Ist ferner 1) der Stundenwinkel t aus der genauen Beobachtungszeit,
2) die Polhöhe φ,
3) die Declination der Sonne δ bekannt, so findet sich die wahre Sonnenhöhe aus der Formel: $\sin h = \sin\varphi . \sin\delta + \cos\varphi . \cos\delta . \cos t$. (wenn $\delta +$)

Aus dieser Formel findet sich aber auch der Ausdruck für die Bestimmung von t

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin\varphi . \sin\delta}{\cos\varphi . \cos\delta}$$

und diese Formel für genaue logarithmische Berechnung einzurichten, setze man statt $\cos t$ seinen gleichen Werth $1 - 2 (\sin {}^1/_2\, t)^2$ und man hat:

$$\sin h = \cos(\varphi - \delta) - 2 (\sin {}^1/_2\, t)^2 . \cos\varphi . \cos\delta,$$

folgl. $2 (\sin {}^1/_2\, t)^2 . \cos\varphi . \cos\delta = \sin h - \cos(\varphi - \delta) = \sin h - \sin(90^0 - \varphi + \delta)$

$$= 2 \cos\left(\frac{h + 90^0 - \varphi + \delta}{2}\right) . \sin\left(\frac{h - 90^0 + \varphi - \delta}{2}\right)$$

und setzt man endlich für δ die Polardistanz D, also $\delta = 90^0 - D$, so erhält man:

$$(\sin {}^1/_2\, t)^2 . \cos\varphi . \sin D = \sin\left\{\frac{(\varphi + D - h)}{2}\right\} . \cos\left\{\frac{(\varphi + D + h)}{2}\right\}$$

und wird noch der Kürze wegen $\varphi + D + h = S$ gesetzt, so erhält man die Formel für die Bestimmung des Stundenwinkels:

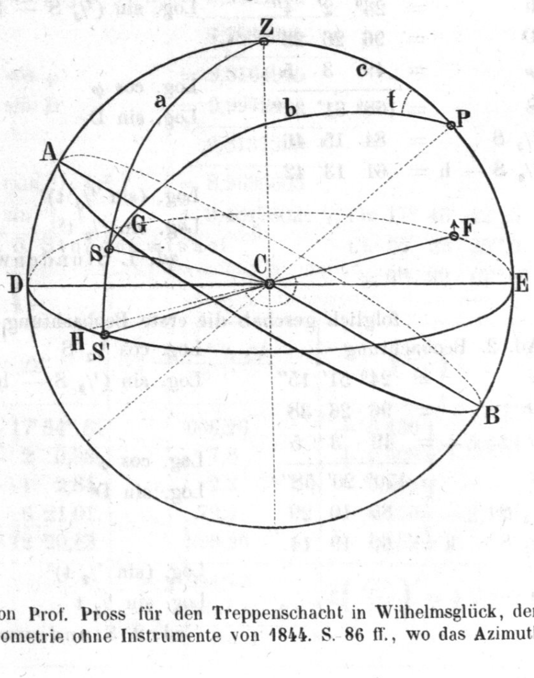
$$(\sin {}^1/_2\, t)^2 = \frac{\cos {}^1/_2\, S . \sin({}^1/_2\, S - h)}{\cos\varphi . \sin D.}$$

§. 144.

Erste Methode der Auflösung nach Soldner, zweites Beispiel. [1]

Angenommen es seyen im October auf einem Punkte C, dessen Polhöhe $= 49^0\ 3'\ 5''$ ist, mit einem Theodolith Messungen für die Azimuthbestimmung desselben vorgenommen worden, wo das Object F Vormittags links von der Sonne lag.

Fig. 76.



Nebst 5 Sonnenhöhen S′S seyen auch zugleich die zugehörigen 5 horizontalen Azimuthal-Winkel FCS′ gemessen worden, man soll hiernach das Azimuth F von C aus gesehen, bestimmen.

Die Sonnenränder wurden mit dem astronomischen Fernrohr so pointirt, dass der Horizontalfaden den untern Sonnenrand und der Verticalfaden die Sonne links tangirte. Die 5 gemessenen Sonnenhöhen wurden dann so

[1] Dieses ist die Azimuthbestimmung von Prof. Pross für den Treppenschacht in Wilhelmsglück, den 10. October 1843; s. dessen praktische Geometrie ohne Instrumente von 1844. S. 86 ff., wo das Azimuth $= 35^0\ 44\ 46$ angegeben ist.

rectificirt, dass der negative Collimationsfehler ($-3' 40''$) des Höhenkreises und die Refraktion abgezogen, sowie die Parallaxe ($P \cos h = 8'',6 \cos h$) und der Halbmesser der Sonne ($16' 5''$) im Verhältniss $\sin z : 1$ addirt wurden.

