Berechnet man endlich auch die 2 Seiten BH und RH im $\triangle$ BRH, so ist

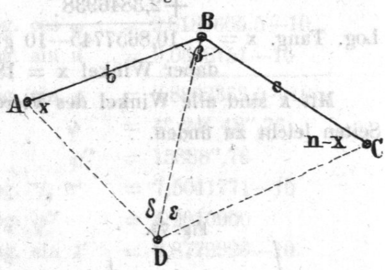
$$\sin BH = \frac{\sin BR \sin R}{\sin H} \text{ und } \sin RH = \frac{\sin BR \sin B}{\sin H}$$

$B = 67^0\ 9'\ 14'',74$	Log. sin BR = 5,2557043.4	Log. sin BR = 5,2557043.4
$R = 36\ 23\ 19,33$	Log. sin R = 9,7732451.8	Log. sin B = 9,9645200.2
$H = 76\ 27\ 29,7$	5,0289495.2	5,2202243.6
$180\ 0\ 3,77$	Log. sin H = 9,9877554.5	Log. sin H = 9,9877554.5
	Log. sin BH = 5,0411940.7	Log. sin RH = 5,2324689.1
	red. ad arc + 17.6	red. ad arc + 42.5
	Log. BH = 5,0411958.3	Log. RH = 5,2324731.6

§. 139.

4) Das Problem aus 3 gegebenen Punkten, A, B, C, den vierten D nach der ebenen Trigonometrie zu bestimmen, ist bei den Dreieckspunkten dritten Ranges oft und mit viel Zeitersparniss angewendet worden, daher auch seine Auflösung hier folgen soll.

Fig. 72.



Auflösung. Es sey AB = b; BC = c; und der von AB und BC eingeschlossene Winkel $= \beta$; und die auf D gemessenen zwei Winkel δ und ε. Ist dann $\llcorner$ BAD + $\llcorner$ BCD $= \mu = 360^0 - (\beta + \delta + \varepsilon)$ und $\llcorner$ BAD = x, $\llcorner$ BCD $= \mu - x$, so hat man die Proportion:

$$AB : BD = \sin \delta : \sin x \text{ und } BC : BD = \sin \varepsilon : \sin (\mu - x)$$

$$\text{folglich } BD = \frac{AB \sin x}{\sin \delta} = \frac{BC \sin (\mu - x)}{\sin \varepsilon}$$

$$\text{also: } \frac{BC . \sin (\mu - x)}{\sin \varepsilon} = \frac{AB . \sin x}{\sin \delta}$$

$$BC . \sin (\mu - x) = \frac{AB . \sin x \sin \varepsilon}{\sin \delta}$$

$$\frac{BC . \sin (\mu - x)}{\sin x} = \frac{AB . \sin \varepsilon}{\sin \delta}$$

$$\frac{\sin (\mu - x)}{\sin x} = \frac{AB . \sin \varepsilon}{BC . \sin \delta}$$

$$\frac{\sin \mu \cos x - \cos \mu \sin x}{\sin x} = \frac{AB . \sin \varepsilon}{BC . \sin \delta} = \frac{\sin \mu \cos x}{\sin x} - \frac{\cos \mu \sin x}{\sin x}$$

$$\frac{\sin \mu \cos x}{\sin x} - \cos \mu = \frac{AB . \sin \varepsilon}{BC . \sin \delta}$$

$$\text{daher } \sin \mu \operatorname{Cotg.} x - \cos \mu = \frac{AB . \sin \varepsilon}{BC . \sin \delta} = \frac{b \sin \varepsilon}{c \sin \delta}$$

$$\sin \mu \operatorname{Cotg.} x = \frac{b \sin \varepsilon}{c \sin \delta} + \cos \mu = \frac{b \sin \varepsilon + c \sin \delta \cos \mu}{c \sin \delta}$$

$$\operatorname{Cotg.} x = \frac{b \sin \varepsilon + c \sin \delta \cos \mu}{c \sin \delta \sin \mu} = \frac{1}{\operatorname{Tang.} x}$$

$$\text{folglich } \operatorname{Tang.} x = \frac{c \sin \delta \sin \mu}{b \sin \varepsilon + c \sin \delta \cos \mu}$$

Beispiel.

