Log. sin b	= 5,2557043.4	Log. sin c	= 5,2084207
Log. sin B	= 9,9999897.2	Log. sin B	= 9,9999897.2
	5,2556940.6		5,2084104.2
Log. sin W	= 9,8733283	Log. sin R	= 9,8260446.3
Log. sin a	= 5,3823657.6	Log. sin a	= 5,3823657.9
red. ad arc	= + 84.6	red. ad arc	= + 84.6
Log. a	= 5,3823742.2	Log. a	= 5,3823742.5

folgl. RW = 241198,29 württemb. Fuss
= 212673,20 pariser Fuss.

§. 138.

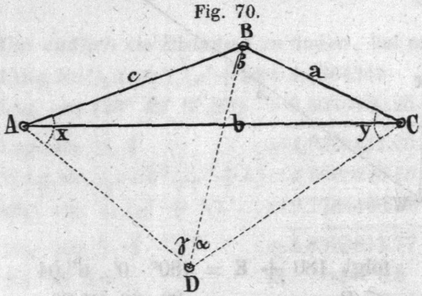


Fig. 70.

3) Aus 3 Punkten A, B, C, deren Lage gegeben ist, einen vierten Punkt D sphärisch zu bestimmen, wenn noch die den Seiten AB, BC und AC gegenüber liegenden Winkel γ, α und β gegeben sind. Nach v. Bohnenberger.

Im △ ABD ist: sin c : sin BD = sin γ : sin x
und im △ BCD ist: sin a : sin BD = sin α : sin y

$$\text{folgl. sin BD} = \frac{\sin c \sin x}{\sin \gamma} = \frac{\sin a \sin y}{\sin \alpha}$$

daher sin c sin x sin α = sin a sin y sin γ
woraus sin x : sin y = sin a sin γ : sin c sin α
und weil im △ ABC sin A : sin C = sin a : sin c so ist auch: sin x : sin y = sin A sin γ : sin C sin α und setzt man I) Tang. $w = \frac{\sin A \sin \gamma}{\sin C \sin \alpha} = \frac{\sin a \sin \gamma}{\sin c \sin \alpha}$ so ist auch

$$\sin x : \sin y = \text{Tang. } w : 1$$

folgl. II) Tang. $\frac{1}{2}$ (x − y) = Tang. (w − 45) Tang. $\frac{1}{2}$ (x + y).

Bezeichnet man nun den von dem △ ABC bekannten sphärischen Excess mit E, und den des Dreiecks ACD mit E′, so ist in dem Viereck ABCD die Summe der sphärischen Winkel: B + D + x + y = 360° + E + E′.

Da aber B + D = $\beta + \gamma + \alpha$ bekannt sind, so ziehe man sie zu beiden Seiten der Gleichung ab, und man hat:

$$x + y = 360^0 + E + E' - (B + D) \text{ oder}$$
$$x + y = 360^0 + E - (B + \alpha + \gamma) + E' \text{ und setzt man nun:}$$
$$360^0 + E - (B + \alpha + \gamma) = 2\,S \text{ so ist auch}$$
$$x + y = 2\,S + E' \text{ so wie } \tfrac{1}{2}(x + y) = S + \frac{E'}{2}$$

und durch Substitution in II ist

$$\text{III Tang. } \tfrac{1}{2}(x - y) = \text{Tang. } (w - 45^0) \text{ Tang. } \left(S + \frac{E'}{2}\right).$$

Lässt man aber E′ einstweilen weg, so findet man aus

Tang. (w − 45°) Tang. S

den Werth von Tang. $\frac{1}{2}$ (x − y) ganz nahe, und man kann mit dessen Hülfe aus $\frac{1}{2}$ (x − y) und $\frac{1}{2}$ (x + y) die Grössen x und y näherungsweise bestimmen, so dass man den sphär.

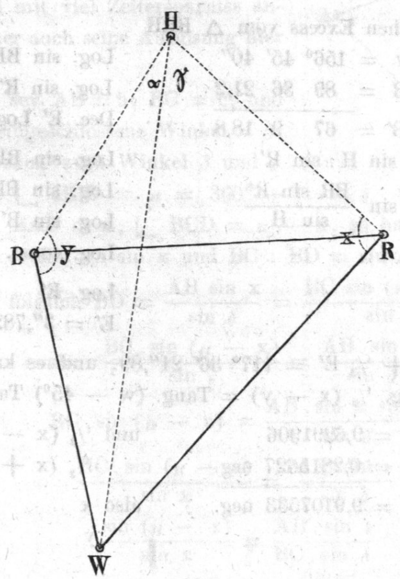
Excess E' vom $\triangle$ ACD, so genau als nöthig ist, bestimmen kann. Ist dann auch dieses E' bekannt, und damit $S + \frac{E'}{2}$ so kann Tang. $\frac{1}{2}$ (x — y) = Tang. (w — 45°) Tang. $\left(S + \frac{E'}{2}\right)$ genau bestimmt werden.