Hiernach ergaben sich

	1) Die wahren Sonnenhöhen = h	2) Die um den Sonnenhalbmesser vergrösserten Azimuthalwinkel.	
Beobachtung 1)	$23^0\ 2'\ 4''$	$168^0\ 17'\ 0''$	
„ 2)	24 51 15	172 1 0	
„ 3)	25 11 47	172 45 20	Mittel $A = 172^0\ 32'\ 4''$
„ 4)	25 46 49	174 3 40	
„ 5)	26 25 22	175 33 20	

Die für die Mittagszeit nach den Ephemeriden bestimmte Declination der Sonne berechnete sich nach einer Sekunden-Taschenuhr, welche die wahre Zeit zeigte, auf die 5 Beobachtungen zu:

	Declination = δ	Polardistanz = D
ad 1)	$-6^0\ 26'\ 23''$	$96^0\ 26'\ 23''$
2)	$-6\ 26\ 38$	96 26 38
3)	$-6\ 26\ 41$	96 26 41
4)	$-6\ 26\ 46$	96 26 46
5)	$-6\ 26\ 51$	96 26 51

Aus der wahren Sonnenhöhe = h, der Polardistanz = D und der Polhöhe des Beobachtungsorts = φ bestimmen sich nun die wahren Zeitmomente der Beobachtungen aus:

$$(\sin {}^1/_2\, t)^2 = \frac{\cos {}^1/_2\, S \sin ({}^1/_2\, S - h)}{\cos \varphi \sin D} \text{ wo } h + D + \varphi = S.$$

Ad. 1. Beobachtung

$h = 23^0\ 2'\ 4''$
$D = 96\ 26\ 23$
$\varphi = 49\ 3\ 5$
$S = 168^0\ 31'\ 32''$
${}^1/_2\, S = 84\ 15\ 46$
${}^1/_2\, S - h = 61\ 13\ 42$

Log. $\cos {}^1/_2\, S$ = 8,9998530
Log. $\sin ({}^1/_2\, S - h)$ = 9,9427741
= 8,9426271
Log. $\cos \varphi$ = 9,8164945
Log. $\sin D$ = 9,9972510
= 9,8137455
Log. $(\sin {}^1/_2\, t)^2$ = 9,1288816
Log. $\sin {}^1/_2\, t$ = 9,5644408; ${}^1/_2\, t = 21^0\ 31'\ 8'',39$
ad. 1. Stundenwinkel $t = 43\ 2\ 16'',78$
$= 2^{St.}\ 52\ 9'',11$

folglich geschah die erste Beobachtung Morgens $9^{U.}\ 7'\ 50'',89$

Ad. 2. Beobachtung

$h = 24^0\ 51'\ 15''$
$D = 96\ 26\ 38$
$\varphi = 49\ 3\ 5$
$S = 170^0\ 20'\ 58''$
${}^1/_2\, S = 85\ 10\ 29$
${}^1/_2\, S - h = 60\ 19\ 14$

Log. $\cos {}^1/_2\, S$ = 8,9248862
Log. $\sin ({}^1/_2\, S - h)$ = 9,9389244
= 8,8638106
Log. $\cos \varphi$ = 9,8164945
Log. $\sin D$ = 9,9972477
= 9,8137422
Log. $(\sin {}^1/_2\, t)^2$ = 9,0500684
Log. $\sin {}^1/_2\, t$ = 9,5250342; ${}^1/_2\, t = 19^0\ 34'\ 19'',34$
ad. 2. Stundenwinkel $t = 39\ 8\ 38'',68$
$= 2^{St.}\ 36\ 34'',58$

Ad. 3. Beobachtung

$h = 25^0\ 11'\ 47''$
$D = 96\ 26\ 41$
$\varphi = 49\ 3\ 5$
$S = 170^0\ 41'\ 33''$
$^1/_2\ S = 85\ 20\ 46'',5$
$^1/_2\ S - h = 60\ 8\ 59'',5$

