Leftrightarrow g \dots \gamma_0 x_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = 0$  mit  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \neq 0$ .

Selbiger Ansatz wie oben:  $(g_0, g_1, g_2) \cdot C = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$

$$g_0(\alpha a_0 + \beta b_0) : g_1(\alpha a_1 + \beta b_1) : g_2(\alpha a_2 + \beta b_2) = \gamma_0 : \gamma_1 : \gamma_2$$

Gibt uns zwei homogene lineare Gleichungen in den drei Unbekannten  $g_0, g_1, g_2$ :

$$\begin{aligned} \gamma_1(\alpha a_0 + \beta b_0)g_0 - \gamma_0(\alpha a_1 + \beta b_1)g_1 &= 0 \\ \gamma_2(\alpha a_1 + \beta b_1)g_1 - \gamma_0(\alpha a_2 + \beta b_2)g_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1(\alpha a_0 + \beta b_0) \\ -\gamma_0(\alpha a_1 + \beta b_1) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2(\alpha a_1 + \beta b_1) \\ -\gamma_0(\alpha a_2 + \beta b_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_0 \gamma_1 (\alpha a_1 + \beta b_1) (\alpha a_2 + \beta b_2) \\ \gamma_1^2 (\alpha a_0 + \beta b_0) (\alpha a_2 + \beta b_2) \\ \gamma_1 \gamma_2 (\alpha a_0 + \beta b_0) (\alpha a_1 + \beta b_1) \end{pmatrix} = \quad (49)$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_0 a_1 a_2 & \gamma_0 (a_1 b_2 + a_2 b_1) & \gamma_0 b_1 b_2 \\ \gamma_1 a_0 a_2 & \gamma_1 (a_0 b_2 + a_2 b_0) & \gamma_1 b_0 b_2 \\ \gamma_2 a_0 a_1 & \gamma_2 (a_0 b_1 + a_1 b_0) & \gamma_2 b_0 b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \beta \\ \beta^2 \end{pmatrix}$$

Es gilt allerdings,  $\det \begin{pmatrix} \gamma_0 a_1 a_2 & \gamma_0 (a_1 b_2 + a_2 b_1) & \gamma_0 b_1 b_2 \\ \gamma_1 a_0 a_2 & \gamma_1 (a_0 b_2 + a_2 b_0) & \gamma_1 b_0 b_2 \\ \gamma_2 a_0 a_1 & \gamma_2 (a_0 b_1 + a_1 b_0) & \gamma_2 b_0 b_1 \end{pmatrix} =$

$$= \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 (a_1 a_2^2 b_0^2 b_1 + a_0 a_1^2 b_0 b_2^2 + a_0^2 a_2 b_1^2 b_2 - (a_1^2 a_2 b_0^2 b_2 + a_0 a_2^2 b_0 b_1^2 + a_0^2 a_1 b_1 b_2^2)) =$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 ((a_0 a_1 b_1 b_2 - a_1^2 b_0 b_2 - a_0 a_2 b_1^2 + a_1 a_2 b_0 b_1)(a_2 b_0 - a_0 b_2)) = \\
&= \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 ((a_0 b_1 - a_1 b_0)(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_2 b_0 - a_0 b_2)) = \\
&= \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \Delta_{0,1} \Delta_{1,2} \Delta_{2,0} \neq 0
\end{aligned} \tag{50}$$

Daher wird durch (49) eine Kurve zweiter Ordnung beschrieben, die durch die Punkte  $U, V, W$  verläuft und auf der die Mittelpunkte aller Kegelschnitte des Büschels  $C$  liegen.

Ist die Gerade  $g$  keine beliebige Gerade, sondern die Ferngerade  $u$ , dann entspricht die obige Ortskurve  $l$  den Mittelpunkten der Kurven zweiter Ordnung des Büschels  $C$ . Die drei Fälle von vorhin entstehen wie folgt:

- Fall 1: Liegen auf der Ferngerade  $u$  die Punkte  $V, W$ , dann sind die beiden Punkte Fernpunkte. Also lässt sich sagen, das Grundviereck  $P_0, P_1, P_2, P_3$  hat je zwei zueinander gegenüberliegende parallele Seiten (Die Geradenpaare  $P_0 P_2, P_1 P_3$  und  $P_0 P_3, P_1 P_2$  sind zueinander parallel). Dann ist der Mittelpunkt für alle Kegelschnitte des Büschels der Ursprung  $U$ .

**Satz 3.13.** *Bildet das Grundviereck  $P_0, P_1, P_2, P_3$  ein Quadrat, Rechteck, Rhombus oder Parallelogramm (Sonderfall 3), so liegen alle Mittelpunkte der Kegelschnitte des Büschels  $C$  im Ursprung  $U$ .*

- Fall 2: Liegt nur einer der beiden Punkte  $V$  oder  $W$  auf der Ferngeraden  $u$ , dann liegen die Mittelpunkte auf der Polaren dieses Punktes. Betrachtet man den Fall, dass  $V$  ein Fernpunkt ist, dann liegen die Mittelpunkte der Kegelschnitte des Büschels  $C$  auf einer Geraden durch  $U$  und  $W$ , mit  $v = UW$  der Polaren zu  $V$ .

**Satz 3.14.** *Bildet das Grundviereck  $P_0, P_1, P_2, P_3$  ein Trapez (Sonderfall 2), so liegen alle Mittelpunkte der Kegelschnitte des Büschels  $C$  auf einer Geraden durch den Ursprung  $U$  und des weiteren Schnittpunkts  $V$  oder  $W$ , welcher kein Fernpunkt ist.*

- Fall 3: Sind die drei Punkte  $U, V, W$  eigentliche Punkte, das heißt keiner der drei Punkte liegt auf der Ferngeraden  $u$ , dann liegen die Mittelpunkte der Kegelschnitte des Büschels  $C$  auf einer Kurve zweiter Ordnung.

**Satz 3.15.** *Bildet das Grundviereck  $P_0, P_1, P_2, P_3$  ein Deltoid oder allgemeines Viereck, so liegen alle Mittelpunkte der Kegelschnitte des Büschels  $C$  auf einer Kurve zweiter Ordnung, welche durch die Punkte  $U, V$  und  $W$  verläuft. Ist das Grundviereck konvex, dann verlaufen die Mittelpunkte aller Kegelschnitte des Büschels auf einer gleichseitigen Hyperbel mit Achsen parallel zu den beiden Parabelachsen (siehe (3.8)). Ist das Grundviereck hingegen nicht-konvex, dann bildet die Ortskurve der Mittelpunkte aller Kegelschnitte des Büschels eine Ellipse.*

Auf selbiges Ergebnis kommt man auch mit folgender Vorgehensweise, indem man den Rang der Matrix  $K$  untersucht:

**Bemerkung 3.16.** *Nach einem Satz aus der projektiven Geometrie wissen wir, dass jede Kurve  $k$  mit einer Parameterdarstellung der Form*

$$\rho \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \alpha^2 \\ \beta^2 \end{pmatrix}$$

*mit einer regulären Matrix  $K = (k_{i,j})_{i,j=0,1,2}$  ein Kegelschnitt ist.*

Zu untersuchen bleibt die Determinante der Matrix

$$K = \begin{pmatrix} -(b_{1,1} - b_{2,2}k^2) & k^2 & (-b_{1,1}b_{2,2} + b_{1,2}^2) \\ b_{0,1} & 0 & (b_{0,1}b_{2,2} - b_{0,2}b_{1,2}) \\ -b_{0,2}k^2 & 0 & (b_{0,2}b_{1,1} - b_{0,1}b_{1,2}) \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Durch Ausrechnen mit Maple erhaltet man für

$$\det(K) = -4k^7 p_0 p_1 p_2 p_3 (p_0 p_2 - p_1 p_3)(p_0 p_3 - p_1 p_2). \quad (52)$$

Das heißt die Matrix  $K$  ist regulär, wenn einerseits  $p_0 p_2 \neq p_1 p_3$  und andererseits  $p_0 p_3 \neq p_1 p_2$  ist. Dann gilt folgender Satz:

**Satz 3.17.** *Die Mittelpunkte der Kegelschnitte eines Büschels liegen auf einer regulären Kurve zweiter Ordnung, also auf einem Kegelschnitt.*

Ist hingegen der Fall eingetreten, dass  $p_0 p_2 - p_1 p_3 = 0$  ist, dann gilt  $p_0 : p_1 = p_3 : p_2$  und somit bilden die Geraden  $P_0 P_3$  und  $P_1 P_2$  ein paralleles Geradenpaar. Analoges lässt sich für  $p_0 p_3 - p_1 p_2 = 0$  sagen.

Im Fall, dass es ein paralleles Geradenpaar gibt, weisen die Parallelen auf denselben Fernpunkt. Der Mittelpunkt bewegt sich dann wie oben im Fall 2) auf der Polaren dieses Fernpunkts, also auf einer Geraden.

Existieren durch die Punkte  $P_0, P_1, P_2$  und  $P_3$  sogar zwei parallele Geradenpaare, liegt der Mittelpunkt aller Kegelschnitte des Büschels am Schnittpunkt der beiden zugehörigen Polaren (entspricht nach Anpassung des Koordinatensystem exakt dem Ursprung  $U$ ), und bleibt fest.

Für die Gleichung des Mittelpunktskegelschnitts des Büschels erhalten wir

$$x^T D x = 0, \text{ mit } D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{k^2 b_{0,2}}{2} & \frac{b_{0,1}}{2} \\ \frac{k^2 b_{0,2}}{2} & k^2 b_{1,2} & \frac{b_{1,1} + k^2 b_{2,2}}{2} \\ \frac{b_{0,1}}{2} & \frac{b_{1,1} + k^2 b_{2,2}}{2} & b_{1,2} \end{pmatrix} \quad (53)$$

Um  $D$  zu bestimmen, setzt man die gefundene Parametrisierung (45) in eine allgemeine Kegelschnittsgleichung (2) ein, und erhält ein homogenes Polynom vierten Grades in  $(\alpha : \beta)$ , das identisch in  $(\alpha : \beta)$  verschwinden muss:

$$c_0 \alpha^4 + c_1 \alpha^3 \beta + c_2 \alpha^2 \beta^2 + c_3 \alpha \beta^3 + c_4 \beta^4 = 0 \quad (54)$$

Daher müssten die fünf Koeffizienten  $c_0, \dots, c_4$ , die lineare homogene Funktionen in den gesuchten sechs Einträgen der Matrix  $D$  sind, gleich Null sein. Daraus folgt ein lineares homogenes Gleichungssystem mit 5 Gleichungen in sechs Unbekannten, aus dem sich  $D$  gemäß (53) ergibt.

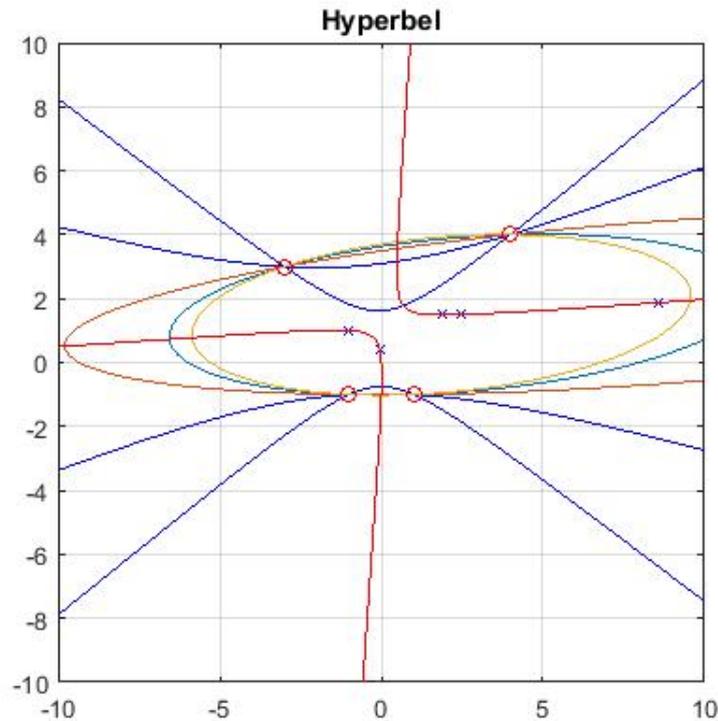


Abbildung 2: Mittelpunkte der Kegelschnitte eines Büschels liegen auf einer Kurve zweiter Ordnung

Die rot als Kreis gekennzeichneten Punkte sind die vorgegebenen komplexen Punkte, mit den Koordinaten  $P_0 = (4, 4, 0)^T$ ,  $P_1 = (-1, -1, 0)^T$ ,  $P_2 = (1, -1, 0)^T$  und  $P_3 = (-3, 3, 0)^T$ . Durch diese Punkte laufen fünf Kegelschnitte, deren Mittelpunkte als  $\times$  auf der rot gekennzeichneten Kurve zweiter Ordnung liegen und diese eindeutig wie oben festgestellt bestimmen. Für den Mittelpunktskegelschnitt stellt sich in diesem Fall eine Hyperbel ein, da das Viereck  $P_0, P_1, P_2, P_3$  konvex ist.

### 3.7 Die Achsen der Kegelschnitte eines Kegelschnittsbüschels erster Art

Um die Achsen der Kegelschnitte eines Büschels zu ermitteln, setzt man nur mehr die Matrix  $C(\alpha : \beta) = (\alpha A + \beta B)$  in (16) ein:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-k^2 - 1)\alpha + \beta(b_{1,1} - b_{2,2}) \pm \sqrt{((-k^2 - 1)\alpha + \beta(b_{1,1} - b_{2,2}))^2 + 4\beta b_{1,2}^2} \\ 2\beta b_{1,2} \end{pmatrix} \quad (55)$$

Die beiden Eigenvektoren geben eine Richtung der Achse an, welche die  $x$ -Achse in einem bestimmten Winkel  $\phi$  schneidet. Das heißt, dass die beiden Eigenvektoren auch mit  $\vec{e}v_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$  beziehungsweise mit  $\vec{e}v_2 = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}$  dargestellt

werden können. Eingesetzt in Gleichung  $x^T C(\alpha : \beta)x = 0$  erhalten wir folgendes:

$$((b_{2,2} - b_{1,1})\beta + \alpha(k^2 + 1)) \cdot \sin \phi \cos \phi - \beta b_{1,2} \sin^2 \phi + \beta b_{1,2} \cos^2 \phi = 0$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus lässt sich die Gleichung noch vereinfachen, sofern  $b_{1,2} \neq 0$  gilt (Der Sonderfall  $b_{1,2} = 0$  wird in Abschnitt (3.8) diskutiert):

$$((b_{2,2} - b_{1,1})\beta + \alpha(k^2 + 1)) \cdot \frac{1}{2} \sin 2\phi + \beta b_{1,2} \cos 2\phi = 0$$

Dann erhalten wir für ein festes Verhältnis  $\frac{\alpha}{\beta}$ , welches einen bestimmten Kegelschnitt des Büschels festlegt, den Winkel  $\phi$ , der von der  $x$ -Achse mit der Hauptachse des Kegelschnitts eingeschlossen wird:

$$\tan 2\phi = \frac{2\beta b_{1,2}}{(-b_{2,2} + b_{1,1})\beta - \alpha(k^2 + 1)} \quad (56)$$

$$\Rightarrow \cos 2\phi = \frac{\pm((-b_{2,2} + b_{1,1})\beta - \alpha(k^2 + 1))}{\sqrt{((-b_{2,2} + b_{1,1})\beta - \alpha(k^2 + 1))^2 + 4\beta^2 b_{1,2}^2}}$$

$$\Rightarrow \sin 2\phi = \frac{\pm(2\beta b_{1,2})}{\sqrt{((-b_{2,2} + b_{1,1})\beta - \alpha(k^2 + 1))^2 + 4\beta^2 b_{1,2}^2}}$$

**Lemma 3.18.** *Da es zwei Achsenrichtungen gibt erhält man zwei Lösungen für  $2\phi$ :  $2\phi_1, 2\phi_2 = 2\phi_1 + \pi$  und somit zwei Lösungen für  $\phi$ :  $\phi_1, \phi_2 = \phi_1 + \frac{\pi}{2}$ .*

Für die Hüllkurve der Achsen aller Kegelschnitte des Büschels, gilt es ebenso aufgrund der Mittelpunkte aller Kegelschnitte des Büschels  $C$  Fallunterscheidungen durchzuführen. Diese werden nach dem Kapitel 3.8 aufgeführt, da der Sonderfall Auswirkungen auf die Achsenrichtungen hat.

### 3.8 Sonderfall: Kreisviereck

Der Sonderfall, dass die Punkte  $P_0, P_1, P_2, P_3$  auf einem Kreis liegen, hat Auswirkungen auf die Einträge der Matrix, welche die Kegelschnitte beschreiben, sowie auf die Achsenrichtungen aller Kegelschnitte des Büschels.

**Satz 3.19.** *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i) *Das Kegelschnittsbüschel enthält einen Kreis.*
- (ii)  $b_{1,2} = 0$ .
- (iii) *Die Achsen aller Kegelschnitte des Büschels sind parallel zu zwei festen orthogonalen Richtungen.*
- (iv) *Das Kegelschnittsbüschel enthält zwei Parabeln (von denen jede auch in ein Paar paralleler Geraden zerfallen kann) mit selbigen orthogonalen Achsenrichtungen aus (iii).*

*Beweis.* Wir betrachten das durch  $P_0, P_1, P_2, P_3$  bestimmte Kegelschnittsbüschel  $x^T C(\alpha : \beta)x = 0$ .

(i)  $\Rightarrow$  (ii)

$C(\lambda)$  beschreibt einen Kreis. Ein Kreis ist ein Kegelschnitt durch die absoluten Kreispunkte  $I, \bar{I}$ .

