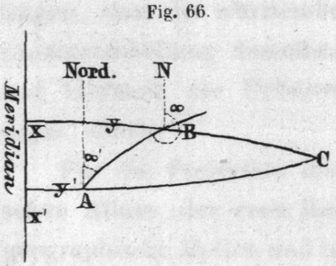
Fünfzehnter Abschnitt.

Anhang.

§. 136.

Mathematische Probleme, die sich auf die Landesvermessung beziehen.

Fig. 66.



1) *Die sphärischen Coordinaten zweier Punkte sind gegeben, man soll ihren Abstand und ihre gegenseitigen Directionswinkel bestimmen.* v. Bohnenberger:

Es seyen die beiden Punkte A und B im nordöstlichen Quadranten, und ihre

Abscissen $+ x'$ und $+ x$

Ordinaten $+ y'$ und $+ y$ und ihr Abstand $= \delta$.

Der Richtungswinkel des Punktes A, dessen Coordinaten x' und y' sind, aus dem Punkte B, dessen Coordinaten x und y sind, gesehen, sey $= \alpha$, und der Richtungswinkel des Punktes B aus dem Punkt A gesehen, sey α'; auch sey $\alpha = 180 + k$; so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sin {}^1/_2\, \delta \sin {}^1/_2\, (\alpha' + k) = \sin {}^1/_2\, (y - y') \cos {}^1/_2\, (x - x') \\ 2)\ \sin {}^1/_2\, \delta \cos {}^1/_2\, (\alpha' + k) = \sin {}^1/_2\, (x - x') \cos {}^1/_2\, (y + y') \end{array}\right\} \textit{streng richtige Formeln.}$$

$$3)\ {}^1/_2\, (\alpha' - k) = \frac{{}^1/_2\, (x - x') \cdot {}^1/_2\, (y + y')}{r'^2 \sin 1''}$$ diese Formel ist näherungsweise richtig, aber ganz genau ist:

$$\text{Tang. } {}^1/_2\, (\alpha' - k) = \frac{\text{Tang. } {}^1/_2\, (x - x'), \sin {}^1/_2\, (y - y')}{\cos {}^1/_2\, (y - y')}.$$

Statt die Log. cosin der kleinen Bögen ${}^1/_2\, (x - x')$, ${}^1/_2\, (y + y')$ zu addiren, zieht man bequemer *ihr arithmetisches Complement ab*, welches, so lange der Bogen nicht über 20 Meilen lang ist, bis auf 7 Decimalstellen genau auf diese Weise kann berechnet werden.

Es sey z. B. w ein Bogen für den Vermessungshalbmesser r' dessen Log. = **7,3483804** ist, so ist das Compl. arithm. Log. cos $w = \frac{m}{2r'^2} w^2$, wo m der Modulus der Briggschen Logarithmen, und Log. $\frac{m}{2r'^2} = 4{,}6399935 - 20$ ist.

Denn es ist:

$\text{Log. m} = 9{,}6377843-10$ und $\text{Log. r}' = 7{,}3483804$

$\text{Log. r}'^2 = 14{,}6967608$ $\qquad$ $\text{Log. sin } 1'' = 4{,}6855749-10$

$\text{Log. } 2 = 0{,}3010300$ $\qquad$ $\text{Log. } (\text{r}' \sin 1'') = 2{,}0339553$

$\text{Log. } 2\,\text{r}'^2 = 14{,}9977908$ $\qquad$ $\text{Cpl. Log. } \left(\frac{1}{\text{r}' \sin 1''}\right) = 7{,}9660447-10$

$\text{Log. } \left(\frac{\text{m}}{2\,\text{r}'^2}\right) = 4{,}6399935-20$

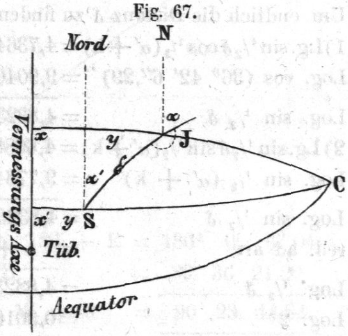
$\text{Log. r}'^2 = 14{,}6967608$

$\text{Log. sin } 1'' = 4{,}6855749-10$

$\text{Log. } (\text{r}'^2 \sin 1'') = 9{,}3823357$

$\text{Compl. Log. } \left(\frac{1}{\text{r}'^2 \sin 1''}\right) = 0{,}6176643-10$

Fig. 67.