Anmerkung. Sind die zwei auf dem gesuchten Punkt gemessenen Winkel $\gamma + \alpha$ grösser als 180°, so fällt der gesuchte Punkt in das gegebene Dreieck ABC und der sphärische Excess E' des gesuchten Dreiecks ACD ist negativ. Wenn der mittlere Punkt B mit dem gesuchten Punkt D auf einer Seite von AC liegt, so ist statt des dieser Seite gegenüberliegenden Winkels im gegebenen Dreieck, dessen Supplement zu 360° zu nehmen, und der sphärische Excess E des gegebenen Dreiecks wird negativ.

Beispiel.

Es sey der Punkt Heroldstatt aus Bussen, Roggenburg und Waldburg zu bestimmen, wenn $\alpha = 13^0\ 51'\ 35'',4$; $\gamma = 62^0\ 35'\ 54'',3$, so wie die Coordinaten von B, R und W gegeben sind.

Fig. 71.



Im $\triangle$ RWB ist Log. sin BR = 5,2557043.4

und R =	42°	3'	48'',51	γ	=	62°	35'	54'',3
W =	48	19	56,33	α	=	13	51	35,4
B =	89	36	21,20	$\gamma + \alpha$	=	76	27	29,7
	180	0	6,04	W	=	48	19	56,33
				W + γ + α	=	124	47	26,03

360° + E — (W + γ + α) = 360° 0' 6'',04 — 124° 47' 26'',03 = 2 S

folgl. 2 S = 235 12 40,01

und S = 117 36 20,0 = $\frac{1}{2}$ (x + y) nahe.

Für Tang. $w = \frac{\sin R \sin \gamma}{\sin B \sin \alpha}$ ist Log. sin R = 9,8260446.3 Log. sin B = 9,9999897.2

Log. sin γ = 9,9483164.9 Log. sin α = 9,3793915.6

9,7743611.2 9,3793812.8

9,3793812.8

Log. Tang. w = 0,3949798.4 w = 68° 3′ 48″,94

− 45

w − 45° = 23 3 48,94

Lg. Tg. (w − 45°) = 9,6291906

Log. Tang. S = 0,28157 neg.

Lg. Tg. ½ (x − y) = 9,91076 neg. also ½ (x − y) = − 39° 9′ 20″ } nahezu richtig.
½ (x + y) = 117 36 20

x = 78 27 0

y = 156 45 40

Nun ist für den sphärischen Excess vom △ BRH

x = 78° 27′ 0″,0	y = 156° 45′ 40″	Log. sin BR = 5,25570
R = 42 3 48,51	B = 89 36 21,2	Log. sin R′ = 9,77321
R′ = 36 23 11,49	B′ = 67 9 18,8	Dec. E′ Log. sin H = 0,01225

sin BR : sin BH = sin H : sin R′ Log. sin BH = 5,04096

$\sin BH = \sin \frac{BR \sin R'}{\sin H}$

Log. sin BR = 5,25570

Log. sin B′ = 9,96452

Log. const. = 0,31663

Log. E′ = 0,57781

E′ = 3″,782 und ½ E′ = 1″,89

Folgl. ½ (x + y = S + ½ E′ = 117° 36′ 21″,89, und es kann nun genau berechnet werden die Formel: Tang. ½ (x − y) = Tang. (w − 45°) Tang. (S + ½ E′)

Log. Tang. (w − 45°) = 9,6291906 und ½ (x − y) = − 39° 9′ 14″,05

Log. Tang. (S + ½ E′) = 0,2815627 neg. ½ (x + y) = 117 36 21,89

Log. Tang. ½ (x − y) = 9,9107533 neg. also x = 78 27 7,84

y = 156 45 35,94

Um WH zu finden hat man nun

1) $\sin WH = \frac{\sin Rw \sin x}{\sin \gamma}$	2) $\sin WH = \frac{\sin BW \sin y}{\sin \alpha}$
Log. sin RW = 5,3823657.6	Log. sin BW = 5.2084207
Log. sin x = 9,9911187.7	Log. sin y = 9.5961391.9
5,3734845.3	4.8045598.9
Log. sin γ = 9,9483164.9	Log. sin α = 9.3793915.6
Log. sin WH = 5,4251680.4	Log. sin WH = 5.4251683.3
red. ad arc + 103.1	red ad arc + 103.1
Log. WH = 5,4251783.5	Log. WH = 5.4251786.4

WH = 266181,91 württ. Fuss.

