$\text{Log. } {}^1/_2\,(y + y') = 4.6088293.5$
$\text{red. ad sin} = -\ 2.39$
$\text{Cpl. ar. Lg. cos } {}^1/_2\,(x - x') = -\ 12.96$
$2)\ \text{Lg. sin } {}^1/_2\,\delta \sin {}^1/_2\,(\alpha' + k) = 4,6088278.15 \text{ pos.}$

1 von 2 abgezogen gibt:

$\text{Log. Tang. } {}^1/_2\,(\alpha' + k) = 9,8724036.15 \text{ pos.}$
${}^1/_2\,(\alpha' + k) = 36^0\ 42'\ 6'',29$
${}^1/_2\,(\alpha' - k) = 1,11$

$\text{folgl. NSI} = \alpha' = 36\ 42\ 7,40$
$k = 36\ 42\ 5,18$

$\text{und } 180 + k = \text{NIS} = \alpha = 216\ 42\ 5,18$

Um endlich die Distanz δ zu finden, hat man:

$1)\ \text{Lg. sin } {}^1/_2\,\delta \cos {}^1/_2\,(\alpha' + k) = 4,7364242$
$\text{Log. cos } (36^0\ 42'\ 6'',29) = 9,9040430.25-10$

$\text{Log. sin } {}^1/_2\,\delta = 4,8323811.75$
$2)\ \text{Lg. sin } {}^1/_2\,\delta \sin {}^1/_2\,(\alpha' + k) = 4,6088278.15$
$\text{Log. sin } {}^1/_2\,(\alpha' + k) = 9,7764466.38$

$\text{Log. sin } {}^1/_2\,\delta = 4,8323811.77$
$\text{red. ad arc} = +\ 6.8$

$\text{Log. } {}^1/_2\,\delta = 4,8323818.57$
$\text{Log. } 2 = 0,3010300$

$\text{folgl. Log. } \delta = 5,1334118.57$
$\text{red. in par. F.} = 0,0546614$

$\text{Log. } \delta = 5,0787504.57$

$\text{Log. cos } 7'\ 35'',23 = 9,9999989.5$

folglich:

$\text{Cpl. ar. Lg. cos } {}^1/_2\,(y + y') = 0,0000010.5$ [1]

Dieses Cpl. ist aber genau $= \dfrac{{}^1/_2\,(y + y')^2\, M}{2\, r'^{\,2}}$

$\text{Denn Log. } {}^1/_2\,(y + y')^2 = 9,3843778.4$
$\text{Compl. Log. } \dfrac{m}{2\, r'^{\,2}} = 4,6399935-20$

$4,0243713.4-10$

folglich:

$\text{Cpl. ar. Lg. cos } {}^1/_2\,(y + y') = 0,0000010.57$

Ferner ist:

$\text{Log. } {}^1/_2\,(x - x')^2 = 9,47285$
$\text{C. Lg. } \dfrac{m}{2\, r'^{\,2}} = 4,63999-20$

$4,11284-10$ und

$\text{Cpl. ar. Lg. cos } {}^1/_2\,(x - x') = 0,0000012.96$

Formel 3 gibt

$\text{Log. } {}^1/_2\,(x - x') = 4,7364256$
$\text{Log. } {}^1/_2\,(y - y') = 4,6921889$
$\text{Com. Log. } \dfrac{1}{r'^2 \sin 1''} = 0,6176643-10$

$\text{Log. } {}^1/_2\,(\alpha' - k) = 0,0462788$
$\text{und } {}^1/_2\,(\alpha' - k) = 1''112$

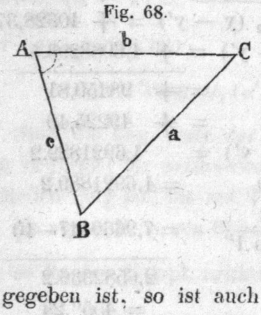
und $\delta = 135960,20$ württ. F. s. oben Δ 43

$\delta = 119881,04$ par Fuss.

§. 137.

2) Aus einem gegebenen sphärischen Winkel und zwei bekannten ihn einschliessenden Seiten die übrigen Stücke des sphärischen Dreiecks zu bestimmen. v. Bohnenberger.

Fig. 68.



