§. 146.

Die Methode der kleinsten Quadrate, angewendet auf Winkelbeobachtungen (nach Littrow.)

Es sollen $x, x_1, x_2, x_3, \ldots$ die durch Beobachtungen unmittelbar erhaltenen Winkelgrössen, Horizontal- oder Verticalwinkel, und die Anzahl dieser Beobachtungen, für ein und denselben Punkt $= N$ seyn.

Sind diese Beobachtungen unter gleichen Umständen gemacht worden, also alle von gleichem Werthe, und kann man demnach in Betreff ihrer Genauigkeit keinen Unterschied unter ihnen machen, so ist die genaue und also wahrscheinliche Bestimmung des betreffenden Winkels, der X heissen soll, gleich dem arithmetischen Mittel aus allen Beobachtungen, nämlich

$$X = \frac{x + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots}{N}$$

oder wenn man die Summe von $x + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots = \Sigma x$ setzt, so ist

$$X = \frac{\Sigma x}{N}.$$

Angenommen aber, es sey e der Unterschied zwischen diesem wahrscheinlichen Werth X unserer Beobachtung und dem unmittelbaren Resultate x der ersten Beobachtung, d. h. es sey $e = X - x$ und ferner $e_1 = X - x_1$

$$e_2 = X - x_2$$
$$e_3 = X - x_3 \text{ etc.}$$

Die Grössen $e, e_1, e_2, e_3, \ldots$ kann man als die Fehler der einzelnen Beobachtungen ansehen. Bezeichnet man nun wieder der Kürze wegen die Summe der Quadrate der Grössen $e^2, e^2_1, e^2_2, e^2_3, \ldots$ durch Σe^2, so dass

$$\Sigma e^2 = e^2 + e^2_1 + e^2_2 + e^2_3 + \ldots \text{ ist,}$$

so heisst die Grösse
$$P = \frac{N^2}{2\,\Sigma e^2}$$

das Gewicht jener Bestimmung von X als des wahrscheinlichsten Werthes von x.

Man sieht, dass dieses Gewicht desto grösser seyn wird, je grösser die Anzahl N der Beobachtungen und je kleiner die Grössen $e, e_1, e_2, e_3 \ldots$ d. h. je genauer die unmittelbar erhaltenen Winkelgrössen sind.

Bezeichnet man ferner den mittlern zu befürchtenden Beobachtungsfehler mit Z, welchen man bei der Bestimmung von X begangen haben könnte, so ist

$$Z = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}} = \frac{0{,}282095}{\sqrt{P}} \text{ wo } \pi = 3{,}1415926 \text{ ist.}$$

Dieser mittlere zu befürchtende Fehler Z ist die Summe der Producte jedes Fehlers der einzelnen Beobachtungen in seine Wahrscheinlichkeit.

Von dem mittlern zu befürchtenden Fehler Z unterscheidet sich der wahrscheinliche Fehler V, den man bei der Bestimmung von X begangen haben kann. Dieser Fehler V ist nämlich derjenige, von dem es gleich wahrscheinlich ist, dass man ihn begangen oder dass man ihn auch nicht begangen habe. Dieser wahrscheinliche Fehler ist:

$$V = \frac{0{,}4769363}{\sqrt{P}}$$

Die beiden Fehler Z und V beziehen sich auf das Resultat X, welches man aus den einzelnen Beobachtungen $x, x_1, x_2, x_3 \ldots$ abgeleitet hat. Nennt man nun eben so v den wahrscheinlichen Fehler jeder einzelnen dieser Beobachtungen, so ist

$$v = 0{,}4769363 \sqrt{\frac{N}{P}}$$

und die wahrscheinliche Grenze $v + \Delta v$ dieses Fehlers v ist

$$v + \Delta v = v \left(1 + \frac{0{,}4769363}{\sqrt{N}}\right)$$

wo in allen diesen Ausdrücken wegen dem Wurzelzeichen die dasselbe enthaltende Grösse immer mit den doppelten Zeichen $\pm$ verstanden wird.