Log. cos $^1/_2$ S $= 8,9092028$
Log. sin ($^1/_2$ S — h) $= 9,9381845$
$\ 8,8473873$
Log. cos φ $= 9,8164945$
Log. sin D $= 9,9972469$
$\ 9,8137414$
Log. (sin $^1/_2$ t)^2 $= 9,0336459$
Log. sin $^1/_2$ t $= 9,5168229$; $^1/_2\ t = 19^0\ 11'\ 27'',4$
ad. 3. Stundenwinkel $t = 38\ 22\ 54'',88$
$= 2^{St.}\ 33\ 31'',66$

Ad. 4. Beobachtung

$h = 25^0\ 46'\ 49''$
$D = 96\ 26\ 46$
$\varphi = 49\ 3\ 5$
$S = 171^0\ 16'\ 40''$
$^1/_2\ S = 85\ 38\ 20$
$^1/_2\ S - h = 59\ 51\ 31$

Log. cos $^1/_2$ S $= 8,8810551$
Log. sin ($^1/_2$ S — h) $= 9,9369101$
$\ 8,8179652$
Log. cos φ $= 9,8164945$
Log. sin D $= 9,9972457$
$\ 9,8137402$
Log. (sin $^1/_2$ t)^2 $= 9,0042250$
Log. sin $^1/_2$ t $= 9,5021125$; $^1/_2\ t = 18^0\ 31'\ 41'',16$
ad. 4. Stundenwinkel $t = 37\ 3\ 22'',32$
$= 2^{St.}\ 28\ 13'',49$

Ad. 5. Beobachtung

$h = 26^0\ 25'\ 22''$
$D = 96\ 26\ 51$
$\varphi = 49\ 3\ 5$
$S = 171\ 55\ 18$
$^1/_2\ S = 85\ 57\ 39$
$^1/_2\ S - h = 59\ 32\ 17$

Log. cos $^1/_2$ S $= 8,8478093$
Log. sin ($^1/_2$ S — h) $= 9,9354902$
$\ 8,7832995$
Log. cos φ $= 9,8164945$
Log. sin D $= 9,9972445$
$\ 9,8137390$
Log. (sin $^1/_2$ t)^2 $= 8,9695605$
Log. sin $^1/_2$ t $= 9,4847802$; $^1/_2\ t = 17^0\ 46'\ 42'',5$
ad. 5. Stundenwinkel $t = 35\ 33\ 25'',0$
$= 2^{St.}\ 22\ 13'',67$

Stundenwinkel.	Zeiten. $2^u\ 34'\ 34'',5$	$\Delta t'$	$\frac{2 \sin^2 {}^1/_2 \Delta t}{\sin 1''}$	$\left(\frac{\Delta t'}{10}\right)^3$	
1) $t = 43^0\ 2'\ 16'',78$	$2^u\ 52'\ 9'',11$	$+ 17'\ 34'',61$	606,26	$+ 5,430$	$+5,438$
2) $t = 39\ 8\ 38,68$	$2\ 36\ 34,58$	$+ 2\ 0,08$	7,8	$+ 0,008$	
3) $t = 38\ 22\ 54,88$	$2\ 33\ 31,66$	$- 1\ 2,84$	2,2	$- 0,001$	$-2,139$
4) $t = 37\ 3\ 22,32$	$2\ 28\ 13,49$	$- 6\ 21,01$	79,2	$- 0,256$	
5) $t = 35\ 33\ 25,0$	$2\ 22\ 13,67$	$- 12\ 20,83$	299,26	$- 1,882$	
Mittlerer Stundenwinkel. $t = 38^0 38'\ 7'',52$ $^1/_2 t = 19\ 19\ 3,766$			$\Sigma\ 994,72$ $= \Sigma \frac{2 \sin^2 {}^1/_2\ \Delta t}{\sin 1''}$	$\Sigma\left(\frac{\Delta t}{10}\right)^3 = +3,299$	

$$\text{Tang. } \beta = \frac{\sin {}^1/_2\,(\varphi - \delta)}{\cos {}^1/_2\,(\varphi + \delta)}\ \text{Cotg. } {}^1/_2\, t \qquad \begin{array}{rl} \varphi & = 49^0\ \ 3'\ \ 5'' \\ \delta & = \ \ 6\ \ 26\ \ 41 \\ \hline \varphi - \delta & = 55\ \ 29\ \ 46 \\ {}^1/_2\,(\varphi - \delta) & = 27\ \ 44\ \ 53 \\ \hline \varphi + \delta & = 42\ \ 36\ \ 24 \\ {}^1/_2\,(\varphi + \delta) & = 21\ \ 18\ \ 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Log. } \sin {}^1/_2\,(\varphi - \delta) & = 9{,}6679985 \\ \cos {}^1/_2\,(\varphi + \delta) & = \underline{9{,}9692622} \\ & \ \ \ 9{,}6987363 \\ \text{Log. Cotg. } {}^1/_2\, t & = \underline{0{,}4552599} \\ \text{Log. Tang. } \beta & = 0{,}1539962; \end{array}$$

und $\beta = 54^0\ 57'\ 6'',56$; $2\,\beta = 109^0\ 54'\ 13'',12$.