Berechnet man endlich auch die 2 Seiten BH und RH im $\triangle$ BRH, so ist

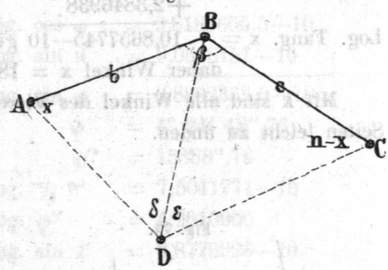
$$\sin BH = \frac{\sin BR \sin R}{\sin H} \quad \text{und} \quad \sin RH = \frac{\sin BR \sin B}{\sin H}$$

$B = 67^0 \; 9' \; 14'',74$	Log. sin BR = 5,2557043.4	Log. sin BR = 5,2557043.4
$R = 36 \; 23 \; 19,33$	Log. sin R = 9,7732451.8	Log. sin B = 9,9645200.2
$H = 76 \; 27 \; 29,7$	5,0289495.2	5,2202243.6
$180 \; 0 \; 3,77$	Log. sin H = 9,9877554.5	Log. sin H = 9,9877554.5
	Log. sin BH = 5,0411940.7	Log. sin RH = 5,2324689.1
	red. ad arc + 17.6	red. ad arc + 42.5
	Log. BH = 5,0411958.3	Log. RH = 5,2324731.6

§. 139.

4) Das Problem aus 3 gegebenen Punkten, A, B, C, den vierten D nach der ebenen Trigonometrie zu bestimmen, ist bei den Dreieckspunkten dritten Ranges oft und mit viel Zeitersparniss angewendet worden, daher auch seine Auflösung hier folgen soll.

Fig. 72.



Auflösung. Es sey AB = b; BC = c; und der von AB und BC eingeschlossene Winkel $= \beta$; und die auf D gemessenen zwei Winkel δ und ε. Ist dann $\llcorner$ BAD + $\llcorner$ BCD = $\mu = 360^0 - (\beta + \delta + \varepsilon)$ und $\llcorner$ BAD = x, $\llcorner$ BCD = $\mu - x$, so hat man die Proportion:

$$AB : BD = \sin \delta : \sin x \text{ und } BC : BD = \sin \varepsilon : \sin (\mu - x)$$

$$\text{folglich } BD = \frac{AB \sin x}{\sin \delta} = \frac{BC \sin (\mu - x)}{\sin \varepsilon}$$

$$\text{also: } \frac{BC . \sin (\mu - x)}{\sin \varepsilon} = \frac{AB . \sin x}{\sin \delta}$$

$$BC . \sin (\mu - x) = \frac{AB . \sin x \sin \varepsilon}{\sin \delta}$$

$$\frac{BC . \sin (\mu - x)}{\sin x} = \frac{AB . \sin \varepsilon}{\sin \delta}$$

$$\frac{\sin (\mu - x)}{\sin x} = \frac{AB . \sin \varepsilon}{BC . \sin \delta}$$

$$\frac{\sin \mu \cos x - \cos \mu \sin x}{\sin x} = \frac{AB . \sin \varepsilon}{BC . \sin \delta} = \frac{\sin \mu \cos x}{\sin x} - \frac{\cos \mu \sin x}{\sin x}$$

$$\frac{\sin \mu \cos x}{\sin x} - \cos \mu = \frac{AB . \sin \varepsilon}{BC . \sin \delta}$$

$$\text{daher } \sin \mu \, \text{Cotg. } x - \cos \mu = \frac{AB . \sin \varepsilon}{BC . \sin \delta} = \frac{b \sin \varepsilon}{c \sin \delta}$$

$$\sin \mu \, \text{Cotg. } x = \frac{b \sin \varepsilon}{c \sin \delta} + \cos \mu = \frac{b \sin \varepsilon + c \sin \delta \cos \mu}{c \sin \delta}$$

$$\text{Cotg. } x = \frac{b \sin \varepsilon + c \sin \delta \cos \mu}{c \sin \delta \sin \mu} = \frac{1}{\text{Tang. } x}$$

$$\text{folglich Tang. } x = \frac{c \sin \delta \sin \mu}{b \sin \varepsilon + c \sin \delta \cos \mu}$$