Wenn man die absoluten Kreispunkte nun in die allgemeine Kegelschnittsgleichung  $c_{1,1}x_1^2 + 2c_{1,2}x_1x_2 + c_{2,2}x_2^2 + 2c_{0,1}x_0x_1 + 2c_{0,2}x_0x_2 + c_{0,0}x_0^2 = 0$  einsetzt, ergibt sich die Bedingung:

$$k = \text{Kreis} \Leftrightarrow c_{1,1} - c_{2,2} \pm 2 \cdot c_{1,2}i = 0 \Leftrightarrow c_{1,1} = c_{2,2} \text{ und } c_{1,2} = 0.$$

$\Rightarrow b_{1,2} = c_{1,2} = 0$  bei unserem Kegelschnittsbüschel  $C(\alpha : \beta)$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii)

Für  $b_{1,2} = 0$  berechnet man die Achsenrichtungen aller Kegelschnitte des Büschels  $C(\alpha : \beta)$ .

$$(\cos \phi, \sin \phi) \cdot \begin{pmatrix} \beta b_{1,1} - k^2 \alpha & 0 \\ 0 & \beta b_{2,2} + \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} = 0$$

$$-(\beta b_{1,1} - \alpha k^2) \cdot (\cos \phi \cdot \sin \phi) + (\beta b_{2,2} + \alpha) \cdot (\cos \phi \cdot \sin \phi) = 0$$

$$(\cos \phi \cdot \sin \phi) \cdot [\beta b_{2,2} + \alpha - \beta b_{1,1} + \alpha k^2] = 0$$

$$(\cos \phi \cdot \sin \phi) \cdot [\beta(b_{2,2} - b_{1,1}) + \alpha \cdot (1 + k^2)] = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \sin 2\phi\right) \cdot [\beta(b_{2,2} - b_{1,1}) + \alpha \cdot (1 + k^2)] = 0$$

Im Fall, dass der Kegelschnitt kein Kreis ist, gilt:  $[\beta(b_{2,2} - b_{1,1}) + \alpha \cdot (1 + k^2)] \neq 0$ .

$\Rightarrow$  Produkt-Null-Satz:  $\frac{1}{2} \cdot \sin 2\phi = 0 \Rightarrow \sin 2\phi = 0$ .

$\Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \cdot n, n \in \mathbb{Z}$ .

$\Rightarrow$  Richtungsvektoren  $\begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}$  sind für  $\phi$  konstant.

Im Fall, dass es sich exakt um den Kreis handelt, kann man keine eindeutige Achsenrichtung bestimmen. Alle Geraden durch den Kreismittelpunkt entsprechen Achsen, weshalb man genau jene auswählen kann, die den Richtungsvektoren  $\begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}$  für  $\phi$  konstant entsprechen.

(ii)  $\Rightarrow$  (i)

Für  $b_{1,2} = 0$  existiert ein  $(\alpha : \beta)$  mit:

$$\beta b_{1,1} - \alpha k^2 = \beta b_{2,2} + \alpha$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{b_{1,1} - b_{2,2}}{(k^2 + 1)}$$

(iii)  $\Rightarrow$  (ii)

Die Winkel der Achsenrichtungen aller Kegelschnitte des Büschels sind gleich, das heißt ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt für zwei Kegelschnitt in Abhängigkeit von  $C((\alpha : \beta)_1), C((\alpha : \beta)_2)$  mit  $(\frac{\alpha}{\beta})_1 \neq (\frac{\alpha}{\beta})_2$ :

$$\tan \phi = \frac{2b_{1,2}}{b_{1,1} - b_{2,2} - (\frac{\alpha}{\beta})_1(k^2 + 1)}$$

$$\tan \phi = \frac{2b_{1,2}}{b_{1,1} - b_{2,2} - (\frac{\alpha}{\beta})_2(k^2 + 1)}$$

Gleichsetzen der beiden Gleichungen liefert nach wegkürzen:  $\Rightarrow 2b_{1,2}(\frac{\alpha}{\beta})_1 =$

$$2b_{1,2}(\frac{\alpha}{\beta})_2$$

Da aber  $(\frac{\alpha}{\beta})_1 \neq (\frac{\alpha}{\beta})_2$  ist, folgt daraus:

$$\Rightarrow b_{1,2} = 0.$$

(iv)  $\Rightarrow$  (i)

Seien die beiden Parabeln in Hauptlage mit Verschiebung um einen beliebigen Skalar  $\frac{c_{0,0}}{2}$  mit  $x^2 + 2c_{0,2} + \frac{c_{0,0}}{2} = 0$  und  $y^2 + 2c_{0,1} + \frac{c_{0,0}}{2} = 0$  gegeben. Dann ergibt sich für die beiden Parabeln in Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} \frac{c_{0,0}}{2} & 0 & c_{0,2} \\ 0 & 1 & 0 \\ c_{0,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{c_{0,0}}{2} & c_{0,1} & 0 \\ c_{0,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 Die Linearkombination zweier Kegelschnitte

des Büschels liefert, wie wir bereits wissen, wieder einen Kegelschnitt des Büschels. Das heißt durch Addition der beiden Matrizen erhalten wir einen Kreis ausgedrückt durch eine Matrix wie in (8).

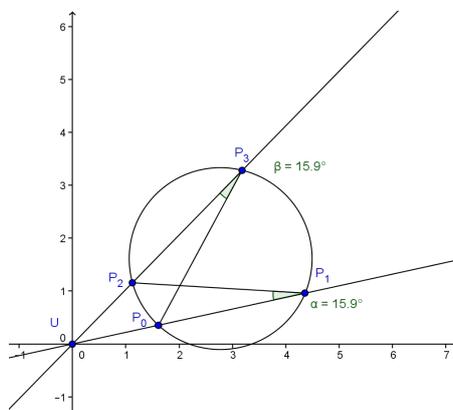
(i)  $\Rightarrow$  (iv)

Liegen die vier Punkte  $P_0, P_1, P_2, P_3$  auf einem Kreis, dann besitzt die Desargues-Involution, welche von dem durch  $P_0, P_1, P_2, P_3$  bestimmten Kegelschnittbüschel auf der Ferngerade  $u$  ausgeschnitten wird, die beiden absoluten Kreispunkte  $I, \bar{I}$  als Punktepaar.  $\Rightarrow$  Für die Fixpunkte  $X_u, Y_u$  der Desargues-Involution gilt daher, dass diese harmonisch zu  $I, \bar{I}$  liegen.

$\Rightarrow X_u, Y_u$  gehören zu orthogonalen Richtungen. □

**Bemerkung 3.20.** Die Mittelpunktsortskurve der Kegelschnitte des Büschels für eine konvexes Grundviereck  $P_0, P_1, P_2, P_3$  ist eine gleichseitige Hyperbel. Das lässt sich leicht erkennen, da die beiden Parabeln die Ferngerade zweimal in orthogonalen Richtungen berühren.

**Bemerkung 3.21.**  $b_{1,2} = 0 \Leftrightarrow k(p_2p_3 - p_0p_1) = 0 \Leftrightarrow p_0p_1 = p_2p_3$  Geometrisch klar wegen des Sehnen- beziehungsweise Sekantensatzes.



Das Verhältnis  $\frac{p_0}{p_3} = \frac{p_2}{p_1}$  lässt sich aufgrund der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke  $UP_0P_3$  und  $UP_1P_2$  leicht erkennen. Durch den Peripheriewinkelsatz ist der Winkel der beiden Dreiecke in den Punkten  $P_1$  und  $P_3$  und somit auch in den Ecken  $P_2$  und  $P_0$  der beiden Dreiecke ident. Daher sind die beiden Dreiecke ähnlich, und das Verhältnis für auf  $p_0p_1 = p_2p_3$ . Das gilt nur im Kreisfall und deshalb ist  $\Rightarrow b_{1,2} = k(-p_0p_1 + p_2p_3) = 0$ .

### 3.9 Achsen der Kegelschnitte des Büschels und ihre Hüllkurve

Wir wissen nun aus dem Kapitel 3.8, dass für den Fall, dass das Grundviereck  $P_0, P_1, P_2, P_3$  ein Kreisviereck bildet, die Achsen für alle Kegelschnitte des Büschels in dieselbe Richtung weisen. Dadurch ergeben sich unterschiedliche Möglichkeiten, für die Hüllkurve der Achsen aller Kegelschnitte des Büschels:

Wir wissen aus [1], dass die Hüllkurve für den allgemeinsten Fall, in dem die Mittelpunkte auf einer Kurve zweiter Ordnung liegen und das Grundviereck  $P_0, P_1, P_2, P_3$  kein Kreisviereck bildet, spezielle Eigenschaften besitzt:

**Satz 3.22.** Die Hüllkurve der Achsen aller Kegelschnitte des Büschels durch vier vorgegebenen Punkte allgemeiner Lage ist eine Kurve vierter Ordnung dritter Klasse, welche die Ferngerade  $u$  als Doppeltangente besitzt (siehe [1]).

**Satz 3.23.** Bildet das Grundviereck  $P_0, P_1, P_2, P_3$  ein Quadrat oder Rechteck, so sind die Achsenrichtungen für alle Kegelschnitte des Büschels im Ursprung  $U$  fest, und stimmen mit der  $x$ -Achse und  $y$ -Achse überein.

**Satz 3.24.** Bildet das Grundviereck  $P_0, P_1, P_2, P_3$  ein gleichschenkliches Trapez, besitzt also einen Umkreis, so zeigen die Achsen aller Kegelschnitte des Büschels in dieselbe Richtung. Weiters ist jene Achse, die orthogonal auf die beiden parallelen Seiten des Trapez steht, für alle Kegelschnitte des Büschels ident.

**Satz 3.25.** Bildet das Grundviereck  $P_0, P_1, P_2, P_3$  ein allgemeines Viereck mit Umkreis, dann treten für alle Kegelschnitte des Büschels zwei feste Richtungen als Achsenrichtungen auf, die den Richtungen der  $x$ -Achse und  $y$ -Achse entsprechen.

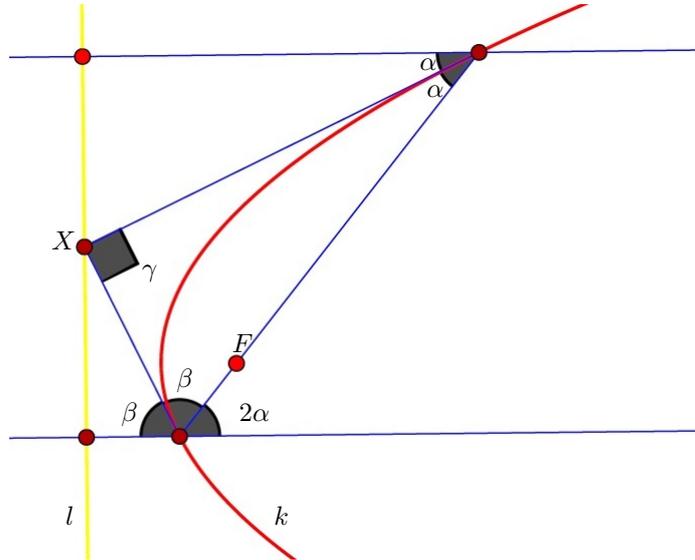
**Satz 3.26.** Bildet das Grundviereck  $P_0, P_1, P_2, P_3$  ein Parallelogramm oder Rhombus, so schneiden sich die Achsenpaare für jeden Kegelschnitt des Büschels im Ursprung, allerdings zeigen diese nicht für alle Kegelschnitte in dieselbe Richtung.

**Satz 3.27.** Bildet das Grundviereck  $P_0, P_1, P_2, P_3$  ein allgemeines Trapez, das kein gleichschenkliges Trapez ist, so verlaufen die Mittelpunkte auf einer Geraden, jedoch weisen die Achsen für alle Kegelschnitte des Büschels in unterschiedliche Richtungen. Es entsteht als Hüllkurve der Achsen aller Kegelschnitte des Büschels eine Parabel mit Leitlinie, welche durch den Ursprung und des weiteren Schnittpunkt des Geradenpaares des Grundvierecks läuft.

Für den folgenden Beweis benötigen wir eine Eigenschaft von Parabeln, die hier erwähnt wird.

**Bemerkung 3.28.** Ist  $k$  eine Parabel mit Leitgerade  $l$  und Brennpunkt  $F$ , dann gilt:

Die aus einem Punkt  $X \in l$  an  $k$  legbaren Tangenten stehen normal zueinander.



*Beweis.* Der Beweis für (3.28) wird durch obige Figur illustriert.

$$\beta = \frac{\pi - 2\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Nach der Winkelsumme für Dreiecke folgt  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ . □

**Bemerkung 3.29.** *Spiegeln einer Geraden  $g$  an einer schneidenden Geraden  $h$  sieht wie folgt aus:*

*Sei  $S \dots \vec{s}$  der Schnittpunkt von  $g$  und  $h$ . Dann besitzen die beiden Geraden Parameterdarstellungen der Form:*

$$g \dots \vec{x} = \vec{s} + \lambda \vec{g}, \quad h \dots \vec{x} = \vec{s} + \mu \vec{h}.$$

*Dann hat die gespiegelte Gerade  $g^*$  die Parameterdarstellung*

$$g^* = \vec{s} + \nu \vec{g}^* \tag{57}$$

$$\text{mit } \vec{g}^* = \begin{pmatrix} 2(g_x h_x^2 + g_y h_x h_y) - g_x h_x^2 - g_y h_y^2 \\ 2(g_x h_x h_y + g_y h_y^2) - g_y h_x^2 - g_x h_y^2 \end{pmatrix}.$$

*Beweis.* Beweis zu Satz 3.27.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit handelt es sich beim Grundviereck  $P_0, P_1, P_2, P_3$  um ein Trapez (das keinen Umkreis besitzt) mit parallelen Seiten  $P_0P_2, P_1P_3$ .

Die Punkte besitzen eine Darstellung aus Kapitel 3.5.

Zu beweisen ist, dass die Hüllkurve der Achsen  $g_i$  eine Parabel mit der Leitlinie  $v = UW$  ist. Das heißt, es bleibt zu zeigen, dass alle Geraden  $vg_i$ , die durch Spiegeln der Geraden  $v$  an den Geraden  $g_i$  entstehen, durch einen festen Punkt  $F$  laufen (Bemerkung 3.28). Wenn das der Fall ist, so ist die Hüllkurve der Geraden  $g_i$  als Parabel mit Leitlinie  $v$  und Brennpunkt  $F$  erkannt.

Der Richtungsvektor von  $v = \begin{pmatrix} p_0 + p_2 \\ k(p_0 - p_2) \end{pmatrix}$ . Diese Gerade durch  $U$  mit diesem Richtungsvektor wird nun an  $g_i$ , welche einer Achse entspricht, wie in (3.29) gespiegelt und man erhält eine Parameterdarstellung der Form

$$vg_i = M_i + s \cdot v \vec{g}_i^* \tag{58}$$

mit  $M_i$  als Mittelpunkt des jeweiligen Kegelschnitts des Büschels, und  $v\vec{g}_i^*$  als Richtung der von  $v$  an  $g_i$  gespiegelten Geraden und  $s$  als Parameter.

Weiters ist die  $x$ -Achse die Symmetrieachse des Kegelschnitts  $P_0P_1, P_2P_3$  des Büschels, und sofern obige Behauptung stimmt, muss der Punkt  $F$  auch auf jener Geraden  $vx$  liegen, die durch Spiegeln von  $v$  an der  $x$ -Achse entsteht. Das ist eine durch  $U$  laufende Gerade mit der Gleichung

$$vx = k(p_0 - p_2)x + (p_0 + p_2)y \quad (59)$$

Den Schnittpunkt  $F$  der beiden Geraden bekommt man durch Einsetzen der Parameterdarstellung von  $vg_i$  in die Gleichung von  $vx$  und anschließendem Lösen des dadurch entstandenen linearen Gleichungssystems nach  $s$ . Einsetzen der gewonnenen Lösung liefert für

$$F = \begin{pmatrix} \frac{(\varepsilon+1)(1+k^2)(p_0+p_2)p_0p_2}{k^2(p_0-p_2)^2+(p_0+p_2)^2} \\ \frac{(\varepsilon+1)(1+k^2)k(p_0-p_2)p_0p_2}{k^2(p_0-p_2)^2+(p_0+p_2)^2} \end{pmatrix} \quad (60)$$

Da die Koordinaten von  $F$  nicht von  $\alpha : \beta$  abhängen, bleibt dieser für alle Kegelschnitte des Büschels fix. Damit stimmt obige Behauptung und die Hüllkurve von  $g_i$  ist eine Parabel mit Leitlinie  $v = UW$  und Brennpunkt  $F$ .  $\square$

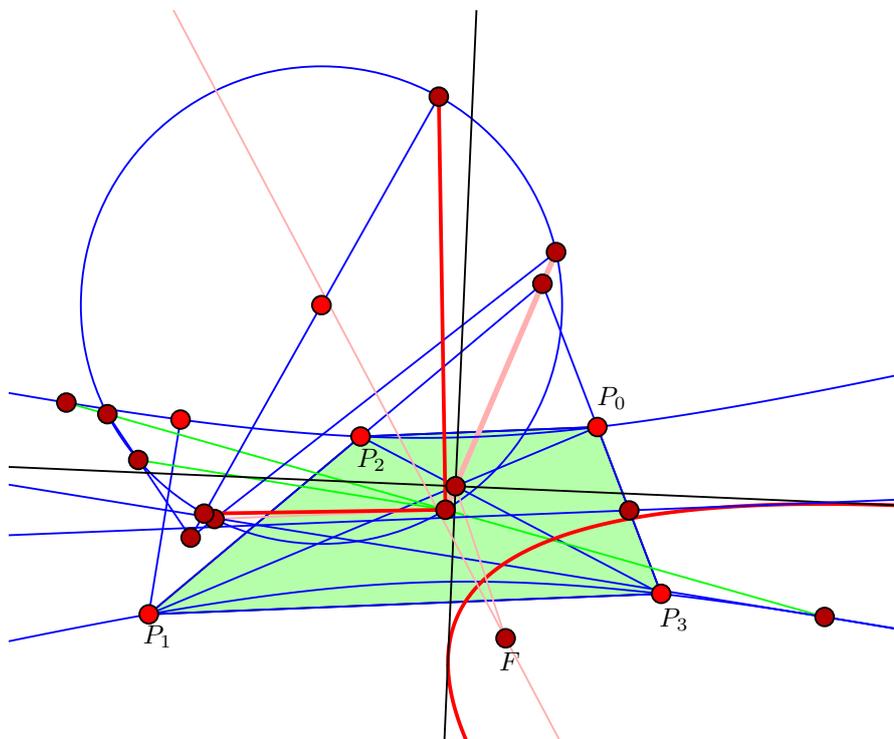


Abbildung 3: Rot dargestellt ist die entstandene Parabel als Hüllkurve der Achsen des Büschels erster Art, dass durch das hellgrün unterlegte Trapez erzeugt wird. Schwarz gekennzeichnet ist das Koordinatensystem. Die Konstruktion wurde mit Hilfe des Steiner-Kreises durchgeführt.