Der letzte Ausdruck sagt daher, dass der wahre, wirklich statthabende Werth von v zwischen die beiden Grenzen fallen wird:

$$v\left(1 + \frac{0{,}4769363}{\sqrt{N}}\right) \text{ und}$$

$$v\left(1 - \frac{0{,}4769363}{\sqrt{N}}\right)$$

oder dass man 1 gegen 1 wetten kann, dass der wahre Werth von v zwischen diese beiden Grössen fallen wird.

Um aber auch die Wahrscheinlichkeit w zu finden, dass eine der bisher bestimmten Grössen, dass z. B. der mittlere zu befürchtende Fehler Z des Resultats X zwischen zwei andere willkührliche Grenzen falle, so findet man die Wahrscheinlichkeit w, dass diese Grösse Z zwischen den Grenzen $\pm \frac{r}{\sqrt{P}}$ liege, wo r irgend eine willkührliche Grösse, und wie zuvor $P = \frac{N^2}{2 \Sigma e^2}$ ist $w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int m^{-r^2} dr$ wo $m = 2{,}7182818$ die Basis der natürlichen Logarithmen ist, und wo das Integral von $r = o$ bis $r = \infty$ genommen wird. Man findet aber für dieses Integral, wenn $r < 1$ ist

$$\int m^{-r^2} dr = r - \frac{r^3}{3} + \frac{1}{1.2}\frac{r^5}{5} - \frac{1}{1.2.3}\frac{r^7}{7} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{r^9}{9} - \ldots$$

oder

$$\int m^{-r^2} dr = \frac{r}{m^{r^2}} \left[1 + \frac{2r^2}{1.3} + \frac{(2r^2)^2}{1.3.5.} + \frac{(2r^2)^3}{1.3.5.7.} + \ldots\right]$$

und wenn $r > 1$ ist

$$\int m^{-r^2} dr = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{1}{2 r m^{r^2}}\left[1 - \frac{1}{2r^2} + \frac{1.3}{(2r^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2r^2)^3} + \frac{1.3.5.7}{(2r^2)^4} - \ldots\right]$$

Entwickelt man diese Ausdrücke für einige Werthe von r, so gibt die vorhergehende Gleichung $w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int m^{-r^2} dr$ folgende kleine Tafel.

r.	w.	$\frac{w}{1-w.}$
0,4769363	0,5	1,0000000
0,5951161	0,6	1,5000000
0,7328691	0,7	2,3333333
0,9061939	0,8	4,0000000
1,0000000	0,8427008	5,3572874
1,1630872	0,9	9,0
1,8213864	0,99	99,0
2,3276754	0,999	999,0
2,7510654	0,9999	9999,0
∞	1,0000000	∞

Diese Tafel zeigt z. B. dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler Z zwischen den Grenzen $\pm\frac{1}{\sqrt{P}}$ liege, gleich $w = 0{,}8427008$, und dass also auch die Wahrscheinlichkeit des Gegentheiles, dass Z nicht zwischen diesen Grenzen liege, gleich $1-w = 0{,}1572992$ ist, weil jede Wahrscheinlichkeit, dass irgend ein Fall eintrete, und die, dass er nicht eintrete, zusammen gleich der Wahrheit d. h. gleich 1 ist.

Man kann daher die Grösse w gegen 1—w d. h. man kann die Grösse $\frac{w}{1-w} = 5{,}3572874$ gegen die Einheit wetten, dass der Fehler Z zwischen den Grenzen $\pm\frac{1}{\sqrt{P}}$ enthalten, oder mit andern Worten, dass der Fehler Z kleiner als $\frac{1}{\sqrt{P}}$ ist.

Ebenso kann man 9999 gegen 1 oder nahe 10000 gegen 1 wetten, dass der Fehler Z kleiner als $\frac{2{,}7510654}{\sqrt{P}}$ ist, aber man kann nur 4 gegen 1 wetten, dass der Fehler Z kleiner als $\frac{0{,}9061939}{\sqrt{P}}$ ist.

Beispiel

um den Gebrauch der aufgestellten Ausdrücke deutlich zu machen.

