

Inv. N. 292 DG4

Das Problem der vier Punkte im Sinne der neueren Geometrie.

Von **Wilh. Binder,**

Professor an der n. ö. Landes-Oberreal- und Maschinenschule zu Wr.-Neustadt.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. Februar 1881.)

1. Die wichtige Rolle, welche das vorgelegte Problem in der praktischen Geometrie (Geodäsie, Navigation etc.) spielt, ist Ursache, dass seit Willebrord Snellius und Pothenot, welch' letzterer im Jahre 1692 in den Memoires de l'Acad. roy. de sciences eine Auflösung zuerst bekannt machte, unter Anderem die bedeutendsten Mathematiker sich mit der Lösung dieses an und für sich elementaren Problems befassten und dadurch Anlass zu interessanten wissenschaftlichen Erörterungen genommen haben.

Seit 25 Jahren jedoch, als Herr Prof. Dr. Anton Winckler in den Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissensch.¹ eine indirecte Methode für das Stationiren mit dem Messtische mittheilte, sind unseres Wissens keine neuen Auflösungen dieses berühmten Problems veröffentlicht worden, welche eine praktische Anwendung erfahren hätten. Es dürfte übrigens die Winckler'sche Methode in Betreff der Einfachheit und Sicherheit des zu erzielenden Resultates für den geübten Geometer von keiner der bekannten indirecten Methoden erreicht werden.

Von den directen Methoden der Orientirung des Messtisches aus drei Punkten ist zumeist diejenige von Bohnenberger-Bessel im Gebrauche. Dieselbe leidet aber, je nach der gegebenen Situation, an Übelständen, deren Beseitigung entweder umständlich oder unmöglich ist.

¹ XV. Bd., II. Heft der natur-wissensch. Classe, Jahrg. 1855.

Die vorliegende Abhandlung hat den Zweck, eine Auflösungsmethode des Pothenot'schen Problems als Messtischoperation zu zeigen,¹ bei welcher Methode die bekannten Übelstände des Bohnenberger - Bessel'schen Verfahrens zum grössten Theile vermieden werden.

2. Die Aufgabe des Stationirens oder Rückwärtseinschneidens ist gewöhnlich so gestellt, dass (Fig. 1) man aus der bekannten Position dreier Punkte A^* , B^* , C^* in der Natur, sowie derjenigen ihrer entsprechenden, auf dem Messtischblatte gegebenen Punkte A , B , C die Lage eines vierten Punktes D auf dem Tischblatte so ermitteln soll, dass derselbe jenem Punkte D^* in der Natur entspricht, über welchen man sich mit dem Messtische aufgestellt hat. Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Lage des Punktes D , als gemeinsamer Scheitel jener Visurwinkel μ , ν , welche den Seiten \overline{AB} , \overline{BC} im Vierecke $(ABCD)$ gegenüberliegen, gegeben ist, und dass die Ecken des Viereckes $(ABCD)$ nicht auf einem Kreise liegen.

Bekanntlich gründet sich das Rückwärtseinschneiden nach Bohnenberger-Bessel auf die Lösung des Problems der vier Punkte von Tobias Mayer. Statt nun, wie dort, die den Seiten \overline{AB} , \overline{BC} gegenüberliegenden $\sphericalangle \mu$, ν mit ihren Scheiteln nach C und A an die Seite $\overline{AC} = g$ zu übertragen, wollen wir diese Winkel so übertragen, dass dieselben allerdings die Gerade g als gemeinsamen Schenkel besitzen, die beiden anderen Schenkel der übertragenen $\sphericalangle \mu'$, ν' jedoch den Punkt B gemeinsam enthalten, und übrigens ihren Seiten AB , BC , wie ursprünglich, gegenüberliegend verbleiben.

Dieses Übertragen der $\sphericalangle \mu$, ν nach μ' , ν' auf dem Messtischblatte kann ähnlich, wie nach Bohnenberger-Bessel, durch Desorientirungen des Tisches ausgeführt werden, indem die Gerade g einmal nach dem Signale A^* und das andere Mal nach dem Signale C^* orientirt wird, in beiden Fällen, aber abweichend von dem Verfahren Bohnenberger-Bessel, die Rayons auf dem Tischblatte durch den Punkt B gezogen werden.

¹ Deren Grundzüge der Verfasser in einem in der Classensitzung der kais. Akad. d. Wiss. am 4. Nov. 1880 gehaltenen Vortrage auseinander zu setzen Gelegenheit hatte.