$$b = 4326 \quad c = 5212 \quad \beta = 80^0\ 10'\ 24''$$
$$\delta = 24\ \ 17\ \ 30$$
$$\varepsilon = 19\ \ 24\ \ 31$$
$$\overline{\phantom{\varepsilon ={}} 123\ \ 52\ \ 25}$$

also $\mu = 360^0 - (\beta + \delta + \varepsilon) = 236^0\ 7'\ 35''$

$$\text{Lg. } (c. \sin\delta \cos\mu) = -3{,}0773873 = -1195{,}05$$

$$\begin{cases} \text{Log. } \cos\mu = 9{,}7461379 \text{ n.} \\ \text{Log. } c = 3{,}7170044 \\ \text{Log. } \sin\delta = 9{,}6142450 \\ \text{Log. } \sin\mu = 9{,}9192189. \text{ n} \end{cases}$$

$$\text{Log. } (c \sin\delta \sin\mu) = -3{,}2504683$$
$$+2{,}3846938$$
$$\text{Log. Tang. } x = -10{,}8657745 - 10 \text{ gibt } -82^0\ 14'\ 35'',4$$

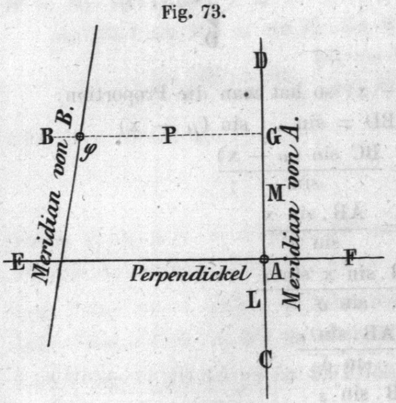
$$\text{Log. } b = 3{,}6360865$$
$$\text{Log. } \sin\varepsilon = 9{,}5215320$$
$$\text{Log. } (b \sin\varepsilon = +3{,}1576185 = +1437{,}54$$
$$-1195{,}05$$
$$b \sin\varepsilon + c \sin\delta \cos\mu = +242{,}49$$
$$\text{Log. } 242{,}49 = 2{,}3846938$$

daher Winkel $x = 180^0 - 82^0\ 14'\ 35'',4 = 97^0\ 45'\ 24'',6$

Mit x sind alle Winkel des Vierecks ABCD bestimmt, und folglich die unbekannten Seiten leicht zu finden.

§. 140.

Fig. 73.



5) Aus der geographischen Lage zweier Punkte A und B die Coordinaten des einen Punktes B in Bezug auf den Meridian und Perpendikel des andern A zu bestimmen. Nach Oriani.

Es sey L die geographische Breite des Orts A, für dessen Meridian CD und Perpendikel EF die Coordinaten des Punktes B berechnet werden sollen. φ sey die geographische Breite des Orts B und u der Längenunterschied von A und B.

Die Abscisse B sey = AG = M und seine Ordinate BG = P Toisen. Dann sey ferner b = der halben kleinen Erdaxe und e = der Excentricität.

Auflösung. Man berechne zuerst zwei Hülfswinkel λ' und ψ mittelst der Formeln

$$1)\ \text{Tang. } \lambda' = \frac{\text{Tang. } \varphi}{\cos u} \text{ und } 2)\ \sin\psi = \sin u \cos\varphi$$

dann sey die Breite des Fusspunkts G = λ so ist

$$3)\ \lambda = \lambda' + \tfrac{1}{2}\, e^2\, \psi'' \sin\lambda' \cos^2\lambda' \text{ Tang. } u.$$

Hieraus hat man $4)\ \dfrac{M}{b \sin 1''} = (\lambda - L) + \tfrac{1}{4}\, e^2 \left[(\lambda - L) - \dfrac{3 \sin(\lambda - L) \cos(\lambda + L)}{\sin 1''} \right] = N.$

so ist $M = b \sin 1''\ N$ (Toisen).

Ferner berechne man z nach der Gleichung $5)\ \cos z = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\lambda}$ und man erhält:

$$6)\ \frac{P}{b \sin 1''} = Z + \tfrac{1}{8}\, e^2 \sin^2\lambda \left(2\ Z'' + \frac{3 \sin 2\ Z}{\sin 1''} \right) = Q$$

so ist $P = b \sin 1''\ Q$ (in Toisen).