Zehn Beobachtungen des Meridiankreises haben folgende Polhöhen der Wiener Sternwarte gegeben:

$$
\begin{aligned}
x &= 48^0\ 12'\ 35'',2 \\
x_1 &= \text{„}\ \ \text{„}\ \ 34{,}6 \\
x_2 &= \text{„}\ \ \text{„}\ \ 35{,}4 \\
x_3 &= \text{„}\ \ \text{„}\ \ 35{,}0 \\
x_4 &= \text{„}\ \ \text{„}\ \ 34{,}2 \\
x_5 &= \text{„}\ \ \text{„}\ \ 34{,}7 \\
x_6 &= \text{„}\ \ \text{„}\ \ 35{,}4 \\
x_7 &= \text{„}\ \ \text{„}\ \ 34{,}8 \\
x_8 &= \text{„}\ \ \text{„}\ \ 35{,}6 \\
x_9 &= \text{„}\ \ \text{„}\ \ 35{,}2
\end{aligned}
$$

Arithm. Mittel $X = 48^0\ 12'\ 35'',01 = \frac{\Sigma x}{N}$, wo $N = 10$ ist.

Dieser Werth von X ist also der wahrscheinlichste Werth der Polhöhe jenes Beobachtungsortes, wie er aus diesen zehn Beobachtungen folgt.

I. Es sind aber die Differenzen dieses Resultates X von den einzelnen Beobachtungen

$$X - x = e = 35{,}01 - 35{,}2 \text{ oder}$$

$$\begin{array}{lll}
e = -0{,}19 & \text{und } e^2 & = 0{,}0361 \\
e_1 = 0{,}41 & \text{„ } e^2{}_1 & = 0{,}1861 \\
e_2 = -0{,}39 & \text{„ } e^2{}_2 & = 0{,}1521 \\
e_3 = 0{,}01 & \text{„ } e^2{}_3 & = 0{,}0001 \\
e_4 = 0{,}81 & \text{„ } e^2{}_4 & = 0{,}6561 \\
e_5 = 0{,}31 & \text{„ } e^2{}_5 & = 0{,}0961 \\
e_6 = -0{,}39 & \text{„ } e^2{}_6 & = 0{,}1521 \\
e_7 = 0{,}21 & \text{„ } e^2{}_7 & = 0{,}0441 \\
e_8 = -0{,}59 & \text{„ } e^2{}_8 & = 0{,}3481 \\
e_9 = -0{,}19 & \text{„ } e^2{}_9 & = 0{,}0361 \\
\hline
 & \Sigma e^2 & = 1{,}7070
\end{array}$$

Dieses vorausgesetzt ist das Gewicht P der vorhergehenden Bestimmung von X

$$P = \frac{N^2}{2\,\Sigma e^2} = 29{,}291.$$

Der mittlere zu befürchtende Fehler Z dieses Resultates X ist:

$$Z = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}} = \pm\, 0'',0521.$$

Der wahrscheinliche Fehler V dieses Resultates ist:

$$V = \frac{0{,}47694}{\sqrt{P}} = \pm\, 0{,}0881.$$

Endlich ist der wahrscheinliche Fehler v jeder einzelnen Beobachtung

$$v = 0{,}47694 \sqrt{\frac{N}{P}} = \pm\, 0{,}2787$$

und die wahrscheinliche Grenze $v + \Delta v$ dieses letzten Fehlers ist

$$v \pm \Delta v = v\left(1 \pm \frac{0{,}47694}{\sqrt{N}}\right),$$

das heisst:

$$0{,}2787 \pm 0{,}0420 = \begin{array}{l} 0{,}3207 \\ 0{,}2367 \end{array}.$$

Man kann daher sagen, dass mit dem gebrauchten Instrumente, unter übrigens gleichen Umständen, jede einzelne Beobachtung dieser Art dem wahrscheinlichen Fehler 0″,28 unterworfen ist, und dass dieser Fehler in der Ordnung nicht grösser als 0″,32 und nicht kleiner als 0″,24 seyn wird, und dieser Schluss wird desto genauer seyn, je grösser die ihm zu Grunde gelegte Anzahl von Beobachtungen gewesen ist.

§. 147.

Um nun die Genauigkeit zu bestimmen, mit welcher man mittelst des zwölfzölligen Reichenbach'schen Theodoliths Horizontalwinkel beobachten kann, so wollen wir diese aus dem oben §. 37 angegebenen Winkel auf dem Tübinger Observatorium, Weilerburg-Mözingen, suchen.