Unter dieser Voraussetzung erscheint nach einem bekannten Elementarsatze der Scheitel A_1 des übertragenen $\sphericalangle \mu'$ auf einem Kreise $k^{(1)}$, welcher Kreis die Punkte A, B , und der Scheitel C_1 des übertragenen $\sphericalangle \nu'$ auf einem Kreise $k^{(2)}$, welcher die Punkte B, C enthält.

3. Die gedachten Kreise $k^{(1)}, k^{(2)}$, auf deren graphische Bestimmung wir jedoch a priori verzichten können, betrachten wir als Individuen eines Kreisbüschels K mit einer reellen gemeinschaftlichen Sekante o , welche demnach den Punkt B und den zu suchenden Punkt D des Problems enthält.

Dieser Kreisbüschel K wird von der Transversalen g in einem involutorischen Punktensysteme getroffen, von welchem wir zwei Paare conjugirter Punkte AA_1, CC_1 kennen, und dessen Centralpunkt O offenbar ein Bestimmungselement der Sekante $\overline{BD} = o$ bildet.

Für die Ausmittlung des Centralpunktes O verwenden wir die folgende von J. Steiner¹ angegebene Linear-Construction (Fig. 2).

Man ziehe nach dem zu O conjugirten Punkte O_∞ der Geraden g eine beliebige Gerade² g' ($\parallel g$), wähle auf derselben willkürlich zwei Hilfspunkte M, N und verbinde dieselben mit den Punkten der Paare AA_1, CC_1 ; sodann suche man die Schnitte

$$(\overline{MA}, \overline{NC}) = P; (\overline{MC_1}, \overline{NA_1}) = Q$$

und ferner den Schnitt

$$(\overline{PQ}, \overline{AC}) = O.$$

Mit der Auffindung des Centralpunktes O ist die Sekante $\overline{BO} = o$ des Kreisbüschels K ihrer Richtung und Lage nach unzweifelhaft bestimmt, und somit wäre dadurch für die Messtischpraxis, indem diese Gerade o als Orientierungslinie zur Ermittlung des in ihr liegenden Punktes D mittelst Seitwärtsabschneiden auf bekannte Weise benützt werden kann, das vorliegende Problem als gelöst zu betrachten.

¹ Vergl. Dr. H. Schröter, Theorie der Kegelschnitte, pag. 66.

² Das Ziehen einer solchen Geraden wird einfach mit der Parallelkante des Diopter- oder des Libellenlineals vorgenommen.

So weit würde sich das bis jetzt eingehaltene Verfahren in der Erzielung des Resultates von demjenigen Bohnenberger-Bessel nicht wesentlich unterscheiden, ausgenommen des Vortheiles, dass der nach unserem Verfahren gefundene „Hilfspunkt O “ immer auf der Fläche des Tischblattes erhalten wird.

4. Versuchen wir, die oben angeführte Steiner'sche Construction allgemeiner zu gestalten, so lässt sich dieselbe folgend präcisiren (Fig. 2):

„Legt man durch die Hilfspunkte M, N als Centra zwei Strahlensysteme, welche dem auf der Geraden g erhaltenen Punktsysteme perspectivisch sind; wählt man ein beliebiges Paar nicht conjugirter Elemente des einen Strahlensystems und sucht im anderen Systeme dasjenige Paar, dessen Elemente den perspectivisch entsprechenden Elementen des ersteren Paares conjugirt sind; ermittelt man ferner zwischen diesem Strahlenquadrupel die Schnitte jener Strahlenpaare, in welchen jedem der eine Strahl dem einen, der andere Strahl dem andern Systeme angehören und zwar derartig, dass sich immer ein Strahl mit demjenigen schneidet, welcher dem perspectivisch entsprechenden Strahle des ersteren nicht conjugirt ist; so erhält man für je ein Strahlenquadrupel ein Paar Schnittpunkte PQ , etc., deren Verbindungslinien identisch durch den Centralpunkt O des auf g befindlichen Punktsystemes gehen.“

Der Nachweis für die Richtigkeit dieser Construction ist dadurch gegeben, dass die veränderlichen Punktenpaare PQ , etc. mit dem fixen Punktenpaare MN jedesmal ein Viereck bilden, dessen je drei Gegenseitenpaare von der Geraden g identisch, in sechs Punkten einer Involution getroffen werden.