Es seyen im Δ ABC die zwei Seiten b und c und der von ihnen eingeschlossene Winkel A gegeben, so ist:

$$\sin b : \sin c = \sin B : \sin C \text{ daher auch}$$

$$\sin b + \sin c : \sin b - \sin c = \text{Tg. } {}^1/_2\,(B + C) : \text{Tg. } {}^1/_2\,(B - C)$$

und führt man einen Hülfswinkel w ein, dass $\text{Tg. } w = \dfrac{\sin b.}{\sin c}$

so ist:

$$\text{Tang. } {}^1/_2\,(B - C) = \text{Tang. } (w - 45^0)\ \text{Tang. } {}^1/_2\,(B + C).$$

Weil aber auch der sphärische Excess $= E = \dfrac{b\, c \sin A}{2 r'^{\,2} \sin 1''}$ gegeben ist, so ist auch ${}^1/_2\,(B + C) = {}^1/_2\,(180 + E - A)$ und also die Winkel B

[1] Dieses Complement ist immer sehr nahe gleich dem dreifachen m in der Additamententabelle Absch. IV. Für Log. ${}^1/_2\,(y + y') = 4,69\ldots$ findet man 3,5, folglich $3.\ 3,5 = 10,5$.

und C zu bestimmen. Sind hiernach alle 3 sphärische Winkel des Dreiecks bekannt, so wie auch Log. b und Log. c oder Log. sin b und Log. sin c aus den angrenzenden Dreiecken gegeben, so ist die Seite a leicht zu bestimmen. Wenn aber der gegebene Winkel A klein ist, oder wenig von zwei rechten abweicht, so kann die dritte Seite auf die gewöhnliche Art nicht genau bestimmt werden, und alsdann hat man folgende Formeln:

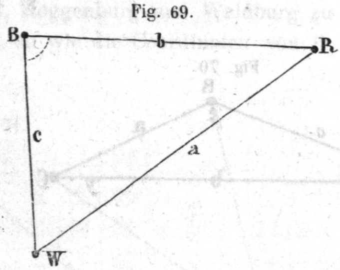
$$\sin {}^1/_2 (B - C) \sin {}^1/_2 a = \sin {}^1/_2 (b - c) \cos {}^1/_2 A \text{ und}$$
$$\cos {}^1/_2 (B - C) \sin {}^1/_2 a = \sin {}^1/_2 (b + c) \sin {}^1/_2 A$$

wo aus der Additamententabelle Log. sin $^1/_2$ (b — c) und Log. sin $^1/_2$ (b + c) bestimmt, und mit deren Hülfe $^1/_2$ (B — C) und die dritte Seite a leicht gefunden werden kann.

Beispiel.

In Dreieck: RBW (Roggenburg, Bussen, Waldburg) dessen Winkel R und W nicht beobachtet werden konnten, ist gegeben: der sphärische ∟ B = 89° 36′ 21″,20 und Log. sin BR = Log. sin b = 5,2557043.4 und Log. sin BW = Log. sin c = 5,2084207.

Fig. 69.



Sphärischer Excess.

Log. b	=	5,2557090.6
Log. c	=	5,2084245.1
Log. sin B	=	9,9999897.2
C Log. 2 r′ ² sin 1″	=	0,3166343—10
Log. E	=	0,7807575
E	=	6″,036

folgl. 180 + E	=	180° 0′ 6″,04
< B	=	89 36 21,20
also W + R	=	90 23 44,84
und $^1/_2$ (W + R)	=	45 11 52,42

Log. sin b	=	5,2557043.4
Log. sin c	=	5,2084207
Log. Tang. W	=	0,0472836.4
W	=	48° 6′ 46″,38
		45°
W — 45°	=	3° 6′ 46″,38

Log. Tang. (w — 45)	=	8,7354678
Log. Tang. $^1/_2$ (W + R)	=	0,0030001
Log. Tang. $^1/_2$ (W — R)	=	8,7384679
und $^1/_2$ (W — R)	=	3° 8′ 3″,91
$^1/_2$ (W + R)	=	45 11 52,42
W	=	48 19 56,33
R	=	42 3 48,51
B	=	89 36 21,20
		180 0 6,04

Für die Bestimmung von a hat man nun:

sin b : sin a = sin W : sin B   sin c : sin a = sin R : sin B

$$\sin a = \frac{\sin b \sin B}{\sin W} \qquad \sin a = \frac{\sin c \sin B}{\sin R}$$