## 4 Quadriken

**Definition 4.1.** Eine Quadrik  $\Phi$  des euklidischen Dreiraumes  $\mathbb{R}^3$  hat eine Gleichung der Form

$$x^T A x + 2 \cdot c^T x + c_0 = 0 \quad (61)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (62)$$

als reelle symmetrische  $3 \times 3$ -Matrix,  $c = [c_1, c_2, c_3]^T \in \mathbb{R}^3$  und  $c_0 \in \mathbb{R}$ .  $x = [x, y, z]^T$  sind jene Punkte im 3-Raum, welche auf der Fläche zweiter Ordnung liegen. Die Gleichung kann auch kompakter als

$$(1, x, y, z) \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad (63)$$

geschrieben werden, wobei

$$Q = \begin{pmatrix} c_0 & c^T \\ c & A \end{pmatrix} \quad (64)$$

ist.

Da ich mich in dieser Diplomarbeit nur mit Drehquadriken beschäftige, verzichte ich auf eine genauere Klassifikation der verschiedenen Typen allgemeiner Quadriken. Es seien diese nur namentlich erwähnt.

Das heißt zu den möglichen Quadriken zählen ausgeartete Quadriken, darunter sind die leere Menge, ein Punkt, eine Gerade, eine Ebene, zwei parallele Ebenen, und zwei schneidende Ebenen.

Weiters gibt es ausgeartete gekrümmte Quadriken, wie zum Beispiel parabolischer Zylinder, hyperbolischer Zylinder, elliptischer Zylinder und Kegel zweiter Ordnung.

Zu den nicht ausgearteten Quadriken zählen unter anderem das elliptische Paraboloid, das hyperbolische Paraboloid, das einschalige - und das zweischalige Hyperboloid, und das Ellipsoid (auch als Kugel möglich).

## 5 Drehquadriken

Drehquadriken sind Quadriken mit einer Rotationssymmetrie: Sie werden durch Rotation einer Kurve zweiter Ordnung um eine Symmetrieachse dieser Kurve erzeugt. Es gibt folgende Typen von Drehquadriken: Drehellipsoid, einschaliges und zweischaliges Drehhyperboloid, Drehparaboloid, Drehkegel und Drehzylinder, Parallelebenenpaar und Ebene.

### 5.1 Kanonische Parametrisierung und Eigenschaften von Drehquadriken

Die folgenden Definitionen und Sätze entstammen der Arbeit [7].

**Definition 5.1.**  $\Phi$  ist eine Drehquadrik (ausgenommen sind Kugeln), wenn die symmetrische Matrix  $A$  genau zwei unterschiedliche Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  besitzt, wobei  $\lambda_1$  die Vielfachheit 1 und  $\lambda_2$  die Vielfachheit 2 mit  $\lambda_2 \neq 0$  hat. Der eindimensionale Eigenraum, der zum Eigenwert  $\lambda_1$  gehört, gibt die Richtung der Achse von  $\Phi$  an, wohingegen der zweidimensionale Eigenraum, welcher zum zweiten Eigenwert  $\lambda_2$  gehört, jene Ebenen aufspannt, die normal auf die Rotationsachse stehen und die die Drehquadrik  $\Phi$  in Kreisen schneidet.

**Satz 5.2.** Sei  $A$  eine symmetrische  $3 \times 3$ -Matrix mit Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_3$ . Dann kann  $A$  als

$$A = (\lambda_1 - \lambda_2)aa^T + \lambda_2 I_3 \quad (65)$$

mit

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \|a\| = 1, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (66)$$

beschrieben werden.

*Beweis.* Da  $A$  eine symmetrische  $3 \times 3$ -Matrix ist, existiert eine Matrix

$$R = (a, b, c) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad (67)$$

die orthogonal ist ( $RR^T = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ), sodass

$$A = R \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot R^T. \quad (68)$$

$a, b, c$  sind Eigenvektoren zu  $\lambda_1, \lambda_2$  und  $\lambda_3 = \lambda_2$ .

$$\begin{aligned} \text{Daraus folgt } A &= (a, b, c) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 + \lambda_1 - \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^T \\ b^T \\ c^T \end{pmatrix} = \\ &= (a, b, c) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^T \\ b^T \\ c^T \end{pmatrix} + \lambda_2 RR^T = (\lambda_1 - \lambda_2)aa^T + \lambda_2 I_3 \quad \square \end{aligned}$$

**Satz 5.3.** Sei  $\Phi$  eine Drehquadrik, die keine Kugel oder Ebenenpaar ist, dann hat die zugehörige Matrix  $Q$  eine Gleichung der Form (61), mit

$$A = \begin{pmatrix} a_1^2 + b & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_1 a_2 & a_2^2 + b & a_2 a_3 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 + b \end{pmatrix} \quad (69)$$

und  $b \neq 0$ .

*Beweis.* Weil  $Q$  eine Drehquadrik beschreibt, hat die Matrix  $A$  exakt zwei verschiedene Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , mit  $\lambda_1$  hat Vielfachheit 1 und  $\lambda_2$  hat Vielfachheit 2 und  $\lambda_2 \neq 0$ . Nach vorigem Satz kann die Matrix  $A$ , wie in Gleichung (65) dargestellt, beschrieben werden. Da aber  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  ist, kann durch den Faktor  $\lambda_1 - \lambda_2$  dividiert werden. Man setzt noch den Faktor  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = b$  und erhält genau die Form (69) für die Matrix  $A$ .  $\square$

**Bemerkung 5.4.** Auf folgende Eigenschaften wird verwiesen:

(i) Der Vektor  $a$  ist der Richtungsvektor der Rotationsachse der Quadrik. Die Bedingung, dass  $a$  normiert ist, hat keine Auswirkungen, da die Matrix  $Q$ , die die Drehquadrik  $\Phi$  beschreibt, mit jedem beliebigen Faktor  $\neq 0$  multipliziert werden kann.

(ii) Im Fall von  $b = 0$ , erhält man einen parabolischen Zylinder oder ein Parallelebenenpaar. Deren Schnitt mit der Fernebene ist die Ferngerade der Ebene  $a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0$ . Ein parabolischer Zylinder ist zwar keine Drehquadrik (er besitzt ja keine Rotationssymmetrie), kann aber als Grenzfall einer solchen aufgefasst werden, wenn die Drehachse ins Unendliche rückt.

Aufgrund des vorigen Satzes kann jede Drehquadrik  $Q$  mit einer Gleichung der Form (61) und einer  $3 \times 3$ -Untermatrix  $A$  so parametrisiert werden, dass  $A$  die Gestalt wie in Gleichung (69) hat. Umgekehrt gilt, dass jede symmetrische  $4 \times 4$ -Matrix mit einer Matrix  $A$ , welche wie in Gleichung (69) dargestellt ist, eine von einem Parallelebenenpaar verschiedene Drehquadrik repräsentiert, sofern  $b \neq 0$  ist.

## 5.2 Klassifikation und Parameterdarstellung von Drehquadriken

Es ist leicht nachzurechnen, dass die Determinanten der beiden Matrizen  $Q$  und  $A$  wie folgt beschrieben werden können:

$$\begin{aligned} \det(A) &= b^2 \cdot \delta, \\ \det(Q) &= b \cdot \Delta \end{aligned} \quad (70)$$

mit

$$\delta = b + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= bc_0 \delta - c_1^2(a_2^2 + a_3^2 + b) - c_2^2(a_1^2 + a_3^2 + b) - c_3^2(a_1^2 + a_2^2 + b) \\ &\quad + 2(a_1 a_2 c_1 c_2 + a_1 a_3 c_1 c_3 + a_2 a_3 c_2 c_3). \end{aligned} \quad (72)$$

Man kann nun die Drehquadriken mit Hilfe von  $\delta$  und  $\Delta$  und  $b \neq 0$  wie in folgender Tabelle klassifizieren (aus [7])

$\Delta \neq 0$	$\delta \neq 0$	Drehellipsoid oder Drehhyperboloid
$\Delta \neq 0$	$\delta = 0$	Drehparaboloid
$\Delta = 0$	$\delta \neq 0$	Drehkegel
$\Delta = 0$	$\delta = 0$	Drehzylinder

Eine genauere Unterscheidung liefert die Untersuchung der beiden Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ . Die Fälle mit  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  sind folgende:

- Für  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_2 \neq 0$  ist die Quadrik ein Parabolischer Zylinder.
- Ein Drehzylinder entsteht bei  $\lambda_1 \neq 0$  und  $\lambda_2 = 0$  und zusätzlich muss gelten  $(c_1^2 + c_2^2)/\lambda_1^2 - c_0/\lambda_1 > 0$  mit  $c_3 < 0$ .
- Der nullteilige Drehzylinder ergibt sich für  $\lambda_1 \neq 0$  und  $\lambda_2 = 0$  und  $(c_1^2 + c_2^2)/\lambda_1^2 - c_0/\lambda_1 < 0$  und  $c_3 < 0$ .
- Ein konjugiert komplexes Ebenenpaar liefert genau  $\lambda_1 \neq 0$  und  $\lambda_2 = 0$  unter der Bedingung  $c_3 < 0$  und  $(c_1^2 + c_2^2)/\lambda_1^2 - c_0/\lambda_1 = 0$ .
- Bei  $c_3 > 0$  und  $\lambda_1 \neq 0$  und  $\lambda_2 = 0$  entsteht ein Drehparaboloid.

Die Fälle  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  und beide nicht Null erzeugen die Drehquadriken mit Mittelpunkten:

- Für  $(c_1^2 + c_2^2)/\lambda_1^2 + c_3^2/\lambda_1\lambda_2 - c_0/\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_1\lambda_2 > 0$  ergibt sich ein nullteiliger Drehkegel.
- Analog erhält man für  $(c_1^2 + c_2^2)/\lambda_1^2 + c_3^2/\lambda_1\lambda_2 - c_0/\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_1\lambda_2 < 0$  einen Drehkegel.
- Für  $k := (c_1^2 + c_2^2)/\lambda_1^2 + c_3^2/\lambda_1\lambda_2 - c_0/\lambda_1 > 0$  und  $k\lambda_1/\lambda_2 > 0$  stellt sich ein Drehellipsoid ein.
- Ein einschaliges Drehhyperboloid bekommt man bei  $k := (c_1^2 + c_2^2)/\lambda_1^2 + c_3^2/\lambda_1\lambda_2 - c_0/\lambda_1 > 0$  und  $k\lambda_1/\lambda_2 < 0$ .
- Ein zweischaliges Drehhyperboloid hat  $k := (c_1^2 + c_2^2)/\lambda_1^2 + c_3^2/\lambda_1\lambda_2 - c_0/\lambda_1 < 0$  und  $k\lambda_1/\lambda_2 > 0$ .
- Der letzte Fall mit  $k := (c_1^2 + c_2^2)/\lambda_1^2 + c_3^2/\lambda_1\lambda_2 - c_0/\lambda_1 < 0$  und  $k\lambda_1/\lambda_2 < 0$  erzeugt ein nullteiliges Drehellipsoid.

Nachdem man die verschiedenen Drehquadriken unterschieden hat, kann man die reellen Vertreter auch durch ihre Parameterdarstellungen angeben. Die folgende Parameterdarstellung besitzen ohne Beschränkung der Allgemeinheit die  $z$ -Achse als Rotationsachse.  $u$  und  $v$  beschreiben die beiden Parameter. Für die beiden Fälle Drehkegel und einschaliges Drehhyperboloid sind zusätzlich Bilder der Flächen zweiter Ordnung mit Achsenrichtungen ungleich der  $z$ -Achse angegeben:

$$\bullet \text{Doppelebene} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P + v \cdot \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (73)$$

mit  $P$  als Punkt auf der Ebene.

$$\bullet \text{Kugel} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M + r \cdot \begin{pmatrix} \cos(u) \cos(v) \\ \sin(u) \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix} \quad (74)$$

mit  $M$  als Mittelpunkt und  $r$  als Radius.

$$\bullet \text{Drehparaboloid} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S + \begin{pmatrix} v \cos(u) \\ v \sin(u) \\ \frac{v^2}{2p} \end{pmatrix} \quad (75)$$

mit  $S$  als Scheitel und  $p$  als Parameter der Meridianparabel.

$$\bullet \text{Drehzylinder} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M + \begin{pmatrix} r \cos(u) \\ r \sin(u) \\ v \end{pmatrix} \quad (76)$$

mit  $M$  als Mittelpunkt eines Schnittkreises.

$$\bullet \text{Drehellipsoid} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M + \begin{pmatrix} r \cos(u) \cos(v) \\ r \sin(u) \cos(v) \\ b \sin(v) \end{pmatrix} \quad (77)$$

mit  $M$  als Mittelpunkt.

$$\bullet \text{Drehkegel} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S + \begin{pmatrix} \cos(u) \cos(v) \\ \sin(u) \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix} \quad (78)$$

mit  $S$  als Kegelspitze.

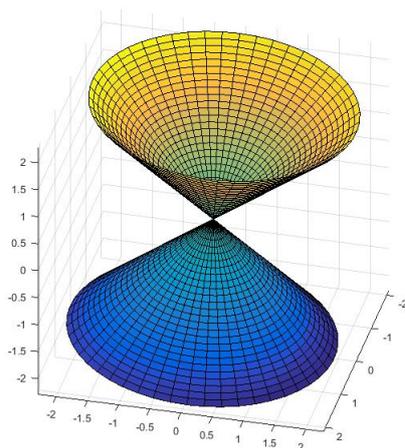


Abbildung 4: Drehkegel

Drehkegel mit Öffnungswinkel  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  und Spitze im Ursprung. Achsenrichtung auf  $a = (0, 1, 12)^T$  gesetzt.

$$\bullet \text{einschaliges Drehhyperboloid} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M + \begin{pmatrix} r \cos(u) \cosh(v) \\ r \sin(u) \cosh(v) \\ b \sinh(v) \end{pmatrix} \quad (79)$$

mit  $M$  als Mittelpunkt.

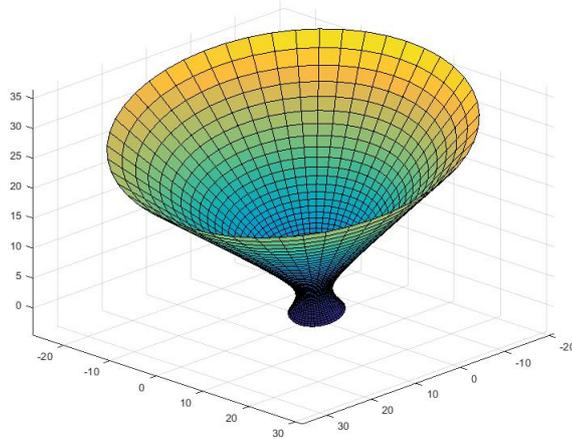


Abbildung 5: einschaliges Drehhyperboloid

Einschaliges Drehhyperboloid mit Mittelpunkt im Ursprung wurde für  $u = 0, \dots, 2\pi$  und  $v = -1, \dots, 3$  paramterisiert.

• *zweischaliges Drehhyperboloid* : 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M + \begin{pmatrix} r \cos(u) \sinh(v) \\ r \sin(u) \sinh(v) \\ b \cosh(v) \end{pmatrix} \quad (80)$$

mit  $M$  als Mittelpunkt.

### 5.3 Drehquadriken durch vorgegebene Punkte

Ich möchte hier einige wichtige Ergebnisse und Schritte aus dem Artikel ([7]) aufzählen und erwähnen, die später zu Ermittlung von Drehquadriken durch vier komplanare Punkte nützlich sind.

Das Ziel ist es nun Drehquadriken zu finden, die durch  $n$  vorgegebene Punkte  $P_i^*, i = 1, \dots, n$ , welche in allgemeiner Lage sind, laufen. Das Schema wurde aus [7] übernommen.

**Definition 5.5.** *Seien die Punkte  $P_i^*, i = 1, \dots, n$  im euklidischen 3-Raum, dann sagt man, dass die Punkte allgemeine Lage besitzen, wenn im Fall  $n = 4$  die vier Punkte nicht komplanar liegen, und im Fall  $n \geq 5$  die  $n$  Punkte voneinander verschieden sind und weder komplanar, noch kosphärisch sind (auf keiner gemeinsamen Kugel liegen).*

Das heißt, man muss das Gleichungssystem

$$(1, p_{ix}^*, p_{iy}^*, p_{iz}^*) \cdot \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & a_1^2 + b & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ c_2 & a_1 a_2 & a_2^2 + b & a_2 a_3 \\ c_3 & a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 + b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{ix}^* \\ p_{iy}^* \\ p_{iz}^* \end{pmatrix} = 0, i = 1, \dots, n \quad (81)$$

in den Variablen  $c_0, c_1, c_2, c_3, a_1, a_2, a_3$  und  $b$  lösen. Dieses Gleichungssystem kann man auch in der Form

$$P_{n,10}^* \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ a_1^2 + b \\ a_2^2 + b \\ a_3^2 + b \\ a_2 a_3 \\ a_1 a_3 \\ a_1 a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (82)$$

schreiben mit

$$P_{n,10}^* = \begin{pmatrix} 1 & 2p_{1x}^* & 2p_{1y}^* & 2p_{1z}^* & p_{1x}^{*2} & p_{1y}^{*2} & p_{1z}^{*2} & 2p_{1y}^* p_{1z}^* & 2p_{1x}^* p_{1z}^* & 2p_{1x}^* p_{1y}^* \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 1 & 2p_{nx}^* & 2p_{ny}^* & 2p_{nz}^* & p_{nx}^{*2} & p_{ny}^{*2} & p_{nz}^{*2} & 2p_{ny}^* p_{nz}^* & 2p_{nx}^* p_{nz}^* & 2p_{nx}^* p_{ny}^* \end{pmatrix} \quad (83)$$

**Lemma 5.6.** (83) ist ein System von  $n$  Gleichungen in 8 homogenen Variablen, das im Allgemeinen für

- a)  $n < 7$  auf eine unendliche Lösungsmenge führt.
- b)  $n = 7$  auf eine endliche Lösungsmenge führt.
- c)  $n > 7$  keine Lösung besitzt.

**Bemerkung 5.7.** Man kann die Matrix  $P_{n,10}^*$  in zwei Teilmatrizen aufteilen, wobei  $M_{m,k}$  jene mit den ersten  $m$ -Zeilen und ersten  $k$ -Spalten ist und  $N_{m,l}$  jene mit den ersten  $m$ -Zeilen und den letzten  $l$ -Spalten ist.

**Lemma 5.8.** Seien  $P_1^*, \dots, P_5^*$  fünf Punkte allgemeiner Lage, dann seien die Matrizen  $M_{5,5}^{(5)}, M_{5,5}^{(7)}$  und  $M_{5,5}^{(7)}$  die Teilmatrizen gebildet aus den ersten vier Spalten und der fünften, sechsten und siebenten Spalte. Mindestens eine dieser ist regulär.