Indem das auf g befindliche Punktsystem sich aus zwei Paaren AA_1, CC_1 von conjugirten Punkten constituirt, ergibt sich für unsere Aufgabe, dass wir den Centralpunkt O nach demselben Principe auf vierfachem Wege zu ermitteln im Stande sind, wie dieses aus der Fig. 2 ersehen werden kann.

5. Die Verbindungslinien des Punktes B mit den Elementen der involutorischen Punktenreihe in g constituiren ein Strahlensystem, für welches, wenn man dessen einzelne Elemente

analog den in ihnen liegenden Punkten der Reihe g mit den gleichen kleinen Buchstaben anschreibt, die Relation gilt:

$$\frac{\sin(ao)\sin(ao_\infty)}{\sin(ac)\sin(ac_1)} = \frac{\sin(a_1o)\sin(a_1o_\infty)}{\sin(a_1c)\sin(a_1c_1)}.$$

Mit Hilfe dieses in B entstehenden Strahlensystems sind wir aber im Stande, die Orientirungslinie o ($= \overline{BD}$) ihrer Lage nach unmittelbar zu construiren; denn nehmen wir die fixen Constructionspunkte (M, N) als Durchschnittspunkte zwischen der willkürlich gewählten Geraden $g' (\parallel g)$ mit einem beliebigen der vier möglichen Paare nicht conjugirter Elemente des Strahlensystems B an, so coincidirt für jeden der vier Constructionsfälle der eine der veränderlichen Viereckspunkte PQ , etc. mit dem Centrum B , während der andere dieser Punkte in jedem Falle sich sofort als ein Bestimmungselement der Orientirungslinie o erhalten lässt.

Nach dieser Argumentation im Zusammenhange mit unserer obigen Verallgemeinerung der Steiner'schen Construction (4) finden wir demnach für jede beliebig gewählte Transversale $g' (\parallel g)$ ein Quadrupel von Bestimmungspunkten (Q^1, Q^2, Q^3, Q^4) der Orientirungslinie o , wie dies in Fig. 3 ersichtlich wird.

6. Anmerkung. Erwägen wir die zuletzt gemachten Untersuchungen unserer speciellen Aufgabe nochmals, so deduciren wir für das Allgemeine eine vereinfachte Linear-Construction, sofern es sich um die Auffindung eines zu einem gegebenen Elemente conjugirten Elementes in einem involutorischen Punkten- oder Strahlensysteme handeln wird.

Ist nämlich z. B. in einem durch zwei Paare conjugirter Elemente aa_1, bb_1 bestimmten Strahlensysteme C (Fig. 4) ein Strahl d gegeben, dessen conjugirter Strahl d_1 gesucht werden soll, so ziehe man aus einem beliebigen Punkte D des Strahles d ein Paar beliebiger Transversalen g, g' ; dieselben werden bekanntlich von dem Strahlensysteme C in perspectivisch entsprechenden Punktsystemen getroffen, so dass in entsprechender Bezeichnung der Elemente die Gleichheit der Doppelverhältnisse symbolisch sich ausdrückt:

$$(ABA_1B_1) = (A'B'A'_1B'_1).$$

Man wähle nun auf der Transversalen g (oder g') eines der vier möglichen Paare von nicht conjugirten Punkten und verbinde diese beiden Punkte mit den betreffenden Punkten der Transversalen g' (oder g) nach folgendem Gesetze:

„Zu jedem der gewählten Punkte suche man auf g' (oder g) den perspectivisch entsprechenden Punkt und verbinde den dazu conjugirten Punkt mit dem anderen gewählten Punkte; der Schnitt der hiedurch erhaltenen beiden Verbindungslinien gibt einen Bestimmungspunkt Q des gesuchten Strahles d_1 .“

So erhält man beispielsweise für das gewählte Punktenpaar A, B :

$$(\overline{AB_1}, \overline{BA'_1}) = Q.$$

Die Richtigkeit dieser Construction rechtfertigt sich wieder, wenn man die Geradenpaare g, g' ; $\overline{AB_1}, \overline{BA'_1}$ als Seiten eines vollständigen Vierseits ansieht, dessen drei Paare Gegenecken $AA'_1; BB'_1; DQ$ mit dem sonst beliebigen Punkt C als Centrum zu einer Involution von sechs Strahlen verbunden sind.