$$\text{Tang. } \gamma = \frac{\cos {}^1/_2\,(\varphi - \delta)}{\sin {}^1/_2\,(\varphi + \delta)}\ \text{Cotg. } {}^1/_2\, t \qquad \sin Z = \frac{\cos \delta\ \sin t}{\sin\,(\beta + \gamma)}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Log. } \cos {}^1/_2\,(\varphi - \delta) & = 9{,}9469450 \\ \text{Log. } \sin {}^1/_2\,(\varphi + \delta) & = \underline{9{,}5602719} \\ & \ \ \ 0{,}3866731 \\ \text{Log. Cotg. } {}^1/_2\, t & = \underline{0{,}4552599} \\ \text{Log. Tang. } \gamma & = 0{,}8419330 \\ \gamma & = \ \ 81^0\ 48'\ 40'',44 \\ 2\,\gamma & = 163\ \ 37\ \ 20'',88 \\ \text{und } \beta + \gamma & = 136\ \ 45\ \ 47'',00 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{Log. } \cos \delta & = 9{,}9972469 \\ \text{Log. } \sin t & = 9{,}7954369 \\ \text{Compl. Log. } \sin\,(\beta + \gamma) & = \underline{0{,}1642987} \\ \text{Log. } \sin Z & = 9{,}9569825 \\ Z & = 64^0\ 55'\ \ 1'',92 \\ {}^1/_2\, Z & = 32\ \ 27\ \ 30'',96 \end{array}$$

$$M = \frac{\cos \varphi\ \cos \delta}{4} \left\{ \frac{\sin 2\,\gamma}{\cos {}^1/_2\, Z^2} - \frac{\sin 2\,\beta}{\sin {}^1/_2\, Z^2} \right\}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Log. } \sin 2\,\gamma & = 9{,}4501956 \\ \text{Log. } \cos {}^1/_2\, Z^2 & = \underline{9{,}8524578} \\ & \ \ \ 9{,}5977378 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{Log. } \sin 2\,\beta & = 9{,}9732510 \\ \text{Log. } \sin {}^1/_2\, Z^2 & = \underline{9{,}4594464} \\ & \ \ \ 0{,}5138046 \end{array}$$

$$\frac{\sin 2\,\gamma}{\cos {}^1/_2\, Z^2} = 0{,}39604 \qquad \frac{\sin 2\,\beta}{\sin {}^1/_2\, Z^2} = 3{,}26441$$

$$\underline{-\ 3{,}26441}$$

$$\frac{\sin 2\,\gamma}{\cos {}^1/_2\, Z^2} - \frac{\sin 2\,\beta}{\sin {}^1/_2\, Z^2} = -\ 2{,}86838$$

$$\begin{array}{ll} \text{Log. } -\ 2{,}86837 & = 0{,}4576352 \text{ neg.} \\ \text{Log. } \cos \delta & = 9{,}9972469 \\ \text{Log. } \cos \varphi & = 9{,}8164945 \\ \text{Compl. Log. } 4 & = \underline{9{,}3979400} \\ \text{Log. } M & = 9{,}6693166 \text{ neg.} \end{array}$$

$$N = \frac{\cos \varphi^2\ \cos \delta^2\ \sin t}{4} \left\{ \frac{\sin 2\,\gamma}{\cos {}^1/_2\, Z^4} + \frac{\sin 2\,\beta}{\sin {}^1/_2\, Z^4} \right\} + M\ \text{Cotg. } t.$$

$$\begin{array}{ll} \text{Log. } \sin 2\,\gamma & = 9{,}4501956 \\ \text{Log. } \cos {}^1/_2\, Z^4 & = \underline{9{,}7049156} \\ & \ \ \ 9{,}7452800 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{Log. } \sin 2\,\beta & = 9{,}9732510 \\ \text{Log. } \sin {}^1/_2\, Z^4 & = \underline{8{,}9188928} \\ & \ \ \ 1{,}0543582 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{Log. } M & = 9{,}6693166 \\ \text{Log. Cotg. } t & = \underline{0{,}0972889} \\ & \ \ \ 9{,}7666055 \text{ neg} \end{array}$$