Sind nun fünf Punkte  $P_1^*, \dots, P_5^*$  in allgemeiner Lage gegeben, dann ist nach vorigem Lemma eine dieser Matrizen regulär und deshalb invertierbar. Sei zum Beispiel  $M_{5,5}^{(5)}$  regulär. Daher lässt sich das Gleichungssystem aus (51) in die Form

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ a_1^2 + b \end{pmatrix} = -M_{5,5}^{-1} \cdot N_{5,5} \cdot \begin{pmatrix} a_2^2 + b \\ a_3^2 + b \\ a_2 a_3 \\ a_1 a_3 \\ a_1 a_2 \end{pmatrix} \quad (84)$$

umgeschrieben werden.

Die letzte Zeile dieser fünf Gleichungen führt auf

$$k \cdot b + q(a_1, a_2, a_3) = 0 \quad (85)$$

mit  $k$  als reelle konstante ungleich Null und mit  $q(a_1, a_2, a_3)$  ein nicht-triviales quadratisches homogenes Polynom in  $a_1, a_2$  und  $a_3$ .

**Lemma 5.9.** *In Folge dessen, kann man  $b$  eindeutig für eine vorher festgelegte Achsenrichtung  $a = (a_1, a_2, a_3)^T$  aus (54) bestimmen.*

Sind weiters sechs Punkte  $P_1^*, \dots, P_6^*$  in allgemeiner Position vorgegeben, so kann man die sechs Punkte umsortieren, sodass die ersten vier Punkte  $P_1^*, \dots, P_4^*$  nicht komplanar sind und die Fünfertupeln

$$(P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^*, P_5^*) \text{ und } (P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^*, P_6^*)$$

auch allgemeine Lage haben. Daher kann aufgrund des ersten Fünfertupel

$$b = q_1(a_1, a_2, a_3) \quad (86)$$

und aufgrund des zweiten Fünfertupel

$$b = q_2(a_1, a_2, a_3) \quad (87)$$

ausgedrückt werden.

Man kann also sagen, dass die Einträge der Achsenrichtung  $a_1, a_2, a_3$  eine homogene quadratische Bedingung erfüllen:

$$f(a_1, a_2, a_3) = q_2(a_1, a_2, a_3) - q_1(a_1, a_2, a_3) = 0 \quad (88)$$

Diese Bedingung beschreibt eine Kurve zweiter Ordnung in der Fernebene.

**Lemma 5.10.** *Daher gibt es eine einparametrische Menge von Drehquadricken durch sechs Punkte allgemeiner Lage  $P_1^*, \dots, P_6^*$ . Die Fernpunkte der Achse liegen auf einer Kurve zweiter Ordnung in der Fernebene.*

Sind sogar sieben Punkte  $P_1^*, \dots, P_7^*$  in allgemeiner Position vorgegeben, kann man diese wieder in zwei Sechstupeln

$$(P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^*, P_5^*, P_6^*) \text{ und } (P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^*, P_5^*, P_7^*)$$

aufteilen, wobei beide Sechstupeln in allgemeiner Position sind. Dann erhält man für beide Sechstupel eine Bedingung für die Fernpunkte der Achse. Das heißt die Fernpunkte der Rotationsachsen der Drehquadricken für sieben in allgemeiner Lage vorgegebener Punkte liegen auf den Schnittpunkten zweier Kurven zweiter Ordnung in der Fernebene. Das heißt, diese beiden Kurven zweiter Ordnung schneiden sich in höchstens vier Fernpunkten.

**Lemma 5.11.** *Es gibt maximal vier Drehquadricken durch sieben Punkte allgemeiner Lage.*

Durch Festlegung einer der vier Achsenrichtungen, kann man die Drehquadricken nach Lemma 5.9 eindeutig bestimmen.

## 5.4 Mittelpunkt einer Drehquadricken

**Definition 5.12.** *Es sei  $\Phi$  eine Drehquadricken mit der Gleichung  $x^T Q x = 0$ , wobei  $Q$  die in (61) angegebene Form besitzt. Der Mittelpunkt  $M = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$  einer*

Drehquadrik  $\Phi$  ist der Pol der Fernebene bezüglich dieser Quadrik und erfüllt daher die Gleichung  $Q \cdot M = (\tau, 0, 0, 0)^T$  mit  $\tau \in \mathbb{R}, \tau \neq 0$ . Aus den Zeilen 2 bis 4 erhält man folgende Bedingungen für den Mittelpunkt der Drehquadrik:

$$\begin{aligned} c_1 m_0 + (a_1^2 + b)m_1 + a_1 a_2 m_2 + a_1 a_3 m_3 &= 0 \\ c_2 m_0 + a_1 a_2 m_1 + (a_2^2 + b)m_2 + a_2 a_3 m_3 &= 0 \\ c_3 m_0 + a_1 a_3 m_1 + a_2 a_3 m_2 + (a_3^2 + b)m_3 &= 0 \end{aligned} \quad (89)$$

Diese Forderungen führen für den Mittelpunkt  $M$  auf diese Lösung:

$$\begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b) \\ a_1(a_2 c_2 + a_3 c_3) - c_1(b + a_2^2 + a_3^2) \\ a_2(a_1 c_1 + a_3 c_3) - c_2(b + a_1^2 + a_3^2) \\ a_3(a_1 c_1 + a_2 c_2) - c_3(b + a_1^2 + a_2^2) \end{pmatrix} \quad (90)$$

## 5.5 Drehquadriken durch einen Kegelschnitt

Die Aufgabe aller Drehquadriken durch eine gegebene Kurve zweiter Ordnung zu bestimmen, wurde von Narasinga in ([6]) und Röschel ([5]) behandelt. Ein Spezialfall ist die Aufgabe alle Drehkegel und Drehzylinder durch einen gegebenen Kegelschnitt zu bestimmen.

**Bemerkung 5.13.** *Ist  $\Phi$  eine Drehquadrik und  $\epsilon$  eine nicht zur Achse  $a$  von  $\Phi$  normale Ebene. Dann ist die durch  $a$  gehende und zu  $\epsilon$  normale Ebene  $\sigma$  eine Symmetrieebene der Schnittkurve  $k = \Phi \cap \epsilon$ . Daher gilt:  $k$  besitzt die Gerade  $s = \epsilon \cap \sigma$  (=Normalprojektion von  $a$  auf  $\epsilon$ ) als Symmetrieachse.*

Im folgenden fassen wir die bekannten Ergebnisse aus diesem Bereich zusammen.

### 5.5.1 Fokalkegelschnitte

**Bemerkung 5.14.** *Jede reguläre Kurve zweiter Ordnung ist ein ebener Schnitt eines Drehkegels.*

In umgekehrter Weise stellte sich nun die Frage, ob man auch durch einen gegebenen Kegelschnitt mehrere Drehkegel legen kann und auf welcher Kurve sich die Scheitel der Kegel bewegen.

**Bemerkung 5.15.** *Die Dandelinsche Kugel findet in der Geometrie beim Nachweis, dass ein ebener Schnitt eines Drehkegels ein regulärer Kegelschnitt ist, sofern der Schnitt nicht durch die Kegelspitze verläuft, Anwendung.*

### 5.5.2 Beispiel 1) Ellipse

Sei eine Ellipse  $k$  im Grundriss gegeben. Ihre Hauptscheitel  $A$  und  $B$  und Brennpunkte  $F_1$  und  $F_2$  liegen auf der Rissachse, und der Aufriss dieser Ellipse ist dann als Strecke zu sehen. Man wählt eine Kugel mit beliebigen Radius (Dandelinsche Kugel), welche die Ebene, in der die Ellipse liegt in einem der beiden Brennpunkte  $F_1$  oder  $F_2$  berührt. Und zu dieser Kugel erzeugt man den umschriebenen Drehkegel, dessen Umrisserzeugende durch die Punkte  $A$  und  $B$  laufen. Den Kegelscheitel bezeichnet man mit  $S$ . Dieser erzeugte Drehkegel schneidet die

Grundrissebene  $\pi_1$  genau nach der vorgegebenen Ellipse. Die Hauptscheitel und Brennpunkte stimmen mit denen des ebenen Schnittes überein. Durch Änderung des Radius der Kugel erhält man unendlich viele weitere Drehkegel, deren Schnitt mit der Ellipse übereinstimmt. Die Kegelscheitel  $S$  der Drehkegel laufen entlang einer regulären Kurve zweiter Ordnung, genauer, auf einer Hyperbel. Nachgewiesen wird das wie folgt:  
 Ohne Beschränkung der Allgemeinheit berührt die Kugel im Brennpunkt  $F_2$ . Seien  $T_1, T_2$  die Berührungspunkte der Umrisserzeugenden des Drehkegels mit der Kugel, dann gilt:

$$|\overline{SA} - \overline{SB}| = |\overline{AT_1} - \overline{BT_2}| = |\overline{AF_2} - \overline{BF_2}| = \overline{F_1F_2} = 2e \quad (91)$$

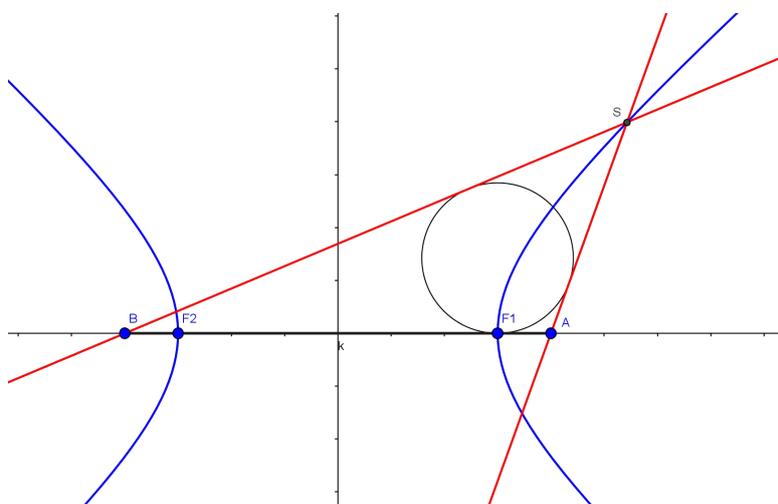


Abbildung 6: Konstruktion der Drehkegel und Drehzylinder durch eine Ellipse  $k$

Daher gilt:

**Satz 5.16.** *Die Scheitel  $S$  aller durch eine Ellipse  $k$  gehenden Drehkegel liegen auf einer Hyperbel  $\bar{k}$ , deren Hauptscheitel in die Brennpunkte  $F_1, F_2$  von  $k$  fallen und deren Brennpunkte in die Hauptscheitel  $A, B$  von  $k$  fallen. Die Ebene, in der die Hyperbel liegt, steht senkrecht auf die Ebene, in welcher die Ellipse liegt. Die Achsen der Drehkegel sind Tangenten an die Hyperbel im Kegelscheitel  $S$ . Die Asymptoten sind die Achsen der beiden Drehzylinder, welche die Ellipse  $k$  beinhalten.*

### 5.5.3 Beispiel 2) Hyperbel

Es werden die selben Vorgaben wie bei der Ellipse angenommen. Es wird wieder eine Kugel mit beliebigen Radius gewählt, welche die in der Grundrissebene  $\pi_1$  liegende Hyperbel in einem ihrer Brennpunkte berührt. Man bestimmt die Kegelspitze  $S$  des Kugel umschreibenden Drehkegels, der auch durch die Scheitelpunkte  $A, B$  verläuft. Auch in diesem Fall stimmt die vorgegebene Hyperbel mit der Schnittkurve des Drehkegels mit der Ebene  $\pi_1$  überein. Die Kegelscheitel verlaufen auf einer Ellipse.

Nachgewiesen wird das so:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit berührt die Kugel im Brennpunkt  $F_2$ . Seien  $T_1, T_2$  die Berührungspunkte der Umrisserzeugenden mit der Kugel, dann gilt:

$$\overline{SA} + \overline{SB} = \overline{AT_1} + \overline{BT_2} = \overline{AF_2} + \overline{BF_2} = \overline{F_1F_2} = 2e \quad (92)$$

Daher gilt:

**Satz 5.17.** *Die Scheitel  $S$  aller durch die Hyperbel  $k$  gehenden Drehkegel liegen auf einer Ellipse  $\bar{k}$ , deren Hauptscheitel in die Brennpunkte  $F_1, F_2$  von  $k$  fallen und deren Brennpunkte in die Hauptscheitel  $A, B$  von  $k$  fallen. Die Ebene, in der die Ellipse liegt, steht senkrecht auf die Ebene, in welcher die Hyperbel liegt. Die Achsen der Drehkegel sind Tangenten an die Ellipse im Kegelscheitel  $S$ .*

#### 5.5.4 Beispiel 3) Parabel

Es werden die selben Vorgaben wie bei den vorigen Angaben für das Beispiel der Ellipse und Hyperbel angenommen. Die Gerade  $l$  in der Ebene  $\pi_2$  steht normal zur Ebene, in der die Parabel liegt, und geht durch das Spiegelbild vom Scheitelpunkt  $A$  bezüglich des Brennpunktes  $F$ . Die Kegelscheitel  $S$  durchlaufen bei Änderung des Kugelradius eine weitere Parabel.

Der Nachweis erfolgt so:

Seien  $T_1, T_2$  die Berührungspunkte der Umrisserzeugenden mit der Kugel, dann gilt:

$$\overline{Sl} = \overline{ST_2} + \overline{T_2l} = \overline{ST_1} + \overline{AT_1} = \overline{SA} \quad (93)$$

Somit haben wir:

**Satz 5.18.** *Die Kegelscheitel  $S$  aller durch eine Parabel gehenden Drehkegel liegen auf einer Parabel, deren Scheitel und Brennpunkt mit Brennpunkt und Scheitel der vorgegebenen Parabel übereinstimmt. Die Ebenen, in denen die beiden Parabeln liegen, stehen senkrecht aufeinander. Die Kegelachsen sind Tangenten an die Parabel im Kegelscheitel  $S$ .*

#### 5.5.5 Paare von Fokalkegelschnitten

**Bemerkung 5.19.** *Es ist leicht erkennbar, dass zwischen Beispiel 1) und Beispiel 2) eine Vertauschbarkeit für Ellipse und Hyperbel gilt. Auch in Beispiel 3) ist die Bedeutung der beiden Parabeln vertauschbar. Die sich in den Beispielen ergebenen zwei Kegelschnitten bilden ein gleichwertiges Paar, ein Paar sogenannter Fokalkegelschnitte.*

**Definition 5.20.** *Zwei Kegelschnitte in zueinander senkrechten Ebenen, bei denen die Brennpunkte des einen Kegelschnitts die Hauptscheitel des anderen Kegelschnitts sind, heißen ein Paar von Fokalkegelschnitten.*

#### 5.5.6 Allgemeine Überlegungen zu Drehkegel und Drehzylinder

Sämtliche Drehkegel durch einen festen Kegelschnitt findet man also wie folgt (sowohl in [5], als auch [2] auf verschiedene Weisen beschrieben):

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird als fixer Kegelschnitt eine Ellipse in

Bezug auf das kartesische Normalkoordinatensystem in Normalform durch die Gleichung

$$k : \frac{x^2}{\tilde{a}^2} + \frac{y^2}{\tilde{b}^2} = 1 \quad (94)$$

in der  $xy$ -Ebene angenommen, wobei  $\tilde{a}^2 - \tilde{b}^2 > 0$  und  $e^2 = \tilde{a}^2 - \tilde{b}^2$  gilt.

Den Ort der Scheitel aller Drehkegel, welche den Kegelschnitt  $k$  enthalten, löst man nun elementar mit der zu dieser Ellipse gehörigen Fokalhyperbel. Das heißt, dass die entsprechenden Scheiteln auf der Fokalhyperbel  $s_0$  mit der Gleichung

$$s_0 : \frac{x^2}{e^2} - \frac{z^2}{\tilde{b}^2} = 1, y = 0 \quad (95)$$

beziehungsweise auf dem nullteiligen Fokalkegelschnitt  $t_0$  mit der Gleichung

$$t_0 : \frac{y^2}{e^2} + \frac{z^2}{\tilde{a}^2} + 1 = 0, x = 0 \quad (96)$$

liegen, wobei die Punkte von  $t_0$  nur auf komplexe Lösungen von Drehkegeln führen. Auf ein analoges Ergebnis kommt man, wenn man für den Kegelschnitt  $k$  eine Hyperbel ansetzt und  $\tilde{b}^2$  durch  $-\tilde{b}^2$  ersetzt.  $s_0$  ist dann eine Fokalellipse, auf der die Scheitel aller Drehkegel durch  $k$  liegen.

Wie bereits oben erwähnt, erhält man die Drehzylinder, indem man die Asymptoten, welche zur Fokalhyperbel gehören, als Rotationsachse für die Drehfläche zweiter Ordnung annimmt. Der Scheitel geht dabei in einen Fernpunkt über.

### 5.5.7 Drehquadriken durch einen Kegelschnitt

Ist nun für einen festen vorgegebenen Mittelpunktskegelschnitt  $k$ , der wie oben in Hauptlage ist, eine allgemeine Rotationsfläche zweiter Ordnung gesucht, welche den Kegelschnitt  $k$  enthält, so untersucht man zuerst dessen Rotationsachse (siehe [5]). Diese Achse der Drehquadrik liegt im Umkehrschluss nach Bemerkung (5.13) aufgrund von Symmetriegründen ebenfalls in Hauptlage, und liegt deshalb entweder in der  $xz$ -Ebene oder der  $yz$ -Ebene. Angenommen die Drehachse befindet sich in ersterer Ebene, also  $y = 0$ , dann ist auch die gesuchte Drehquadrik bezüglich dieser Ebene symmetrisch. Ausgehend davon, dass der Schnitt mit der  $xy$ -Ebene den vorgegebenen Kegelschnitt  $k$  in Hauptlage ergeben soll, ergibt sich nach ([5]) folgende Lösungsmenge für Drehquadriken:

**Satz 5.21.** *Alle Drehquadriken im  $\mathbb{R}^3$ , die den in Hauptlage vorliegenden Mittelpunktskegelschnitt  $k$  enthalten, gehören zweiparametrischen Scharen an und werden durch*

$$\Phi(a_1, c_3) : \frac{x^2}{\tilde{a}^2} + \frac{y^2}{\tilde{b}^2} = 1 + z(2c_3 + 2a_1a_3x + \frac{\tilde{a}^2\tilde{b}^4(a_1a_3)^2 - e^2}{e^2\tilde{b}^2}z) \quad (97)$$

beschrieben. Die zugehörigen Mittelpunkte  $M$  haben die Gestalt

$$M(a_1, c_3) : (m_x, m_y, m_z)^T = (-\frac{c_3a_1a_3\tilde{a}^2\tilde{b}^2e^2}{\tilde{a}^4\tilde{b}^2(a_1a_3)^2 - e^2}, 0, -\frac{c_3\tilde{b}^2e^2}{\tilde{a}^4\tilde{b}^2(a_1a_3)^2 - e^2}), \quad (98)$$

wobei sich für

$$\tilde{a}^4\tilde{b}^2(a_1a_3)^2 - e^2 = 0 \quad (99)$$

die Drehparaboloide einstellen. Bei fester Achsenrichtung, aber variablem  $c_3 \in \mathbb{R}$ , wandern die Mittelpunkte auf einer Geraden durch den Mittelpunkt von  $k$ . Die Drehachsen werden durch

$$a = (e^2, 0, \tilde{a}^2 \tilde{b}^2 a_1 a_3)^T \quad (100)$$

beschrieben.

