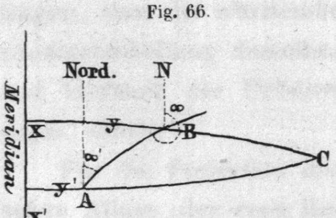
Fünfzehnter Abschnitt.

Anhang.

§. 136.

Mathematische Probleme, die sich auf die Landesvermessung beziehen.

Fig. 66.



1) *Die sphärischen Coordinaten zweier Punkte sind gegeben, man soll ihren Abstand und ihre gegenseitigen Directionswinkel bestimmen.* v. Bohnenberger:

Es seyen die beiden Punkte A und B im nordöstlichen Quadranten, und ihre

Abscissen $+ x'$ und $+ x$

Ordinaten $+ y'$ und $+ y$ und ihr Abstand $= \delta$.

Der Richtungswinkel des Punktes A, dessen Coordinaten x' und y' sind, aus dem Punkte B, dessen Coordinaten x und y sind, gesehen, sey $= \alpha$, und der Richtungswinkel des Punktes B aus dem Punkt A gesehen, sey α'; auch sey $\alpha = 180 + k$; so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sin {}^1/_2\,\delta \sin {}^1/_2\,(\alpha' + k) = \sin {}^1/_2\,(y - y') \cos {}^1/_2\,(x - x') \\ 2)\ \sin {}^1/_2\,\delta \cos {}^1/_2\,(\alpha' + k) = \sin {}^1/_2\,(x - x') \cos {}^1/_2\,(y + y') \end{array}\right\}\ \textit{streng richtige}\ \text{Formeln.}$$

$$3)\ {}^1/_2\,(\alpha' - k) = \frac{{}^1/_2\,(x - x') \cdot {}^1/_2\,(y + y')}{r'^2 \sin 1''}$$ diese Formel ist näherungsweise richtig, aber ganz genau ist:

$$\text{Tang. } {}^1/_2\,(\alpha' - k) = \frac{\text{Tang. } {}^1/_2\,(x - x'),\ \sin {}^1/_2\,(y - y')}{\cos {}^1/_2\,(y - y')}.$$

Statt die Log. cosin der kleinen Bögen ${}^1/_2\,(x - x')$, ${}^1/_2\,(y + y')$ zu addiren, zieht man bequemer *ihr arithmetisches Complement* ab, welches, so lange der Bogen nicht über 20 Meilen lang ist, bis auf 7 Decimalstellen genau auf diese Weise kann berechnet werden.

Es sey z. B. w ein Bogen für den Vermessungshalbmesser r' dessen Log. $= 7{,}3483804$ ist, so ist das Compl. arithm. Log. cos $w = \frac{m}{2r'^2}\, w^2$, wo m der Modulus der Briggschen Logarithmen, und Log. $\frac{m}{2r'^2} = 4{,}6399935\text{—}20$ ist.

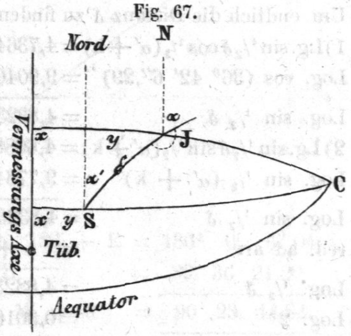
Denn es ist:

Log. m	$= 9,6377843-10$	und Log. r′	$= 7,3483804$
Log. r'^2	$= 14,6967608$	Log. sin 1″	$= 4,6855749-10$
Log. 2	$= 0,3010300$	Log. (r′ sin 1″)	$= 2,0339553$
Log. 2 r'^2	$= 14,9977908$	Cpl. Log. $\left(\frac{1}{r' \sin 1''}\right)$	$= 7,9660447-10$
Log. $\left(\frac{m}{2r'^2}\right)$	$= 4,6399935-20$		

$$\text{Log. } r'^2 = 14,6967608$$
$$\text{Log. sin } 1'' = 4,6855749-10$$
$$\text{Log. } (r'^2 \sin 1'') = 9,3823357$$
$$\text{Compl. Log. } \left(\frac{1}{r'^2 \sin 1''}\right) = 0,6176643-10$$

Dividirt man Form. Nro. 1 mit Form. Nro. 2, so erhält man Tang. $\frac{1}{2}$ $(\alpha' + k)$, und sodann sin $\frac{1}{2}$ δ, sowohl aus Nro. 1 als auch zur Controle aus Nro. 2: die Fälle ausgenommen, wo sin $\frac{1}{2}$ $(\alpha' + k)$ oder cos $\frac{1}{2}$ $(\alpha' + k)$ sehr klein ausfällt, und im ersten Fall Nro. 2, im zweiten Nro. 1 das genaue Resultat gibt.