Wird also der gefundene Punkt Q mit dem Centrum C verbunden, so stellt diese Verbindungslinie den gesuchten zu d conjugirten Strahl d_1 vor.

Ist andererseits auf einer Geraden g ein Punktsystem durch Angabe zweier Paare conjugirter Punkte AA_1, BB_1 bestimmt, und soll zu einem beliebigen Punkte D dieses Systems der ihm conjugirte Punkt D_1 ermittelt werden, so lege man durch die gegebenen Punkte ein beliebiges Strahlensystem C und führe die Construction mit Hilfe einer aus D beliebig gezogenen Transversalen g' auf den vorigen Fall zurück, wodurch sich im Durchschnitte des gefundenen Strahles d_1 mit der Geraden g der fragliche Punkt D_1 ergibt.¹

7. Kehren wir nach dieser Abschweifung wieder zu unserem vorgelegten Probleme zurück. Indem wir die bis nun erzielten Resultate resumiren, lassen sich dieselben für die Lösung des Pothenot'schen Problems nach unserer Methode dahin aussprechen:

¹ Verschiedene Fälle in der Annahme der gestellten Aufgaben sind aus den Fig. 4, 5, 6 zu entnehmen.

„Wir sind unter allen Verhältnissen im Stande, an jedem gewünschten Orte eine ganz beliebige Anzahl von sogenannten Hilfs- oder Bestimmungspunkten der Orientierungslinie des Problems directe und nur mit dem Lineale zu erzeugen, welche Vielseitigkeit anderen bis jetzt bekannten directen Auflösungsmethoden des Problems der vier Punkte nicht zukommt.“

Strenge genommen unterscheidet sich unsere Methode von derjenigen Bohnenberger-Bessel, welche ja hauptsächlich in Vergleich kommt, nur durch ein Mehr von drei Constructionslinien, wie dies übersichtlich die Fig. 7 demonstirt; dafür sind aber die Vortheile unseres Verfahrens, soferne es sich um die Erzielung eines directen Resultates handelt, so wesentliche, dass es unschwer fallen dürfte, welche von beiden Methoden in der Praxis vorzuziehen sein dürfte.

Lange Zeit war man darüber im Zweifel, ob nicht die Excentricität oder auch die Parallaxe des Messtisches, insbesondere in Folge der mitunter nöthigen grösseren Desorientirungen des Messtisches nach der Bohnenberger-Bessel'schen und also auch nach unserer Methode, auf die Genauigkeit des graphischen Resultates von Einflusse seien; doch haben andere Autoren,¹ sowie auch unsere eigene praktische Erfahrung diesen Einwand als nichtig erwiesen.

Nichtsdestoweniger leidet jede directe Methode des Stationirens an dem Nachtheile, dass bei Ausserachtlassung der graphischen Präcision, oder auch zuweilen in Folge von unvermeidlichen Fehlerquellen, welche in den Unvollkommenheiten des Tischapparates beruhen, sich statt des gewünschten Problempunktes ein sogenanntes Fehlerdreieck ergibt. Nach unserer Methode kann ein solches Fehlerdreieck offenbar nur minimal ausfallen, und in diesem Falle bleibt in Rücksicht der Zeitersparniss nichts anderes übrig, als eine der indirecten Methoden zur Auffindung des Problempunktes zu benützen.

Hierzu eignet sich, wie schon Eingangs bemerkt wurde, ihrer Einfachheit sowie des Umstandes halber, als dieselbe ihrer

¹ Vergl. hierüber J. Höltzschl „D. Pothenot'sche Problem“. Weimar 1868.

graphischen Durchführbarkeit wegen, der Erzeugung kleiner Fehlerdreiecke bedarf, keine Methode so verwendbar, als die von Prof. A. W i n c k l e r angegebene, indem sie sicherer und schneller zum Ziele führt, als irgend eine der bekannten indirecten Methoden des sogenannten Rückwärtseinschneidens.

Zum Schlusse möge es berechtigt erscheinen, wenn wir darauf hinweisen, dass mit der gegenwärtigen Abhandlung das P o t h e n o t'sche Problem, soweit uns Kenntniss der diesfälligen Literatur geworden ist, zum ersten Male vom Standpunkte der synthetischen Geometrie einer Lösung unterzogen wurde, und so gleichzeitig die Fruchtbarkeit dieser Wissenschaft als ein neues Beispiel für die Lösung vieler Probleme der graphischen Disciplin vor Augen geführt wird.