Wenn die Drehquadriken die Symmetrieebene  $x = 0$  haben, beziehungsweise nach Ersetzen von  $\tilde{b}^2$  auf  $-\tilde{b}^2$  für eine Hyperbel als Mittelpunktskegelschnitt, führt das Vorgehen auf ein analoges Resultat, die nur auf das Vertauschen von Variablen zurückzuführen ist.

Ein weiteres wichtiges Ergebnis aus der Arbeit ([5]) liefert der Zusammenhang des von den Mittelpunkten und Richtungen der Drehachsen in einem der Symmetrieebenen  $x = 0$  oder  $y = 0$  aufgespannte Richtungsfeld, dass bei zentrischer Streckung aus dem Mittelpunkt des Ausgangskegelschnitts  $k$  in sich übergeht. Die Integralkurven der Richtungsfelder mit Gleichungen

$$\begin{aligned} s_\kappa : \frac{x^2}{e^2} - \frac{z^2}{\tilde{b}^2} &= 1 - \kappa, y = 0 \\ t_\mu : \frac{y^2}{e^2} + \frac{z^2}{\tilde{b}^2} + 1 &= \mu, x = 0 \end{aligned} \quad (101)$$

mit Integrationskonstanten  $\kappa, \mu$  sind dementsprechend Geraden durch diesen Fixpunkt oder werden von dieser Ähnlichkeit vertauscht. Für  $\kappa = 0, \mu = 0$  ergeben sich der reelle Fokalkegelschnitt  $s_0$  und der nullteilige Fokalkegelschnitt  $t_0$  von oben.

**Satz 5.22.** *Die Drehquadriken, die durch einen Mittelpunktskegelschnitt  $k$  verlaufen und deren Mittelpunkte auf einer Integralkurve  $s_\kappa$  oder  $t_\mu$  der Richtungsfelder liegen, haben einen konstanten von  $\kappa$  beziehungsweise  $\mu$  abhängigen Kehlbeziehungsweise Äquatorkreisradius  $\rho$ .*

Handelt es sich beim Ausgangskegelschnitt um eine Parabel und keinen Mittelpunktskegelschnitt ergeben sich folgende Ergebnisse:

**Satz 5.23.** *Die zweiparametrische Schar von Drehquadriken durch die vorgegebene Parabel  $k$  wird durch*

$$\Phi(c_3, a_1) : y^2 + z(2c_3 + 2a_1 a_3 x + (1 - (a_1 a_3)^2)z) = 2px \quad (102)$$

beschrieben. Ihre zugehörigen Mittelpunkte haben die Koordinaten

$$M(c_3, a_1) : (m_x, m_y, m_z)^T = \left( \frac{p((a_1 a_3)^2 - 1) - c_3 a_1 a_3}{(a_1 a_3)^2}, 0, \frac{p}{a_1 a_3} \right), \quad (103)$$

wobei sich bei  $a_1 a_3 = 0$  die Drehparaboloide auftun. Die Drehachsen besitzen die Richtungen

$$a = (1, 0, -a_1 a_3)^T. \quad (104)$$

Die Drehquadriken mit festen Kehlkreisradius  $\rho$  haben ihre zugehörigen Mittelpunkte auf einer Parabel

$$s_\kappa : z^2 = p^2 - 2p(x - \kappa), y = 0 \quad (105)$$

welche zur Fokalparabel  $s_0$  schiebungsgleich ist. Die Drehachsen der zugehörigen Drehquadriken tangieren  $s_\kappa$ .

## 6 Drehquadriken durch vier komplanare Punkte

In diesem Abschnitt soll nun konkret, die Menge der Drehquadriken durch vier komplanare Punkte gefunden werden. Die vier komplanaren Punkte  $P_0, P_1, P_2$  und  $P_3$  seien von allgemeiner Lage - das heißt je drei sind nicht kollinear. Als Sonderfall wird jener behandelt, in dem das Viereck  $P_0, P_1, P_2, P_3$  einen Umkreis besitzt  $P_0, P_1, P_2, P_3$  ein Kreisviereck ist.

Einige hilfreiche Lösungsansätze finden sich hier in den Arbeiten von Hermann Schaal „Konstruktion der Drehzylinder durch vier Punkte einer Ebene“ (1986) ([3]) und „Die Drehkegel durch vier komplanare Punkte“ von 1992 ([2]).

### 6.1 Allgemeine Überlegungen über Drehkegel und Drehzylinder

Gegeben seien die vier Punkte  $P_0, P_1, P_2$  und  $P_3$  in der Ebene  $z = 0$ . Diese erzeugen ein Kegelschnittsbüschel erster Art  $C(\alpha : \beta)$  (siehe Abschnitt 3.3). Im Fall, dass der Parameter des Büschels  $\beta = 0$  beziehungsweise  $\alpha = 0$  ist, treten die beiden Geradenpaare  $P_0P_1, P_2P_3$  und  $P_0P_3, P_1P_2$  als zerfallenden Kegelschnitte auf und für das übrige dritte Geradenpaar  $P_0P_2, P_1P_3$  ist

$$\frac{\alpha}{\beta} = (b_{0,0}b_{1,1} - b_{0,1}^2 - k^2(b_{0,0}b_{2,2} - b_{0,2}^2))/(b_{0,0}k^2) = (p_0 - p_1)(p_2 - p_3) \quad (106)$$

linear erzeugt.

Die drei Geradenpaare schneiden sich in den Diagonalecken  $U = (0, 0, 0)^T, V$  und  $W$ , des Grundvierecks. In diesen Diagonalecken bilden die orthogonalen Symmetralebenen bezüglich des Grundvierecks je ein Geradenbüschel möglicher Achsen für Drehkegel mit Kegelspitzen in  $U, V$  und  $W$  bei entsprechend großem Öffnungswinkel.

Bei  $p_0p_3 - p_1p_2 = 0$  beziehungsweise  $p_0p_2 - p_1p_3$  wird aus dem Grundviereck ein Trapez und die Scheitel  $V$  beziehungsweise  $W$  werden zu Fernpunkten und man kann jeweils eine einparametrische Menge an Drehzylindern durch die vier Punkte legen. Die Erzeugenden der Drehzylinder sind dabei die Geraden, die auf den parallelen Seiten des Trapezes liegen. Die Mittelpunkte der Drehzylinder liegen in der Symmetrieebene der beiden Erzeugenden.

Im Kegelschnittsbüschel  $C(\alpha : \beta)$  treten nun in Abhängigkeit von der Lage der vier vorgegebenen Punkte zusätzlich zu den drei Geradenpaaren als zerfallende Kegelschnitte noch unterschiedliche weitere Kegelschnitte auf. Ist das Grundviereck konvex, so laufen auch Ellipsen und Hyperbeln, sowie zwei Parabeln durch die vier Punkte. Die Parabeln besitzen

$$\frac{\alpha}{\beta} = p_0p_2 + p_1p_3 \pm 2\sqrt{p_0p_1p_2p_3} \quad (107)$$

als Büschelparameter. Wie oben bereits in der Klassifikation der Kegelschnitte angegeben, sind die beiden Parabeln des Büschels auch durch das Verschwinden der Hauptunterdeterminante  $\delta = 0$  bezeichnet. Die Achsen der beiden Parabeln erfüllen die Gleichung

$$\tan \phi_{1,2} = k(p_0p_1 + p_2p_3 \pm 2\sqrt{p_0p_1p_2p_3})/(p_0p_1 - p_2p_3). \quad (108)$$

Alle weiteren Richtungen für Achsen sind Achsenrichtungen von Mittelpunktskegelschnitten.

Ist das Grundviereck konkav, treten zusätzlich zu den drei Geradenpaaren nur Hyperbeln auf.

Nach (5.5.1) kann man nun sämtliche Drehkegel und Drehzylinder durch die Kegelschnitte des Büschels  $C(\alpha : \beta)$  konstruieren und ermitteln. Die gefundenen Drehkegel und Drehzylinder kann man nach ihren Achsenrichtungen wie in ([2]) parametrisieren.

## 6.2 Drehquadriken durch vier komplanare Punkte

Da im vorigen Kapitel nur allgemeine Ansätze zum Auffinden von Drehkegeln und Drehzylindern durch vier komplanare Punkte  $P_0, P_1, P_2$  und  $P_3$  behandelt wurden, soll in diesem Abschnitt der Arbeit eine mögliche Vorgehensweise aufgezeigt werden, mit der alle verschiedenen Drehquadriken durch eben diese vier komplanaren Punkte gefunden werden können. Die Art und Weise des Lösungsweges ist ein systematisches Zusammensetzen von Methoden aus den vorangegangenen Kapiteln, in denen unterschiedliche Themenbereiche untersucht wurden.

Der Ansatz bleibt identisch, indem man durch die vier komplanaren Punkte  $P_0, P_1, P_2$  und  $P_3$  ein passendes kartesisches Koordinatensystem legt, sodass die Punkte die Darstellung aus Gleichung (30) annehmen. Danach stellt man das Kegelschnittsbüschel erster Art  $C(\alpha : \beta)$  durch diese vier Punkte auf (siehe 3.3). Ab hier kann man mehrere verschiedene Lösungsmöglichkeiten verfolgen. Eine, die ich anführen möchte, ist jene, in der man sämtliche Drehquadriken finden kann, die durch einen fixen Kegelschnitt des Büschels, der nur vom Büschelparameter  $\frac{\alpha}{\beta}$  fixiert wird, laufen.

Dadurch, dass der Parameter  $\frac{\alpha}{\beta}$ , der den Kegelschnitt des Büschels bestimmt, vorgegeben ist, erhält man eine Kurve zweiter Ordnung  $C(\alpha : \beta)$ , die außer für  $\frac{\alpha}{\beta} = 0$ ,  $\frac{\alpha}{\beta} = (p_0 - p_1)(p_2 - p_3)$  und  $\frac{\alpha}{\beta} = \infty$  regulär ist. Die singulären Kurven zweiter Ordnung, sind genau die drei verschiedenen Geradenpaare durch die vier Punkte.

Für einen Mittelpunktskegelschnitt  $k$  aus dem Büschel berechnet man den Mittelpunkt wie oben in (2.2) vorgeführt. Diesen wandelt man noch in inhomogene Koordinaten um. Zusätzlich ermittelt man die Achsenrichtungen des Kegelschnitts des Büschels (siehe 3.7).

Da in dieser Arbeit nur die Berechnung der Mittelpunkte für Ellipsen und Hyperbeln aufgetreten ist, möchte ich auch noch die Berechnung des Scheitels einer Parabel aufzeigen, für den Fall, dass das Grundviereck  $P_0, P_1, P_2, P_3$  konvex ist. Dann treten nämlich im Büschelkegelschnitt  $C(\alpha : \beta)$  auch zwei Parabeln auf. Die Ermittlung erfolgt mit Hilfe des Polarsystems aus der projektive Geometrie.

Das heißt für einen Scheitel einer Parabel, die nicht in Hauptlage gegeben ist, kann der Scheitelpunkt folgendermaßen ermittelt werden. Da die Parabel die Ferngerade  $u$  in einem Fernpunkt  $A_u$  berührt, ermittelt man jene Gerade  $h$  die Polare zum Pol  $P_u$  ist, welcher genau dem Fernpunkt der Scheiteltangente entspricht. Diese Gerade  $h$  schneidet die Parabel exakt im Scheitelpunkt.

Dabei wird der zugehörige Eigenvektor zu jenem Eigenwert  $\sigma_i$  berechnet, bei dem  $\sigma_i = 0$  gilt, was für die Parabel für einen der beiden Eigenwerte der  $2 \times 2$ -Untermatrix der Fall ist. Dieser hat in homogenen Koordinaten die Darstellung  $(0, ev_{i_x}, ev_{i_y})^T$ . Die zweite Eigenvektorrichtung ist die um  $\frac{\pi}{2}$  gedrehte

$(0, -ev_{i_y}, ev_{i_x})$ . Wir wissen auch aus der Projektiven Geometrie, dass alle Polaren von Polen, welche auf einer Geraden liegen, sich in einem Punkt schneiden. Diese Eigenschaft wird ausgenutzt und man erzeugt einen Punkt  $G$ , dessen Polare  $g$  ebenfalls durch  $P_u$  verläuft und zusätzlich durch den Ursprung geht. Dieser Punkt  $G$  liegt aufgrund der oben genannten Eigenschaft auch auf der Polaren  $h$ . Dadurch kann der Schnittpunkt von  $h$  mit der Parabel berechnet werden und ergibt uns den gesuchten Scheitel.

Die Gerade  $g$  wird durch die beiden Polaren vom Ursprung und der Polaren von  $P_u$  aufgespannt, wobei die Matrix  $C(\alpha : \beta)$  die Parabel beschreibt:

$$g : \vec{X} = C(\alpha : \beta) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times C(\alpha : \beta) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -ev_{i_y} \\ ev_{i_x} \end{pmatrix} \quad (109)$$

Die Gerade  $p$  durch  $A_u$  und  $G$  wird dann durch die Parameterdarstellung

$$h : \vec{X} = \varrho \begin{pmatrix} 0 \\ ev_{i_x} \\ ev_{i_y} \end{pmatrix} + v \cdot g \quad (110)$$

Es liegen nur Scheitelpunkt der Parabel und Fernpunkt  $A_u$  auf der Geraden, da jene beiden Punkte dieser Geraden die Parabelgleichung erfüllen:

$$\left( \varrho \begin{pmatrix} 0 \\ ev_{i_x} \\ ev_{i_y} \end{pmatrix} + v \cdot g \right)^T \cdot C(\alpha : \beta) \cdot \left( \varrho \begin{pmatrix} 0 \\ ev_{i_x} \\ ev_{i_y} \end{pmatrix} + v \cdot g \right) = 0 \quad (111)$$

Das führt auf eine quadratische homogene Gleichung in  $\varrho : v$

$$2\varrho v \begin{pmatrix} 0 & ev_{i_x} & ev_{i_y} \end{pmatrix} \cdot C(\alpha : \beta) \cdot g + v^2 g^T \cdot C(\alpha : \beta) \cdot g = 0, \quad (112)$$

die als Lösung für  $v = 0$  den Fernpunkt  $A_u$  bekommt. Die zweite Lösung liefert den gesuchten Parabelscheitel für die Werte:

$$\begin{aligned} \varrho &= -g^T \cdot C(\alpha : \beta) \cdot g, \\ v &= 2 \begin{pmatrix} 0 & ev_{i_x} & ev_{i_y} \end{pmatrix} \cdot C(\alpha : \beta) \cdot g \end{aligned} \quad (113)$$

Das heißt in homogenen Koordinaten hat der Scheitel die Form

$$S = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \varrho \begin{pmatrix} 0 \\ ev_{i_x} \\ ev_{i_y} \end{pmatrix} + vg, \quad (114)$$

die in inhomogene Koordinaten umgewandelt wird auf  $S = (\frac{s_1}{s_0}, \frac{s_2}{s_0})^T$ . Der Parabelparameter  $p$  lässt sich mit

$$p = \sqrt{-\frac{\Delta}{H^3}} \quad (115)$$

bestimmen.

Otto Röschel hat in seiner Arbeit ([5]) nur mit jenen Kegelschnitten gerechnet, welche sich in Hauptlage befinden. Dieser Fall tritt allerdings nur auf, wenn für die Punkte des Grundvierecks  $P_0, P_1, P_2, P_3$  gilt:

$$\|p_0\| = \|p_1\| = \|p_2\| = \|p_3\| \quad (116)$$

**Satz 6.1.** *Sämtliche Kegelschnitte des Büschels  $C(\alpha : \beta)$  liegen in Hauptlage vor, wenn die Bedingung (116) erfüllt ist - das heißt das Grundviereck ein Rechteck bildet und der Abstand aller Punkte vom Ursprung gleich ist.*

Liegt allerdings ein Kegelschnittsbüschel durch vier komplanare Punkte vor, die (116) nicht erfüllen, so sind nicht alle Kegelschnitte des Büschels in Hauptlage. Allerdings hat man bereits für sämtliche Kegelschnitte des Büschels, ihre Mittelpunkte oder Scheitelpunkte, Achsenrichtungen, sowie Haupt- und Nebenachsenlängen oder Parabelparameter ermittelt. Durch eine geeignete Kongruenztransformation, bestehend aus Schiebung und Drehung ist es nun möglich den vorliegende Büschelkegelschnitt  $k$  in Hauptlage zu transformieren, um danach in der Vorgangsweise, wie sie von Otto Röschel geschildert wurde fortzufahren.

**Lemma 6.2.** *Durch einen festen Kegelschnitt  $k$  in Hauptlage laufen eine zwei-parametrische Schar an Drehquadriken, beziehungsweise bei fest vorgegebener Achsenrichtung  $a$  der Drehquadrik eine einparametrische Schar an Drehquadriken.*

Nach Festlegen der übrig gebliebenen freien Variablen für die Einträge in der  $4 \times 4$ -Matrix  $Q$  ist ein Drehquadrik  $\Phi$  festgelegt. Allerdings liegt nun das Problem vor, dass die Drehquadrik  $\Phi$  nach Transformation des Büschelkegelschnitts nicht mehr durch die vier vorgegebenen komplanaren Punkte läuft, was das eigentlich Ziel der Problemstellung ist.

Diese Problematik kann man auf unterschiedlichste Weise lösen, von denen ich eine hier aufgeführt habe.