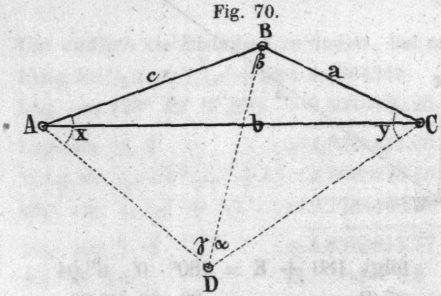
Log. sin b $= 5{,}2557043.4$
Log. sin B $= 9{,}9999897.2$
$5{,}2556940.6$
Log. sin W $= 9{,}8733283$
Log. sin a $= 5{,}3823657.6$
red. ad arc $= + 84.6$
Log. a $= 5{,}3823742.2$

Log. sin c $= 5{,}2084207$
Log. sin B $= 9{,}9999897.2$
$5{,}2084104.2$
Log. sin R $= 9{,}8260446.3$
Log. sin a $= 5{,}3823657.9$
red. ad arc $= + 84.6$
Log. a $= 5{,}3823742.5$

folgl. RW $= 241198{,}29$ württemb. Fuss
$= 212673{,}20$ pariser Fuss.

§. 138.

Fig. 70.



3) Aus 3 Punkten A, B, C, deren Lage gegeben ist, einen vierten Punkt D sphärisch zu bestimmen, wenn noch die den Seiten AB, BC und AC gegenüber liegenden Winkel γ, α und β gegeben sind. Nach v. Bohnenberger.

Im $\triangle$ ABD ist: $\sin c : \sin BD = \sin\gamma : \sin x$
und im $\triangle$ BCD ist: $\sin a : \sin BD = \sin\alpha : \sin y$

folgl. $\sin BD = \dfrac{\sin c \sin x}{\sin\gamma} = \dfrac{\sin a \sin y}{\sin\alpha}$

daher $\sin c \sin x \sin\alpha = \sin a \sin y \sin\gamma$
woraus $\sin x : \sin y = \sin a \sin\gamma : \sin c \sin\alpha$

und weil im $\triangle$ ABC $\sin A : \sin C = \sin a : \sin c$ so ist auch: $\sin x : \sin y = \sin A \sin\gamma : \sin C \sin\alpha$ und setzt man I) $\text{Tang. } w = \dfrac{\sin A \sin\gamma}{\sin C \sin\alpha} = \dfrac{\sin a \sin\gamma}{\sin c \sin\alpha}$ so ist auch

$$\sin x : \sin y = \text{Tang. } w : 1$$

folgl. II) $\text{Tang. } {}^1\!/_2\,(x - y) = \text{Tang. }(w - 45)\ \text{Tang. } {}^1\!/_2\,(x + y)$.

Bezeichnet man nun den von dem $\triangle$ ABC bekannten sphärischen Excess mit E, und den des Dreiecks ACD mit E′, so ist in dem Viereck ABCD die Summe der sphärischen Winkel: $B + D + x + y = 360^0 + E + E'$.

Da aber $B + D = \beta + \gamma + \alpha$ bekannt sind, so ziehe man sie zu beiden Seiten der Gleichung ab, und man hat:

$$x + y = 360^0 + E + E' - (B + D) \text{ oder}$$
$$x + y = 360^0 + E - (B + \alpha + \gamma) + E' \text{ und setzt man nun:}$$
$$360^0 + E - (B + \alpha + \gamma) = 2\,S \text{ so ist auch}$$
$$x + y = 2\,S + E' \text{ so wie } {}^1\!/_2\,(x + y) = S + \frac{E'}{2}$$

und durch Substitution in II ist

$$\text{III Tang. } {}^1\!/_2\,(x - y) = \text{Tang. }(w - 45^0)\ \text{Tang. }\left(S + \frac{E'}{2}\right).$$

Lässt man aber E′ einstweilen weg, so findet man aus

$$\text{Tang. }(w - 45^0)\ \text{Tang. } S$$

den Werth von Tang. ${}^1\!/_2\,(x - y)$ ganz nahe, und man kann mit dessen Hülfe aus ${}^1\!/_2\,(x - y)$ und ${}^1\!/_2\,(x + y)$ die Grössen x und y näherungsweise bestimmen, so dass man den sphär.