$$\frac{\sin 2\,\gamma}{\cos {}^1/_2\, Z^4} = 0{,}55626 \qquad \frac{\sin 2\,\beta}{\sin {}^1/_2\, Z^4} = 11{,}3333 \qquad M\ \text{Cotg. } t = 0{,}58426 \text{ neg.}$$

$$\frac{\sin 2\,\beta}{\sin {}^1/_2\, Z^4} = \underline{11{,}3333}$$

Summe 11,88956 und

$$
\begin{aligned}
\text{Log. } 11{,}88956 &= 1{,}0751659\\
\text{Log. sin t} &= 9{,}7954369\\
\text{Log. cos } \delta^2 &= 9{,}9944938\\
\text{Log. cos } \varphi^2 &= 9{,}6329890\\
\text{Compl. Log. } 4 &= 9{,}3979401\\
\hline
&\ 9{,}8960257
\end{aligned}
$$

$$\frac{\cos\varphi^2 \cos\delta^2 \sin t}{4}\left\{\frac{\sin 2\gamma}{\cos {}^1/_2 Z^4} + \frac{\sin 2\beta}{\sin {}^1/_2 Z^4}\right\} = 0{,}78709 \qquad \text{Log. N} = 9{,}3071322$$

$$-\text{ M Cotg. t} = 0{,}58426 \qquad \text{Log. } 2{,}856 = 0{,}4557582$$

$$\text{folglich N} = 0{,}20283 \qquad \text{Log. } 2{,}856 \text{ N} = 9{,}7628904$$

und endlich: $$\triangle\,\alpha = \frac{M}{n}.\Sigma.\frac{2\sin^2 {}^1/_2 \triangle t}{\sin 1''} + \frac{2{,}856\text{ N}}{n}.\Sigma.\left(\frac{\triangle t'}{10}\right)^3$$

$$
\begin{aligned}
\text{Log. M} &= 9{,}6693166 \text{ neg.}\\
\text{Log. } 994{,}72 &= 2{,}9977009\\
\text{Compl. Log. } 5 &= 9{,}3010300
\end{aligned}
$$

$$\text{Log. }\left(\frac{M}{n}.\Sigma.\frac{2\sin^2 {}^1/_2 \triangle t}{\sin 1''}\right) = 1{,}9680475 \text{ neg.} \qquad = -\ 92'',906$$

$$
\begin{aligned}
\text{Log. } 2{,}856 \text{ N} &= 9{,}7628904\\
\text{Log. } 3{,}299 &= 0{,}5183823\\
\text{Compl. Log. } 5 &= 9{,}3010300
\end{aligned}
$$

$$\text{Log. }\left(\frac{2{,}856\text{ N}}{n}.\Sigma.\left(\frac{\triangle t'}{10}\right)^3\right) = 9{,}5823027 \qquad +\ 0'',382$$

$$\triangle\,\alpha = -\ 92'',542 = -\ 0^0\ 1'\ 32'',52$$

$$
\begin{aligned}
180^0 - \beta - \gamma &= 43^0\ 14'\ 13'',0\\
+\ A &= 172\quad 32\quad 4{,}0\\
\hline
&\ 215\quad 46\quad 17{,}0\\
-\ \triangle\,\alpha &= 0\quad\ 1\quad 32{,}52\\
\hline
\text{Azimuthbogen FES'D} &= 215\quad 44\quad 44{,}48\\
\text{,, DCH} &= 35\quad 44\quad 44{,}48 = \text{FCE.}
\end{aligned}
$$

§. 145.

Zweite Methode der Auflösung des zweiten Beispiels nach Bohnenbergers geogr. Ortsbestimmung von 1795.

Im Dreieck PSZ ist $\sin Z = \sin\alpha = \frac{\sin t \cos\delta}{\cos h}$ Fig. 76.

1. Beobachtung $t = 43^0\ 2'\ 16'',78$	Log. sin t	$= 9{,}8340920$
$\delta = 6\ \ 26\ \ 23$	Log. cos δ	$= 9{,}9972511$
$h = 23\ \ 2\ \ 4$	C. Log. cos h	$= 0{,}0360849$
	Log. sin α	$= 9{,}8674280$
		180^0
	α	$= 47^0\ 28'\ 14'',90$
		$132\ \ 31\ \ 45{,}10$
	A'	$= 168\ \ 17\ \ 0$
	Azimuth ad 1	$= 35\ \ 45\ \ 14{,}9$