Es gilt, eine bestimmte Anzahl  $n$  an Punkten allgemeiner Lage im Raum (nicht vier von ihnen liegen in einer Ebene), welche auf der eben gewonnenen Drehquadrik liegen zurück zu transformieren. Die erhaltenen Punkte  $P_i^* = (1, p_{ix}^*, p_{iy}^*, p_{iz}^*)$ ,  $i = 1, \dots, n$  in homogenen Koordinaten liegen nun auf der Drehquadrik  $\Phi$ , welche auch durch die vier komplanaren Punkte verläuft.

Völlig unbekannt sind hingegen noch einige der Einträge der Matrix  $Q$ , welche die Drehquadrik festlegen. Man kann allerdings die Achsenrichtung der Drehquadrik, welche durch den Kegelschnitt  $k$  in Hauptlage verläuft, ebenso mit obiger Transformation in die richtige Position bringen.

Man kann jetzt nach der Vorgangsweise, wie sie in der Arbeit ([7]) von A. Gferrer und P.J. Zsombor-Murray niedergeschrieben ist, mit den ermittelten Punkten eine eindeutige Drehquadrik finden. Das heißt, man muss das Gleichungssystem aus (81) in den Variablen  $c_0, c_1, c_2, c_3$  und  $b$  lösen.

Mit der Drehachse der gesuchten Drehquadrik kann man eine eindeutige Drehquadrik durch das Rücktransformieren von 5 Punkten  $P_i^*, i = 1, \dots, 5$  bestimmen. Die Vorgehensweise wurde schon in den Gleichung (84) und (85) dargelegt, wodurch man die Matrix  $Q$  zur Beschreibung der Drehquadrik gefunden hat.

Durch dieses Verfahren kann man sämtliche verschiedene Drehquadriken ermitteln, die durch einen regulären Kegelschnitt des Büschels, das durch die vier vorgegebenen komplanaren Punkte  $P_0, P_1, P_2$  und  $P_3$  erzeugt wird, verlaufen. Die drei einzigen singulären Kegelschnitte des Büschels sind die drei durch die vier Punkte laufenden Geradenpaare.

**Ergebnis.** *Durch ein schneidendes Geradenpaar kann man eine einparametrische Menge an Drehkegeln legen, deren Kegelspitzen im Schnittpunkt des zugehörigen Geradenpaars  $U, V$  oder  $W$  liegen. Verläuft ein Geradenpaar mit zwei zueinander liegenden parallelen Geraden, das heißt ein Schnittpunkt des Geradenpaars wird zum Fernpunkt, so kann man durch diese beiden Geraden eine einparametrische Menge an Drehzylindern legen, wobei die beiden Geraden des zerfallenden Kegelschnitts Erzeugende am Zylindermantel sind.*

Und nachdem man nun alle Drehquadriken durch vier komplanare Punkte ermittelt hat, lässt sich folgendes wichtige Ergebnis niederschreiben:

**Ergebnis.** *Durch vier komplanare Punkte allgemeiner Lage  $P_0, P_1, P_2, P_3$  geht eine dreiparametrische Schar an Drehquadriken. Die vier komplanaren Punkte erzeugen ein Kegelschnittsbüschel erster Art, was einer einparametrischen Menge an Kegelschnitten entspricht, wobei durch jeden dieser Kegelschnitte eine zwei-parametrische Schar an Drehquadriken läuft.*

In den folgenden beiden Aufgabenstellungen werden Lösungswege präsentiert, in denen sämtliche Drehquadriken gesucht sind, die gewisse Voraussetzungen erfüllen sollen. Die Vorgabe der vier in allgemeiner Lage liegende Punkte gilt auch hier. Die gesonderten Fälle, dass die vier komplanaren Punkte nicht allgemeine Lage haben, dass heißt zum Beispiel drei von ihnen liegen auf einer Geraden, werden in dieser Ausarbeitung nicht untersucht.

### 6.3 Aufgabe 1

In der ersten Aufgabenstellung ermittelt man alle Drehquadriken, die einerseits durch die vier vorgegebenen komplanaren Punkte gehen und dabei eine feste vorgegebene Achsenrichtung  $a$  besitzen. Diese Aufgabenstellung führt auf eine einparametrische Schar von Drehquadriken, deren Mittelpunkte auf einer eindeutigen Geraden verlaufen und deren Achsen in einer zur Ebene der  $P_0, P_1, P_2, P_3$  normalen Ebene liegen, die genau diese Vorgaben erfüllen. Für die Lösung dieser Problematik gibt es mehrere Wege.

Gegeben seien nun die 4 komplanaren Punkte  $P_0, P_1, P_2$  und  $P_3$ , und ein Richtungsvektor der Achse einer Drehquadrik  $a = (a_1, a_2, a_3)^T$ . Gesucht sind die Drehquadriken mit dieser Achsenrichtung.

Lösungsvariante A)

Ein möglicher Lösungsweg ist, indem man einer beliebige Drehquadrik  $\Phi$  ansetzt, welche die Gleichung

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (117)$$

mit  $Q = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & a_1^2 + b & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ c_2 & a_1 a_2 & a_2^2 + b & a_2 a_3 \\ c_3 & a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 + b \end{pmatrix}$  besitzt.

Für die  $3 \times 3$ -Untermatrix  $\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & a_1^2 + b & a_1 a_2 \\ c_2 & a_1 a_2 & a_2^2 + b \end{pmatrix}$  von  $Q$ , welche den Schnitt mit der Ebene  $z = 0$  entspricht, muss gelten, dass diese genau den Schnittkegelschnitt  $k$  aus dem Kegelschnittsbüschel beschreibt. Daher kann man diese  $3 \times 3$ -Matrix mit der Matrix des Kegelschnittsbüschel  $C(\alpha : \beta)$  gleichsetzen.

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & a_1^2 + b & a_1 a_2 \\ c_2 & a_1 a_2 & a_2^2 + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta b_{0,0} & \beta b_{0,1} & \beta b_{0,2} \\ \beta b_{0,1} & -\alpha k^2 + \beta b_{1,1} & \beta b_{1,2} \\ \beta b_{0,2} & \beta b_{1,2} & \alpha + \beta b_{2,2} \end{pmatrix} \quad (118)$$

Koeffizientenweises Vergleichen liefert sechs Gleichung in sechs Unbekannten  $c_0, c_1, c_2, b, \alpha$  und  $\beta$ .

$$c_0 = \beta b_{0,0} \quad (119)$$

$$c_1 = \beta b_{0,1} \quad (120)$$

$$c_2 = \beta b_{0,2} \quad (121)$$

$$a_1^2 + b = -\alpha k^2 + \beta b_{1,1} \quad (122)$$

$$a_2^2 + b = \alpha + \beta b_{2,2} \quad (123)$$

$$a_1 a_2 = \beta b_{1,2} \quad (124)$$

Durch sukzessives Ausdrücken und Rückeinsetzen der unbekanntenen Ausdrücke, bekommt man die eindeutige Lösungsmenge. Geht man davon aus, dass die vier komplanaren Punkte nicht auf einem Kreis liegen, folgt daraus, dass  $b_{1,2} \neq 0$  ist. Der Sonderfall, dass die vier Punkte ein Kreisviereck bilden wird eigens betrachtet. Die Gleichung  $a_1 a_2 = \beta b_{1,2}$  führt dann auf

$$\beta = \frac{a_1 a_2}{b_{1,2}} \quad (125)$$

Dadurch sind auch  $c_0, c_1$  und  $c_2$  eindeutig bestimmt.

Die beiden noch nicht bestimmten Werte  $b$  und  $\alpha$  führen auf ein lineares Gleichungssystem. Durch Lösen dieses Gleichungssystems bekommt man für

$$b = \frac{a_1 \left( \frac{b_{1,1}}{b_{1,2}} a_2 - a_1 \right) + k^2 a_2 \left( \frac{b_{2,2}}{b_{1,2}} a_1 - a_2 \right)}{1 + k^2} \quad (126)$$

$$\alpha = \frac{a_1 \left( \frac{b_{1,1}}{b_{1,2}} a_2 - a_1 \right) - a_2 \left( \frac{b_{2,2}}{b_{1,2}} a_1 - a_2 \right)}{1 + k^2} \quad (127)$$

als Lösungen.

Dadurch ist die Quadrik  $\Phi$  durch  $Q$  aus (117) bis auf  $c_3$  bestimmt, was auf eine einparametrische Lösungsschar von Drehquadriken führt. Wie bereits in der Arbeit von Otto Röschel erwähnt wird (siehe [5]), liegen die Mitten der gesuchten Drehquadriken bei fester Drehachsenrichtung und variablem  $c_3$  auf einer Geraden durch den Mittelpunkt des Schnittkegelschnitts  $k$  in der  $xy$ -Ebene. Der Nachweis erfolgt aus Symmetriegründen und dem Polarsystem. Der Mittelpunkt einer Drehquadrik ist der Pol der Fernebene. Wird die Drehquadrik mit einer beliebigen Ebene geschnitten, dann ist der Mittelpunkt der Schnittkurve zweiter Ordnung der Pol zur Ferngeraden, die aus dem Schnitt der Ebene mit der Fernebene entsteht.

Hierzu untersucht man einfach die Parameterdarstellung der Ortskurve der Mittelpunkte für Drehquadriken aus Gleichung (90). Für den Fall, dass allerdings alle Parameter bis auf  $c_3$  festgelegt sind, kann man den Mittelpunktsortskurve nach dem freien Parameter  $c_3$  umparametrisieren. Umwandeln in inhomogene Koordinaten liefert eine Parameterdarstellung einer Geraden, in der Form

$$g_m : \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = \frac{1}{m_0} \cdot \left[ \begin{pmatrix} a_1 a_2 c_2 - c_1 (b + a_2^2 + a_3^2) \\ a_1 a_2 c_1 - c_2 (b + a_1^2 + a_3^2) \\ a_3 (a_1 c_1 + a_2 c_2) \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} a_1 a_3 \\ a_2 a_3 \\ -(b + a_1^2 + a_2^2) \end{pmatrix} \right] \quad (128)$$

**Ergebnis.** *Nach Vorgabe eines Richtungsvektors  $a$  und vier in allgemeiner Lage liegenden komplanaren Punkte  $P_0, P_1, P_2$  und  $P_3$  sind die Drehquadriken bis auf einen freien Parameter  $c_3$  eindeutig bestimmt. Ihre Mitten bewegen sich auf*

einer Geraden  $g_m$  durch den Mittelpunkt des Schnittkegelschnitts  $k$  in der  $xy$ -Ebene in Richtung  $\begin{pmatrix} a_1 a_3 \\ a_2 a_3 \\ -(b + a_1^2 + a_2^2) \end{pmatrix}$ . Dadurch ergibt sich als Lösungsmenge eine einparametrische Schar von Drehquadriken mit der vorgegebenen Achsenrichtung  $a = (a_1, a_2, a_3)^T$ . Die Achsen liegen in einer zur Ebene von  $P_0, P_1, P_2, P_3$  normalen Ebene.

**Beispiel 6.3.** Die Punkte wurden mit den Koordinaten  $P_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $P_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  in der  $xy$ -Ebene angenommen. Die

Achsenrichtung entspricht  $a = (-0.099335, 0.490033, -0.866025)^T$ . Es ergab sich eine einparametrische Lösungsmenge, wobei eine Drehquadrik mit einem festen  $c_3$  festgelegt wurde. Für die Drehquadrik beschreibende  $4 \times 4$ -Matrix ergaben sich folgende Einträge:

$$Q = \begin{pmatrix} 2.3365 & 0.3407 & 0.5355 & c_3 \\ 0.3407 & -0.3585 & -0.0487 & 0.0860 \\ 0.5355 & -0.0487 & -0.1283 & -0.4244 \\ c_3 & 0.0860 & -0.4244 & 0.3816 \end{pmatrix}$$

Als Beispiele sind hier drei Drehquadriken aus dieser einparametrischen Menge ausgewählt und dargestellt.

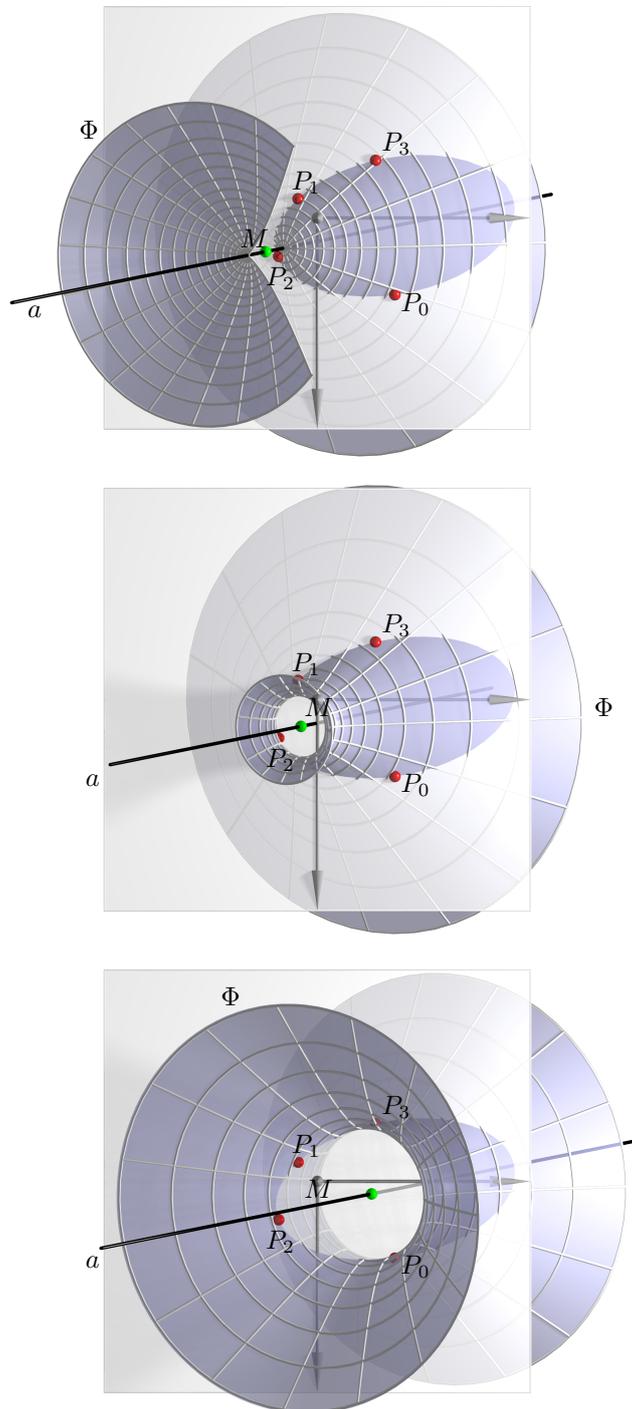


Abbildung 7: Rot dargestellt sind die vier vorgegebenen komplanaren Punkte  $P_0, P_1, P_2, P_3$ . Durch diese laufen eine einparametrische Schar an Drehquadriken mit vorgegebener Achsenrichtung  $a$  (in diesen Abbildungen schwarz dargestellt). Zu sehen sind drei Drehquadriken aus dieser Schar, wobei sich hier für die unterschiedlich gewählten  $c_3$  in ein zweischaliges Drehhyperboloid und zwei einschalige Drehhyperboloide einstellen. 52

Lösungsvariante B)

Eine weitere mögliche Lösungsoption ist Folgende. Um keine Einschränkungen vorzunehmen geht man davon aus, dass der Richtungsvektor  $a$  der Achse nicht normiert sein muss. Man projiziert diesen Richtungsvektor in die  $xy$ -Ebene und erhält für diesen in der  $xy$ -Basisebene die Darstellung  $a^* = (a_1, a_2, 0)^T$ . Dieser abgeänderte Richtungsvektor  $a^*$  schließt mit der  $x$ -Achse einen gewissen Winkel  $\phi$  ein, dessen Tangens exakt dem Verhältnis  $\frac{a_2}{a_1}$  entspricht.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \tan \phi \quad (129)$$

Umformen liefert für

$$\phi = \cot\left(\frac{a_2}{a_1}\right). \quad (130)$$

Andererseits ist, wie man bereits weiß, diese Achsenrichtung in der  $xy$ -Ebene auch die Achsenrichtung des Schnittkegelschnitts  $k$ , welcher entsteht, wenn man die Drehquadrik  $\Phi$  mit der Ebene  $z = 0$  schneidet. Das Kegelschnittsbüschel  $C(\alpha : \beta)$  lässt sich wie oben beschrieben eindeutig, durch die Festlegung der vier komplanaren Punkte, ermitteln und ist von einem inhomogenen Parameter  $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$  abhängig. Aus der Arbeit ([2]) von Hermann Schaal findet man unter der dortigen Gleichung(2), oder auch oben bereits in (56) hergeleitet, den Winkel  $\phi$ , der Achsenrichtungen des eindeutig von  $\lambda$  bestimmten Büschelkegelschnitts  $C(\alpha : \beta)$ . Umformen ergibt für

$$\lambda = \frac{(b_{1,1} - b_{2,2} - 2b_{1,2} \cdot \cot(2\phi))}{1 + k^2} \quad (131)$$

und damit eine eindeutige bis auf Vielfaches abhängige Matrix des Schnittkegelschnitt  $k = \gamma \cdot C(\alpha : \beta)$  in der  $xy$ -Ebene.

Ab hier kann man analog vorgehen wie bei Lösungsvariante A). Allerdings ist zu beachten, dass durch das umwandeln in inhomogener Darstellungsvariante ( $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$ ) bei Hermann Schaal der Faktor  $\gamma = \beta$  entspricht, durch die die Matrix eindeutig bestimmt ist. Durch Gleichsetzen von  $\beta \cdot C(\lambda)$  mit der  $3 \times 3$ -Untermatrix der Matrix  $Q$ , welche den gesuchten Kegelschnitt in der Grundrissebene beschreibt, liefert wieder ein Gleichungssystem mit 6 Gleichungen in 6 Unbekannten  $c_0, c_1, c_2, b, \alpha$  und  $\beta$ .

**Ergebnis.** *Dadurch bleibt für die Bestimmung der Drehquadriken  $\Phi$  mit der Achsenrichtung  $a$ , welche durch eine Matrix  $Q$  beschrieben werden, wiederum nur  $c_3$  als freier Parameter in der Matrix über. Man erhält die gleiche Lösung, wie bei der Vorgangsweise in A).*

## 6.4 Aufgabe 2

In der zweiten Aufgabenstellung seien nun alle Drehquadriken gesucht, welche wiederum durch die vier vorgegebenen komplanaren Punkte  $P_0, P_1, P_2$  und  $P_3$  laufen und einen fixen Mittelpunkt  $M$  besitzen. Es wird sich zeigen, dass es mindestens eine, aber höchstens drei Drehquadriken  $\Phi$  geben wird, die diese Vorgaben erfüllen.