Fig. 67.



Da Tang. $\frac{1}{2}$ $(\alpha' + k)$ an sich es unbestimmt lässt, ob $\frac{1}{2}(\alpha' + k)$ im ersten oder dritten Quadranten, im Fall sie positiv ist, oder im zweiten oder vierten Quadranten, im Fall sie negativ ist, genommen werden soll, so wird die Zweideutigkeit hier immer dadurch entschieden, dass sin $\frac{1}{2}$ δ sowohl aus Nro. 1 als auch aus Nro. 2 positiv herauskommen, mithin sin $\frac{1}{2}$ $(\alpha' + k)$ mit $\frac{1}{2}$ $(y - y')$ und cos $\frac{1}{2}$ $(\alpha' + k)$ mit $\frac{1}{2}$ $(x - x')$ einerlei Zeichen bekommen muss.

Beispiel.

Jagdhaus Stocksberg	x	$= + 212699,95$	y	$= + 89853,78$
Solitude	x′	$= + 103692,60$	y′	$= + 8597,03$
	x − x′	$= + 109007,35$	y − y′	$= + 81256,75$
	$\frac{1}{2}$ (x − x)	$= + 54503,67$	$\frac{1}{2}$ (y − y′)	$= + 40628,37$

Log. $\frac{1}{2}$ (x − x′) = 4,7364256.8 Log. $\frac{1}{2}$ (y − y′) = + 4,6088293.5

$$y + y' = + 98450,81$$
$$\tfrac{1}{2}(y + y') = + 49225,40$$
$$\text{Log. } \tfrac{1}{2}(y + y') = 4,6921889.2$$

Log. $\frac{1}{2}$ (x − x′)	$= 4,7364256.8$	Log. $\frac{1}{2}$ (y + y′)	$= 4,6921889.2$
red. ad sin	$= - 4.3$	Compl. Log. $\frac{1}{r' \sin 1''}$	$= 7,9660447-10$
Cpl. ar. Lg. cos $\frac{1}{2}$ (y + y′)	$= - 10.5$		$2,6582336.2$
1) Lg. sin $\frac{1}{2}\delta$ cos $\frac{1}{2}(\alpha' + k)$	$= 4,7364242$ pos.		$= 455'',23$

$$\text{und } \frac{\frac{1}{2}(y + y')}{r' \sin 1''} = 0^0\ 7'\ 35'',23$$

Log. $\frac{1}{2}(y + y')$	$= 4.6088293.5$
red. ad sin	$= \quad - 2.39$
Cpl. ar. Lg. cos $\frac{1}{2}(x - x')$	$= \quad - 12.96$
2) Lg. sin $\frac{1}{2}\delta$ sin $\frac{1}{2}(\alpha' + k)$	$= 4,6088278.15$ pos.

1 von 2 abgezogen gibt:

Log. Tang. $\frac{1}{2}(\alpha' + k)$	$= 9,8724036.15$ pos.
$\frac{1}{2}(\alpha' + k)$	$= 36^0\ 42'\ 6'',29$
$\frac{1}{2}(\alpha' - k)$	$= \quad 1,11$
folgl. NSI $= \alpha'$	$= 36\ \ 42\ \ 7,40$
k	$= 36\ \ 42\ \ 5,18$
und $180 + k =$ NIS $= \alpha$	$= 216\ \ 42\ \ 5,18$

Um endlich die Distanz δ zu finden, hat man:

1) Lg. sin $\frac{1}{2}\delta$ cos $\frac{1}{2}(\alpha' + k)$	$= 4,7364242$
Log. cos $(36^0\ 42'\ 6'',29)$	$= 9,9040430.25-10$
Log. sin $\frac{1}{2}\delta$	$= 4,8323811.75$
2) Lg. sin $\frac{1}{2}\delta$ sin $\frac{1}{2}(\alpha' + k)$	$= 4,6088278.15$
Log. sin $\frac{1}{2}(\alpha' + k)$	$= 9,7764466.38$
Log. sin $\frac{1}{2}\delta$	$= 4,8323811.77$
red. ad arc	$= + \ 6.8$
Log. $\frac{1}{2}\delta$	$= 4,8323818.57$
Log. 2	$= 0,3010300$
folgl. Log. δ	$= 5,1334118.57$
red. in par. F.	$= 0,0546614$
Log. δ	$= 5,0787504.57$

Log. cos $7'\ 35'',23$	$= 9,9999989.5$
folglich:	
Cpl. ar. Lg. cos $\frac{1}{2}(y + y')$	$= 0,0000010.5$ [1]
Dieses Cpl. ist aber genau	$= \dfrac{\frac{1}{2}(y + y'),^2 M}{2 r'^2}$
Denn Log. $\frac{1}{2}(y + y')^2$	$= 9,3843778.4$
Compl. Log. $\dfrac{m}{2 r'^2}$	$= 4,6399935-20$
	$4,0243713.4-10$
folglich:	
Cpl. ar. Lg. cos $\frac{1}{2}(y + y')$	$= 0,0000010.57$
Ferner ist:	
Log. $\frac{1}{2}(x - x')^2$	$= 9,47285$
C. Lg. $\dfrac{m}{2 r'^2}$	$= 4,63999-20$
	$4,11284-10$ und
Cpl. ar. Lg. cos $\frac{1}{2}(x - x')$	$= 0,0000012.96$
Formel 3 gibt	
Log. $\frac{1}{2}(x - x')$	$= 4,7364256$
Log. $\frac{1}{2}(y - y')$	$= 4,6921889$
Com. Log. $\dfrac{1}{r'^2 \sin 1''}$	$= 0,6176643-10$
Log. $\frac{1}{2}(\alpha' - k)$	$= 0,0462788$
und $\frac{1}{2}(\alpha' - k)$	$= 1''112$

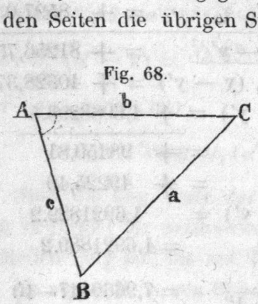
und $\delta = 135960,20$ württ. F. s. oben Δ 43

$\delta = 119881,04$ par Fuss.

§. 137.

2) Aus einem gegebenen sphärischen Winkel und zwei bekannten ihn einschliessenden Seiten die übrigen Stücke des sphärischen Dreiecks zu bestimmen. v. Bohnenberger.

Fig. 68.



Es seyen im Δ ABC die zwei Seiten b und c und der von ihnen eingeschlossene Winkel A gegeben, so ist:

$$\sin b : \sin c = \sin B : \sin C \text{ daher auch}$$

$$\sin b + \sin c : \sin b - \sin c = \text{Tg. } \tfrac{1}{2}(B + C) : \text{Tg. } \tfrac{1}{2}(B - C)$$

und führt man einen Hülfswinkel w ein, dass Tg. w $= \dfrac{\sin b.}{\sin c}$

so ist:

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}(B - C) = \text{Tang. } (w - 45^0) \text{ Tang. } \tfrac{1}{2}(B + C).$$

Weil aber auch der sphärische Excess $= E = \dfrac{b\, c \sin A}{2 r'^2 \sin 1''}$ gegeben ist, so ist auch $\frac{1}{2}(B + C) = \frac{1}{2}(180 + E - A)$ und also die Winkel B

[1] Dieses Complement ist immer sehr nahe gleich dem dreifachen m in der Additamententabelle Absch. IV. Für Log. $\frac{1}{2}(y + y') = 4,69 \ldots$ findet man 3,5, folglich $3.\ 3,5 = 10,5$.