Man beginnt mit einem beliebigen Ansatz für eine Drehquadrik  $\Phi$ , welche durch die  $4 \times 4$ -Matrix  $Q$  aus (117) beschrieben wird. Weiters ist nun ein Mittelpunkt  $M = (m_0, m_1, m_2, m_3)^T$  gegeben, ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit  $m_0 = 1$  für eine leichtere Vorgangsweise beim Nachrechnen. Wir wissen bereits, dass der Mittelpunkt der Drehquadrik der Pol der Fernebene zu dieser Quadrik ist, woraus aus der Bedingung (89) und  $m_0 = 1$  folgt:

$$c_1 = -m_1(a_1^2 + b) - a_1(m_2a_2 + m_3a_3) \quad (132)$$

$$c_2 = -m_2(a_2^2 + b) - a_2(m_1a_1 + m_3a_3) \quad (133)$$

$$c_3 = -m_3(a_3^2 + b) - a_3(m_1a_1 + m_2a_2) \quad (134)$$

Nun setzt man den Teil der Matrix  $Q$ , welcher die Quadrik in  $xy$ -Komponente beschreibt, mit dem Kegelschnittsbüschel  $C(\alpha : \beta)$  gleich und setzt für  $c_1$  und  $c_2$  ein. Man erhält

$$c_0 = \beta b_{0,0} \quad (135)$$

$$-m_1(a_1^2 + b) - a_1(m_2a_2 + m_3a_3) = \beta b_{0,1} \quad (136)$$

$$-m_2(a_2^2 + b) - a_2(m_1a_1 + m_3a_3) = \beta b_{0,2} \quad (137)$$

$$a_1^2 + b = -\alpha k^2 + \beta b_{1,1} \quad (138)$$

$$a_2^2 + b = \alpha + \beta b_{2,2} \quad (139)$$

$$a_1a_2 = \beta b_{1,2} \quad (140)$$

als sechs Gleichungen.

Man betrachtet im Hauptfall, dass die vier komplanaren Punkte kein Kreisviereck bilden und damit  $b_{1,2} \neq 0$  ist. Dadurch kann man  $\beta = \frac{a_1a_2}{b_{1,2}}$  ausdrücken. Für  $c_0$  folgt,  $c_0 = \frac{a_1a_2}{b_{1,2}} \cdot b_{0,0}$ .

Die beiden Parameter  $\alpha$  und  $b$  sind linear in den beiden Gleichung, in denen sie vorkommen, wodurch man durch einsetzen von  $\beta$  auf ein analoges Ergebnis wie in Aufgabe 1) kommt. Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind also für

$$b = \frac{a_1\left(\frac{b_{1,1}}{b_{1,2}}a_2 - a_1\right) + k^2a_2\left(\frac{b_{2,2}}{b_{1,2}}a_1 - a_2\right)}{1 + k^2} \quad (141)$$

und

$$\alpha = \frac{a_1\left(\frac{b_{1,1}}{b_{1,2}}a_2 - a_1\right) - a_2\left(\frac{b_{2,2}}{b_{1,2}}a_1 - a_2\right)}{1 + k^2}. \quad (142)$$

Durch Elimination der Unbekannten  $a_3$  aus den beiden übrig gebliebene Gleichungen erhält man eine homogene kubische Gleichung in  $a_1$  und  $a_2$ .

$$\begin{aligned} & a_1^3(m_2b_{1,2}) \\ & + a_1^2a_2(-b_{1,2}m_1 - b_{0,2}(1 + k^2) - b_{1,1}m_2 - k^2b_{2,2}m_2) \\ & + a_1a_2^2(b_{1,1}m_1 + k^2b_{2,2}m_1 + b_{0,1}(1 + k^2) + k^2b_{1,2}m_2) \\ & + a_2^3(-k^2b_{1,2}m_1) = 0 \end{aligned} \quad (143)$$

Diese gewonnene Gleichung kann man noch durch  $a_2^3$  dividieren und man bekommt eine kubische Gleichung in  $\frac{a_1}{a_2}$ , wie folgt

$$R\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 + S\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 + T\left(\frac{a_1}{a_2}\right) + U = 0 \quad (144)$$

mit

$$\begin{aligned} R &= (m_2 b_{1,2}) \\ S &= (-b_{1,2} m_1 - b_{0,2}(1+k^2) - b_{1,1} m_2 - k^2 b_{2,2} m_2) \\ T &= (b_{1,1} m_1 + k^2 b_{2,2} m_1 + b_{0,1}(1+k^2) + k^2 b_{1,2} m_2) \\ U &= (-k^2 b_{1,2} m_1) \end{aligned} \quad (145)$$

Die kubische Gleichung kann man nun mit der Cardanischen Formel lösen, wobei hier auf einige Fallunterscheidungen geachtet werden muss:

Fall i)

Ist nämlich  $m_2 = 0$ , so folgt daraus, dass  $R = 0$  ist, und wir haben keine kubische Gleichung, sondern eine quadratische Gleichung  $S\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 + T\left(\frac{a_1}{a_2}\right) + U = 0$  zu lösen.

Fall ii)

Ist  $m_1 = 0$  ergibt sich für  $U = 0$  und durch erneute Division der Gleichung durch den Faktor  $\frac{a_1}{a_2}$  wieder eine quadratische Gleichung  $R\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 + S\left(\frac{a_1}{a_2}\right) + T = 0$ , die es zu lösen gilt.

Fall iii)

Liegt der Mittelpunkt auf der  $z$ -Achse, das heißt die beiden Werte lauten  $m_1 = m_2 = 0$ , so liefert das eine lineare Gleichung mit der Lösung  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_{0,1}}{b_{0,2}}$ .

Fall iv)

Die beiden Werte von  $m_1$  und  $m_2$  sind ungleich Null, und es liegt eine Gleichung dritten Grades wie oben beschrieben vor. Da  $R \neq 0$  ist, kann man durch  $R$  dividieren und bekommt  $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 + \frac{S}{R}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 + \frac{T}{R}\left(\frac{a_1}{a_2}\right) + \frac{U}{R} = 0$ . Wir setzen der Einfachheit halber  $s = \frac{S}{R}$ ,  $t = \frac{T}{R}$  und  $u = \frac{U}{R}$  für die nächsten Rechenschritte.

Die nächste Vorgehensweise setzt sich zusammen aus einer Substitution mit  $\frac{a_1}{a_2} = l - \frac{s}{3}$  zur Eliminierung des quadratischen Terms. Dadurch erhält man für die kubische Gleichung

$$l^3 + l\left(-\frac{1}{3}s^2 + t\right) + \left(\frac{2s^3}{27} - \frac{st}{3} + u\right) = 0 \quad (146)$$

mit  $p = \left(-\frac{1}{3}s^2 + t\right)$ ,  $q = \left(\frac{2s^3}{27} - \frac{st}{3} + u\right)$ .

Durch eine weitere Substitution von  $l = v + w$  bekommt man durch Koeffizientenvergleich mit  $l^3 = v^3 + 3vw + w^3$  für die Werte  $v$  und  $w$  die Lösungen

$$\begin{aligned} v &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \text{sqr}t\Delta}, \\ \text{und } w &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \text{sqr}t\Delta} \end{aligned} \quad (147)$$

mit  $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2$  oder auch  $\Delta = \frac{27R^2U^2 + 4S^3U - 18RSTU + 4RT^3 - S^2T^2}{108R^4}$ .

Die drei Lösungen sind dann

$$\begin{aligned} l_1 &= v + w \\ l_2 &= v\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) + w\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) \\ l_3 &= v\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) + w\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) \end{aligned} \quad (148)$$

Das Lösungsverhalten hängt jetzt entscheidend von der Diskriminante  $\Delta$  ab. Um die Achsenrichtungen berechnen zu können, interessieren einen nur die reellen Lösungen, für welche auch eine eindeutige Matrix  $Q$  bestimmt werden kann, durch die die gesuchte Drehquadrik  $\Phi$  beschrieben ist. Hier sind wieder Fallunterscheidungen durchzuführen, um auf die Anzahl der reellen Lösungen zu kommen:

Im Fall  $\Delta > 0$  existiert genau eine reelle Lösung  $\frac{a_1}{a_2} = v + w - \frac{S}{3R}$ .

Liegt der Fall  $\Delta = 0$  und  $p = 0$  vor, existiert eine dreifache reelle Lösung  $\frac{a_1}{a_2} = -\frac{S}{3R}$ .

Gilt wiederum  $\Delta = 0$ , aber  $p \neq 0$ , so erhält man eine einfache und eine doppelte reelle Lösung mit  $(\frac{a_1}{a_2})_1 = \frac{3q}{p} - \frac{S}{3R}$ ,  $(\frac{a_1}{a_2})_2 = -\frac{3q}{2p} - \frac{S}{3R}$ .

Im letzten Fall ist  $\Delta < 0$ , was auf drei reelle Lösungen führt, die wie folgt aussehen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)_1 &= \sqrt{-\frac{4}{3}p} \cdot \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}\right)\right) - \frac{S}{3R}, \\ \left(\frac{a_1}{a_2}\right)_2 &= -\sqrt{-\frac{4}{3}p} \cdot \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}\right) + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{S}{3R}, \\ \left(\frac{a_1}{a_2}\right)_3 &= -\sqrt{-\frac{4}{3}p} \cdot \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}\right) - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{S}{3R} \end{aligned} \quad (149)$$

Hat man nun die reellen Lösungen für das Verhältnis  $\frac{a_1}{a_2}$ , die mögliche Achsenrichtungen in der  $xy$ -Ebene beschreiben, so kann man die Achsen eindeutig bestimmen. Hier wird die Eigenschaft von Satz 3.22 ausgenutzt, wodurch man einen eindeutigen Kegelschnitt des Büschels mit Achsenrichtung  $\frac{a_1}{a_2}$  bestimmen kann. Diese einparametrische Schar an Drehquadricken durch diesen Büschelkegelschnitt schenkt sich durch die Vorgabe des Mittelpunkts ein. Da die Achsenrichtung allerdings nur vom Verhältnis der beiden Variablen  $a_1, a_2$  abhängt, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$a_2 = 1 \quad (150)$$

setzen.

Dementsprechend ist dann

$$\Rightarrow a_1 = l_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (151)$$

für  $l_i \in \mathbb{R}$  und dann folgt für

$$a_3 = -\frac{a_1^2 b_{1,2} m_1 m_2 - a_1 a_2 b_{1,2} m_1^2 + a_1 a_2 b_{1,2} m_2^2 - a_2^2 b_{1,2} m_1 m_2 + a_1 a_2 b_{0,1} m_2 - a_1 a_2 b_{0,2} m_1}{b_{1,2} m_3 (a_1 m_2 - a_2 m_1)}. \quad (152)$$

**Beispiel 6.4.** Für die vier komplanaren Punkte wurden diesmal die Werte  $p_0 = 4, p_1 = -1, p_2 = 2, p_3 = -3$  und  $k = 1$  angenommen. Der gegebene Mittelpunkt hat die homogenen Koordinaten  $M = (1, 2, -3, 3.5)^T$ .

Es wurden drei mögliche Achsenverhältnisse  $\frac{a_1}{a_2}$  ermittelt, und durch Rückeinsetzen die zugehörigen Quadriken berechnet. Diese Lösungsquadriken sind in den folgenden Bildern dargestellt. Die vier komplanaren Punkte  $P_0, P_1, P_2$  und  $P_3$  sind als rote Kugeln dargestellt. Die Träger Ebene von  $P_0, P_1, P_2, P_3$  wurde als

Rechteck angedeutet. Der Mittelpunkt (grün) und die Rotationsachse (schwarz) sind ebenfalls angedeutet.

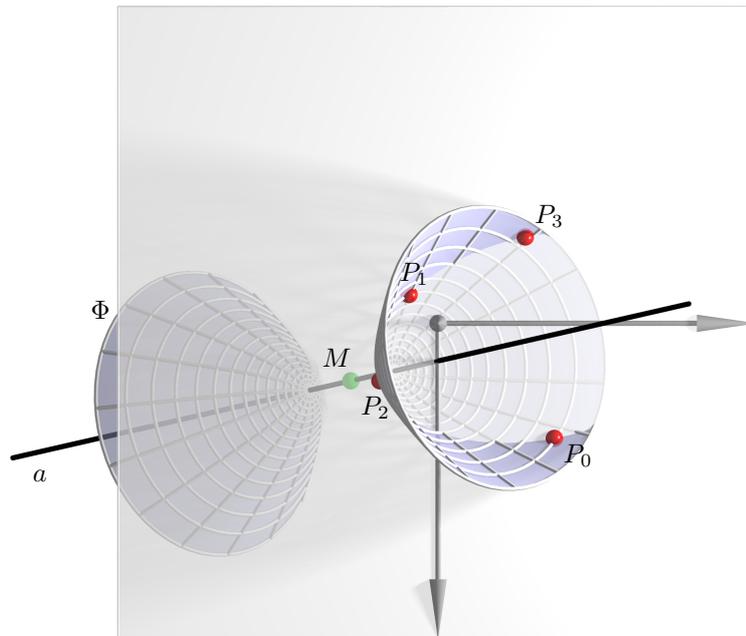


Abbildung 8: Die erste mögliche Lösungsdrehquadrik bei vorgegebenen Mittelpunkt durch die vier komplanaren Punkte. Hier stellt sich ein zweischaliges Drehhyperboloid ein.

Als Achsenverhältnis ergab sich  $\frac{a_1}{a_2} = -4.3400$ , wodurch sich für die Drehquadrik  $\Phi$  folgende Matrix einstellte:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 208.3201 & 30.3800 & 47.7400 & 56.7663 \\ 30.3800 & -30.6178 & -4.3400 & -5.0959 \\ 47.7400 & -4.3400 & -12.7822 & 22.1162 \\ 56.7663 & -5.0959 & 22.1162 & -5.6497 \end{pmatrix}$$

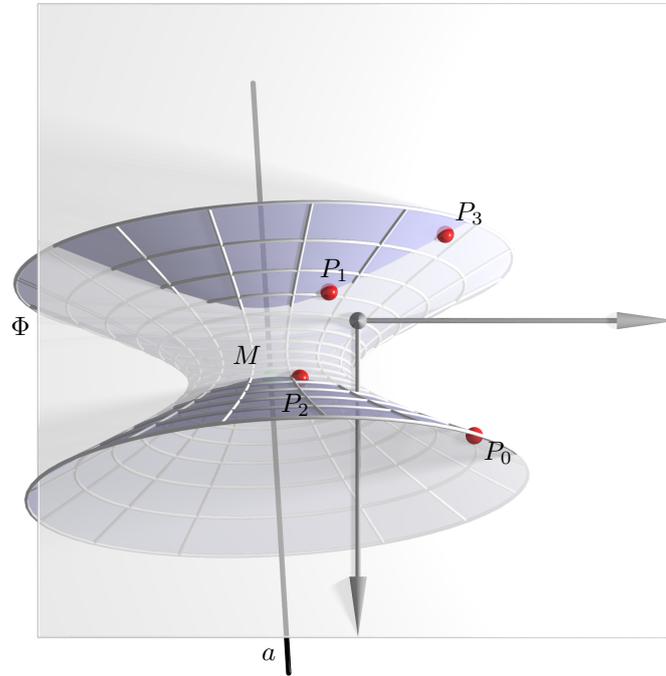


Abbildung 9: Als zweite mögliche Lösungsdrehquadrik bei vorgegebenen Mittelpunkt durch die vier komplanaren Punkte entstand ein einschaliges Drehhyperboloid.

Hier ergab sich als Achsenverhältnis die Lösung  $\frac{a_1}{a_2} = 8.2529$ . Durch Rückeinsetzen erhält man die Matrix  $Q_2$  der Lösungsquadrik  $\Phi$  mit

$$Q_2 = \begin{pmatrix} -2.8701 & -0.4186 & -0.6577 & -0.9445 \\ -0.4186 & 0.7972 & 0.0598 & 0.2847 \\ -0.6577 & 0.0598 & -0.1992 & 0.0170 \\ -0.9445 & 0.2847 & 0.0170 & -0.1218 \end{pmatrix}$$

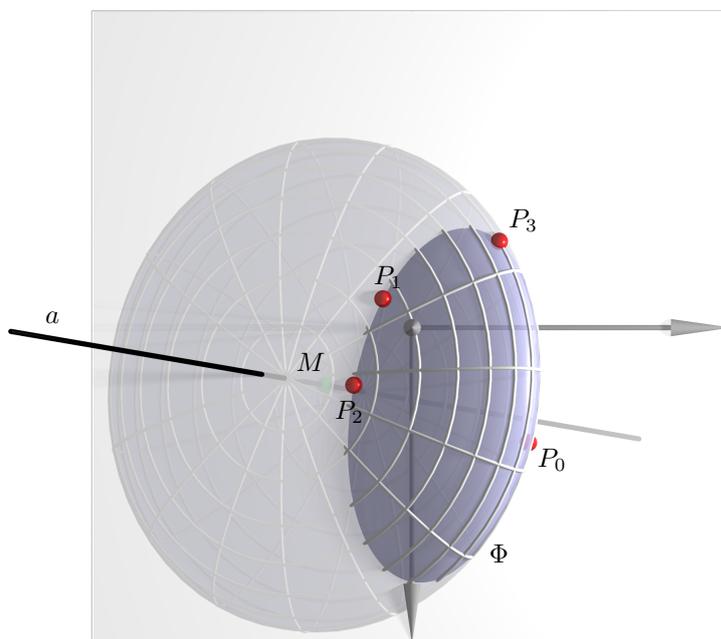


Abbildung 10: Für die dritte mögliche Lösungsdrehquadrik bei vorgegebenen Mittelpunkt durch die vier komplanaren Punkte enthielt man in diesem Beispiel ein Drehellipsoid.

Für die Matrix  $Q_3$  ergab sich durch das Achsenverhältnis  $\frac{a_1}{a_2} = 5.7802$  die Darstellung

$$Q_3 = \begin{pmatrix} -277.4500 & -40.4615 & -63.5823 & 199.0085 \\ -40.4615 & 12.6956 & 5.7802 & -9.2602 \\ -63.5823 & 5.7802 & 45.1064 & -53.5261 \\ 199.0085 & -9.2602 & -53.5261 & 97.4475 \end{pmatrix}$$

**Ergebnis.** Dadurch sind alle Parameter  $c_0, c_1, c_2, c_3, a_1, a_2, a_3$  und  $b$  eindeutig bestimmt und man bekommt abhängig von der Anzahl verschiedener reeller Lösungen bis zu drei verschiedenen Drehquadriken, welche durch die vier in allgemeiner Lage liegenden komplanaren Punkte  $P_0, P_1, P_2$  und  $P_3$  laufen und den gleichen Mittelpunkt  $M$  besitzen.

Auch zu erkennen ist die Anzahl der Lösungen durch die Eigenschaft der Hüllkurve in der  $xy$ -Ebene (siehe Satz 3.22). Durch Projektion des Mittelpunkts in die  $xy$ -Ebene kann man aus diesem Punkt bis zu drei Tangenten an die Hüllkurve vierter Ordnung dritter Klasse legen, wodurch man bis zu drei Achsenrichtungen für die zugehörigen Bündelkegelschnitte bekommt.

## 6.5 Sonderfall

In obigen beiden Fällen wurde jeweils der Hauptfall, dass die vier vorgegebenen komplanaren Punkte  $P_0, P_1, P_2$  und  $P_3$  nicht auf einem Kreis liegen und damit  $b_{1,2} \neq 0$  ist, untersucht. In diesem Abschnitt der Arbeit sollen hingegen die Auswirkungen von  $b_{1,2} = 0$  auf die weiteren möglichen Lösungen betrachtet werden, und welchen Einfluss, dieses Kreisviereck auf die Lösungsmenge der möglichen Drehquadriken hat.

### 6.5.1 Sonderfall zur Aufgabe 1

Aufgrund der Vorgabe, dass die vier komplanaren Punkte  $P_0, P_1, P_2, P_3$  ein Kreisviereck bilden und dementsprechend  $b_{1,2} = 0$  ist, macht die Vorgabe einer beliebigen Achsenrichtung keinen Sinn. Diese muss nach (3.8) in einer Ebene parallel zur  $xz$ -Ebene oder  $yz$ -Ebene liegen.

### 6.5.2 Sonderfall zur Aufgabe 2

Analog zum ersten Sonderfall bilden die vier komplanaren Punkte  $P_0, P_1, P_2$  und  $P_3$  ein Kreisviereck, und dementsprechend sei  $b_{1,2} = 0$ . Durch Festlegen eines Mittelpunktes  $M = (m_0, m_1, m_2, m_3)^T$ , wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $m_0 = 1$  gilt, kann man erneut wie im Hauptfall beginnen.

Nach Gleichsetzen der  $3 \times 3$ -Untermatrix von  $Q$  mit dem Kegelschnittsbüschel  $C(\alpha : \beta)$  führt das auf sechs Gleichungen, wobei

$$a_1 a_2 = 0 \quad (153)$$

ist. Daraus folgt sofort wieder, dass die Drehachse der zu bestimmenden Drehquadrik in einer Ebene parallel zur  $xz$ -Ebene oder  $yz$ -Ebene liegt und einer der beiden Werte  $a_1 = 0$  oder  $a_2 = 0$  sein muss. Weiters muss der Mittelpunkt ebenfalls in dieser Ebene liegen.

Sei der Fall betrachtet mit  $a_1 = 0$  und  $a_2 \neq 0$ . Dann können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $a_2 = 1$  setzen, da es nur auf das Verhältnis  $\frac{a_2}{a_3}$  ankommt. Es ergeben sich dann die Gleichungen:

$$c_0 = \beta b_{0,0} \quad (154)$$

$$-m_1 b = \beta b_{0,1} \quad (155)$$

$$-m_2 - b - m_3 a_3 = \beta b_{0,2} \quad (156)$$

$$b = -\alpha k^2 + \beta b_{1,1} \quad (157)$$

$$1 + b = \alpha + \beta b_{2,2} \quad (158)$$

Die Gleichungen (155), (157) und (158) liefern ein lineares Gleichungssystem in  $\alpha, \beta$  und  $b$ . Löst man dieses Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & b_{0,1} & m_1 \\ k^2 & -b_{1,1} & 1 \\ 1 & b_{2,2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (159)$$

mit der Cramerschen-Regel bekommt man für die Determinante der  $3 \times 3$ -Matrix des Gleichungssystem

$$\Delta = b_{0,1} + k^2 m_1 b_{2,2} + m_1 b_{1,1} + k^2 b_{0,1} = (1 + k^2) b_{0,1} + m_1 (k^2 b_{2,2} + b_{1,1}). \quad (160)$$

Diese Matrix ist nur im Fall, dass  $m_1 = n_1$  aus (38) singular.

Lösen des linearen Gleichungssystems liefert für  $\Delta \neq 0$  folgende Ergebnisse:

$$\alpha = \frac{b_{1,1} m_1 + b_{0,1}}{\Delta} \quad (161)$$

$$\beta = \frac{k^2 m_1}{\Delta} \quad (162)$$

$$b = \frac{k^2 b_{0,1}}{\Delta} \quad (163)$$

Und durch Einsetzen in (154) und (156):

$$c_0 = \frac{k^2 b_{0,0} m_1}{\Delta} \quad (164)$$

$$a_3 = \frac{m_1 m_2 (b_{1,1} + k^2 b_{2,2}) + k^2 b_{0,2} m_1 + b_{0,1}}{m_3 \Delta} \quad (165)$$

Die ausständigen Variablen  $c_1, c_2, c_3$  bekommt man aus der Bedingung (89). Der Fall  $a_2 = 0$  und  $a_1 \neq 0$  kann mit selbiger Vorgehensweise gelöst werden und führt auf ein analoges Ergebnis.

**Ergebnis.** *Im Sonderfall eines Kreisvierecks der vier komplanaren Punkte  $P_0, P_1, P_2, P_3$  bekommt man mit einem vorgegebene Mittelpunkt eine eindeutige Drehquadrik  $\Phi$  als Lösung, sofern die  $x$ -Koordinate von  $M$  im Fall  $a_1 = 0$  und die  $y$ -Koordinate von  $M$  im Fall  $a_2 = 0$  nicht der  $x$ -Koordinate beziehungsweise  $y$ -Koordinate des Mittelpunkte des Büschelkreises entspricht. Sonst kann keine Drehquadrik mit diesem Mittelpunkt gefunden werden.*

*Durch die Vorgabe des Kreisvierecks sind die Richtungsachsen aller Kegelschnitte des Büschels orthognal zu zwei festen Richtungen. Die Mittelpunkte der Kegelschnitte des Büschels verlaufen auf einer gleichseitigen Hyperbel. Durch Projektion des vorgegebenen Mittelpunkts der Drehquadrik in die  $xy$ -Ebene und zugehöriger Achsenrichtung schneidet diese Gerade die Hyperbel auf der Mittelpunkte verlaufen in einem Punkt (sofern wie oben erwähnt, die  $x$ - beziehungsweise  $y$ -Koordinate des Drehquadrikenmittelpunkts nicht die  $x$ - beziehungsweise  $y$ -Koordinate des Büschelkreises ist), wodurch ein eindeutiger Büschelkegelschnitt und somit eindeutige Drehquadrik ermittelt werden kann.*

Tritt sogar der Fall  $a_1 = a_2 = 0$  ein, dann muss der Mittelpunkt  $M$  der Drehquadrik  $\Phi$  auf der Rotationsachse  $a_k$  des Büschelkreises gewählt werden, da es ansonsten keine Lösung geben kann. Zu jeder Wahl des Mittelpunktes der Drehquadrik gibt es dann eine einparametrische Menge an Lösungen. Durch den Mittelpunkt und die Achse ist die Drehquadrik  $\Phi$  in diesem Fall noch nicht eindeutig bestimmt. Da die Drehquadrik durch Rotation einer Kurve zweiter Ordnung entsteht, muss diese Kurve zweiter Ordnung in der  $xz$ -Ebene bezüglich der Achse  $a_k$  symmetrisch sein und  $M$  als Mittelpunkt besitzen und durch die Umrisse des Büschelkreises verlaufen. Allerdings besitzt dadurch die Kurve zweiter Ordnung noch einen Freiheitsgrad, und durch wählen eines weiteren beliebigen Punktes in dieser Ebene ist die Kurve zweiter Ordnung dann eindeutig festgelegt. Dann ist auch die Drehquadrik eindeutig festgelegt.

**Ergebnis.** *Im Sonderfall, dass die Achsenrichtung der  $z$ -Achse entspricht, muss der Mittelpunkt auf der Achse des Büschelkreises  $a_k$  liegen. Dann ergibt sich eine einparametrische Lösungsmenge an Drehquadriken durch die vier komplanaren Punkte mit diesem Mittelpunkt  $M$ .*

### 6.5.3 Aufgabe 2 mit vorgegebenen Trapez

Tritt der Sonderfall ein, dass das Grundviereck  $P_0, P_1, P_2, P_3$  ein Trapez mit parallelen Seiten  $P_0P_2, P_1P_3$  bildet, so kann man wie oben in Aufgabe 2 vorgehen. Allerdings zerfällt dabei das kubische Polynom in  $a_1 : a_2$  aus Gleichung (143) in einen homogenen linearen Teil  $q_1$  und einen homogenen quadratischen Teil  $q_2$ , sodass man beide Polynome aus  $q_1 \cdot q_2 = 0$  untersuchen muss.

$$q_1 = (p_0 - p_2)a_1 + k(p_0 + p_2)a_2 \quad (166)$$

$$q_2 = m_2(p_0 + p_2)a_1^2 + ((1 + k^2)(\varepsilon + 1)p_0p_2 + km_2(p_0 - p_2) - m_1(p_0 + p_2))a_1a_2 - km_1(p_0 - p_2)a_2^2 \quad (167)$$

Die Nullstellen des Polynoms  $q_1$  liefern nur Lösungen, welche auf  $b = 0$  führen. Wir wissen allerdings bereits aus Bemerkung (5.4), dass das auf parabolische Zylinder oder Ebenenpaare führt, und nicht auf Drehquadriken.

Betrachtet man allerdings die Nullstellen des Polynoms  $q_2$ , so können 0, 1 oder 2 reelle Lösungen vorkommen. Durch die Eigenschaft aus Satz 3.27 wissen wir, dass man an diese Hüllkurve bis zu zwei Tangenten legen kann. Dadurch ergeben sich bis zu zwei Achsenverhältnisse  $\frac{a_1}{a_2}$  wodurch die zugehörigen Kegelschnitte aus dem Büschel bestimmt sind. Nach Bestimmung dieser kann man die restlichen Größen  $\alpha, \beta, b, c_0$  und  $a_3$  wiederum linear berechnen.

**Ergebnis.** *Im Sonderfall mit vorgegebenen Trapez erhält man durch die Vorgabe des Mittelpunkts der Drehquadrik durch die Eigenschaft, dass die Hüllkurve der Achsen des Kegelschnittsbüschels erster Art eine Parabel ist, bis zu zwei Lösungsquadriken durch die vier Punkte mit diesem Mittelpunkt.*

## 7 Zusammenfassung

Abschließend möchte ich die wichtigsten von mir gewonnenen Ergebnisse noch einmal dem Leser/der Leserin aufzeigen.

Wir haben erkannt, dass man durch vier beliebige Punkte  $P_0, P_1, P_2$  und  $P_3$  allgemeiner Lage in einer Ebene, ein Kegelschnittsbüschel ermitteln kann, dass nur von einem Büschelparameter  $\alpha : \beta$  abhängig ist. Durch das Fixieren dieses Parameter, wird ein einzelner Kegelschnitt  $k$  mit der  $3 \times 3$ -Matrix  $C(\alpha : \beta)$  beschrieben, der natürlich durch die vier vorgegebenen Punkte läuft. Das genau ein freier Parameter  $\alpha : \beta$  zur Festlegung eines Kegelschnitts zur Auswahl steht bedeutet, dass durch die vier komplanaren Punkte eine einparametrische Schar an Kegelschnitten verläuft.

Für eine einzelne reguläre Kurve zweiter Ordnung kann man einen Mittelpunkt und seine Achsenrichtungen der Hauptscheitelachse und Nebenscheitelachse berechnen. Diese Berechnung wurde für das von  $\alpha : \beta$  abhängige Kegelschnittsbüschel erweitert. Die erzielten Ergebnisse führten zu dem Schluss, dass die Mittelpunkte der Kegelschnitte des Büschels im allgemeinen Fall sich wieder auf einer Kurve zweiter Ordnung bewegen (Im Fall eines konvexen Grundvierecks auf einer Hyperbel und im Fall eines nicht-konvexen Vierecks auf einer Ellipse). Es können je nach Lage der vier vorgegebenen Punkte allerdings auch eine Gerade oder ein Punkt als Mittelpunktsort aller Kegelschnitte des Büschels auftreten.

Desweiteren wussten wir bereits, dass die Achsen der Kegelschnitte des Büschels im allgemeinen Fall eine Kurve vierter Ordnung dritten Grades umhüllen, und die Ferngerade in zwei Fernpunkten berühren (aus [1]). Zusätzlich wurde auf den Spezialfall eingegangen, wenn die vier komplanaren Punkte ein allgemeines Trapez bilden. Es stellte sich heraus, dass dabei die Hüllkurve der Achse eine Parabel ist.

Davor wurden zudem noch die Auswirkungen des Kreisvierecks auf die Einträge der Matrix des Kegelschnittsbüschel und die Achsenrichtungen der Kegelschnitte des Büschels untersucht. Dabei stellte sich heraus, dass diese in dieselbe Richtung verlaufen, in der auch die beiden Achsen der beiden Parabeln des Büschels zeigen.

Im zweiten Teil meiner Arbeit wurde dann konkret nach der Menge aller Drehquadriken durch vier komplanare Punkte gesucht. Dabei wurden Quadriken und Drehquadriken zuerst definiert und klassifiziert. Es wurde zudem aufgezeigt, wie man den Mittelpunkt einer Drehquadrik berechnet. Danach untersuchte ich mit Hilfe der Arbeit die Menge der Drehquadriken durch einen einzelnen Kegelschnitt. Otto Röschel kam 1994 zu dem Schluss, dass sich durch einen festen Kegelschnitt in Hauptlage eine zweiparametrische Menge an Drehflächen zweiter Ordnung legen lässt, die diesen Kegelschnitt beinhalten (aus [5]).

In weiterer Folge untersuchte ich alle Drehkegel und Drehzylinder durch einen Kegelschnitt. Diese Problematik ließ sich durch die zugehörigen Fokalkegelschnitte lösen, und Hermann Schaal lieferte in einer seiner Arbeiten auch eine Parametrisierung der Drehkegel und -zylinder nach deren Achsenrichtungen (aus [2], [3]).

Nach Zusammenfügen dieser verschiedenen Teilbereiche war es möglich, alle Drehquadriken zweiter Ordnung durch vier vorgegebene komplanare Punkte zu finden. Durch Transformieren jedes einzelnen regulären Büschelkegelschnitts in Hauptlage, konnte die Menge der Drehquadriken durch diesen Kegelschnitt ge-

gefunden werden. Durch Festlegen aller noch frei wählbaren Parameter hat man die eindeutige Darstellung einer Drehquadrik erhalten, die sich allerdings noch nicht in richtiger Position befand. Da man die gefundene Darstellung durch die  $4 \times 4$ -Matrix der Quadrik nicht rücktransformieren kann, gibt es die Möglichkeit die Punkte, die auf der Drehquadrik liegen in ihre Ausgangsposition zurück zu bringen.

Mit fünf in allgemeiner Lage befindlichen Punkten, die vor ihrer Drehung und Schiebung auf einer Drehquadrik lagen, welche den Kegelschnitt in Hauptlage beinhaltet, kann man das Gleichungssystem für eine bekannte Achsenrichtung in den fünf Unbekannten  $c_0, c_1, c_2, c_3$  und  $b$  nach der Methode aus [7] lösen, wodurch man eine eindeutige Drehquadrik ermitteln kann.

Das heißt, es lässt sich eine dreiparametrische Menge an Drehquadricken durch vier in allgemeiner Lage liegende komplanare Punkte  $P_0, P_1, P_2$  und  $P_3$  finden, da es eine einparametrische Menge an Kegelschnitten des Büschels gibt, durch welchen man je eine zweiparametrische Menge an Drehquadricken legen kann.

Im Anschluss habe ich noch die Auswirkungen auf die Anzahl der Lösungsmenge der möglichen Drehquadricken aufgezeigt, wenn eine Achsenrichtung oder ein Mittelpunkt vorgegeben sind. Im ersteren Fall führte das Festlegen der Achsenrichtung auf eine einparametrische Menge an Drehquadricken durch vier komplanare Punkte. Im zweiten Fall lieferte uns das Festlegen des Mittelpunkts der Drehquadrik drei mögliche Drehquadricken durch die vorgegebenen Punkte mit diesem Mittelpunkt. Außerdem wurden die Sonderfälle Kreisviereck und Trapez für vorgegebenen Mittelpunkt betrachtet, wobei bei unterschiedlichen Voraussetzungen im Fall des Kreisvierecks keine, eine eindeutige oder eine einparametrische Menge an Drehquadricken gefunden werden konnte. Beim Trapez zeigte sich, dass bis zu zwei mögliche Drehquadricken ermittelt werden können, sofern man die Fälle parabolische Zylinder und Ebenenpaare ausschließt.

## Literatur

- [1] E. Laguerre. Sur la courbe enveloppée par les axes des coniques qui passent par quatre points donnés et sur les axes des surfaces de révolution du second ordre qui passent par cinq points donnés. Sur les lignes spiriques. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1879.
- [2] Hermann Schaal. Die Drehkegel durch vier komplanare Punkte. *Österreichische Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Sonderdruck aus Sitzungsberichte, Abt. II, Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften, Band 201, Heft 1-10*, 1992.
- [3] Hermann Schaal. Konstruktion der Drehzylinder durch vier Punkte einer Ebene. *Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Klasse, Abt. II, 195. Band, 4.-7. Heft*, 1986.
- [4] Ulrich Strobel. *Die Drehkegel durch vier Punkte*. Mathematisches Institut der Universität Stuttgart, 1990.
- [5] Otto Röschel. Drehflächen zweiter Ordnung durch einen Kegelschnitt. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 29*, 379-386, 1994.
- [6] A. Narasinga Rao. Quadrics of Revolution through a Given Conic. *J. Ind. Math. Soc.*17, 213-222, 1928.
- [7] Paul J. Zsombor-Murray und Anton Gfrerrer. Quadrics of revolution on given points. *Journal of Geometry and Graphics, Volume 13 (2009), No.2*, 131-144, 2009.
- [8] Strubecker K. Einführung in die höherer Mathematik, Band 1 Grundlagen. *Oldenbourgh Verlag München*, 1956.