Dividirt man Form. Nro. 1 mit Form. Nro. 2, so erhält man Tang. $\frac{1}{2}(\alpha' + \text{k})$, und sodann sin $\frac{1}{2}\delta$, sowohl aus Nro. 1 als auch zur Controle aus Nro. 2: die Fälle ausgenommen, wo sin $\frac{1}{2}(\alpha' + \text{k})$ oder cos $\frac{1}{2}(\alpha' + \text{k})$ sehr klein ausfällt, und im ersten Fall Nro. 2, im zweiten Nro. 1 das genaue Resultat gibt.

Da Tang. $\frac{1}{2}(\alpha' + \text{k})$ an sich es unbestimmt lässt, ob $\frac{1}{2}(\alpha' + \text{k})$ im ersten oder dritten Quadranten, im Fall sie positiv ist, oder im zweiten oder vierten Quadranten, im Fall sie negativ ist, genommen werden soll, so wird die Zweideutigkeit hier immer dadurch entschieden, dass sin $\frac{1}{2}\delta$ sowohl aus Nro. 1 als auch aus Nro. 2 positiv herauskommen, mithin sin $\frac{1}{2}(\alpha' + \text{k})$ mit $\frac{1}{2}(\text{y} - \text{y}')$ und cos $\frac{1}{2}(\alpha' + \text{k})$ mit $\frac{1}{2}(\text{x} - \text{x}')$ einerlei Zeichen bekommen muss.

Beispiel.

Jagdhaus Stocksberg $\text{x} = +\ 212699{,}95$ $\qquad$ $\text{y} = +\ 89853{,}78$

Solitude $\text{x}' = +\ 103692{,}60$ $\qquad$ $\text{y}' = +\ 8597{,}03$

$\text{x} - \text{x}' = +\ 109007{,}35$ $\qquad$ $\text{y} - \text{y}' = +\ 81256{,}75$

$\frac{1}{2}(\text{x} - \text{x}) = +\ 54503{,}67$ $\qquad$ $\frac{1}{2}(\text{y} - \text{y}') = +\ 40628{,}37$

$\text{Log. } \frac{1}{2}(\text{x} - \text{x}') = 4{,}7364256.8$ $\qquad$ $\text{Log. } \frac{1}{2}(\text{y} - \text{y}') = +\ 4{,}6088293.5$

$\text{y} + \text{y}' = +\ 98450{,}81$

$\frac{1}{2}(\text{y} + \text{y}') = +\ 49225{,}40$

$\text{Log. } \frac{1}{2}(\text{y} + \text{y}') = 4{,}6921889.2$

$\text{Log. } \frac{1}{2}(\text{x} - \text{x}') = 4{,}7364256.8$ $\qquad$ $\text{Log. } \frac{1}{2}(\text{y} + \text{y}') = 4{,}6921889.2$

$\text{red. ad sin} = -\ 4.3$ $\qquad$ $\text{Compl. Log. } \frac{1}{\text{r}' \sin 1''} = 7{,}9660447-10$

$\text{Cpl. ar. Lg. cos } \frac{1}{2}(\text{y} + \text{y}') = -\ 10.5$ $\qquad$ $2{,}6582336.2$

1) $\text{Lg. sin } \frac{1}{2}\delta \cos \frac{1}{2}(\alpha' + \text{k}) = 4{,}7364242$ pos. $\qquad$ $= 455'',23$

und $\frac{\frac{1}{2}(\text{y} + \text{y}')}{\text{r}' \sin 1''} = 0^0\ 7'\ 35'',23$

Log. $^1/_2$ $(y + y')$	$= 4.6088293.5$
red. ad sin	$= \quad - 2.39$
Cpl. ar. Lg. cos $^1/_2 (x - x')$	$= - 12.96$
2) Lg. sin $^1/_2 \delta$ sin $^1/_2 (\alpha' + k)$	$= 4,6088278.15$ pos.
1 von 2 abgezogen gibt:	
Log. Tang. $^1/_2$ $(\alpha' + k)$	$= 9,8724036.15$ pos.
$^1/_2$ $(\alpha' + k)$	$= 36^0\ 42'\ 6'',29$
$^1/_2$ $(\alpha' - k)$	$= \quad 1,11$
folgl. NSI $= \alpha'$	$= 36\ \ 42\ \ 7,40$
k	$= 36\ \ 42\ \ 5,18$
und $180 + k = NIS = \alpha$	$= 216\ \ 42\ \ 5,18$

Um endlich die Distanz δ zu finden, hat man:

1) Lg. sin $^1/_2 \delta$ cos $^1/_2 (\alpha' + k)$	$= 4,7364242$
Log. cos $(36^0\ 42'\ 6'',29)$	$= 9,9040430.25 - 10$
Log. sin $^1/_2$ δ	$= 4,8323811.75$
2) Lg. sin $^1/_2 \delta$ sin $^1/_2 (\alpha' + k)$	$= 4,6088278.15$
Log. sin $^1/_2$ $(\alpha' + k)$	$= 9,7764466.38$
Log. sin $^1/_2$ δ	$= 4,8323811.77$
red. ad arc	$= + \ 6.8$
Log. $^1/_2$ δ	$= 4,8323818.57$
Log. 2	$= 0,3010300$
folgl. Log. δ	$= 5,1334118.57$
red. in par. F.	$= 0,0546614$
Log. δ	$= 5,0787504.57$

Log. cos $7'\ 35'',23$	$= 9,9999989.5$
folglich:	
Cpl. ar. Lg. cos $^1/_2$ $(y + y')$	$= 0,0000010.5$ [1]
Dieses Cpl. ist aber genau	$= \dfrac{^1/_2\,(y + y')^2\, M}{2\, r'^2}$
Denn Log. $^1/_2$ $(y + y')^2$	$= 9,3843778.4$
Compl. Log. $\dfrac{m}{2\, r'^2}$	$= 4,6399935 - 20$
	$4,0243713.4 - 10$
folglich:	
Cpl. ar. Lg. cos $^1/_2 (y + y')$	$= 0,0000010.57$
Ferner ist:	
Log. $^1/_2$ $(x - x')^2$	$= 9,47285$
C. Lg. $\dfrac{m}{2 r'^2}$	$= 4,63999 - 20$
	$4,11284 - 10$ und
Cpl. ar. Lg. cos $^1/_2 (x - x')$	$= 0,0000012.96$
Formel 3 gibt	
Log. $^1/_2$ $(x - x')$	$= 4,7364256$
Log. $^1/_2$ $(y - y')$	$= 4,6921889$
Com. Log. $\dfrac{1}{r'^2 \sin 1''}$	$= 0,6176643 - 10$
Log. $^1/_2$ $(\alpha' - k)$	$= 0,0462788$
und $^1/_2$ $(\alpha' - k)$	$= 1''112$

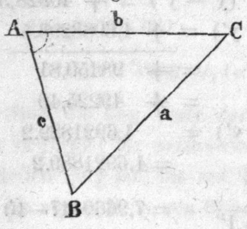
und $\delta = 135960,20$ württ. F. s. oben $\triangle$ 43

$\delta = 119881,04$ par Fuss.

§. 137.

2) Aus einem gegebenen sphärischen Winkel und zwei bekannten ihn einschliessenden Seiten die übrigen Stücke des sphärischen Dreiecks zu bestimmen. v. Bohnenberger.

Fig. 68.



Es seyen im $\triangle$ ABC die zwei Seiten b und c und der von ihnen eingeschlossene Winkel A gegeben, so ist:

$$\sin b : \sin c = \sin B : \sin C \text{ daher auch}$$

$$\sin b + \sin c : \sin b - \sin c = \text{Tg. } {}^1/_2\,(B + C) : \text{Tg. } {}^1/_2\,(B - C)$$

und führt man einen Hülfswinkel w ein, dass $\text{Tg. } w = \dfrac{\sin b.}{\sin c}$

so ist:

$$\text{Tang. } {}^1/_2\,(B - C) = \text{Tang. } (w - 45^0)\ \text{Tang. } {}^1/_2\,(B + C).$$

Weil aber auch der sphärische Excess $= E = \dfrac{b\, c \sin A}{2 r'^2 \sin 1''}$ gegeben ist, so ist auch $^1/_2\,(B + C) = {}^1/_2\,(180 + E - A)$ und also die Winkel B

[1] Dieses Complement ist immer sehr nahe gleich dem dreifachen m in der Additamententabelle Absch. IV. Für Log. $^1/_2$ $(y + y') = 4,69 \ldots$ findet man 3,5, folglich 3. 3,5 = 10,5.

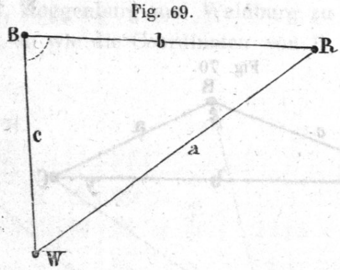
und C zu bestimmen. Sind hiernach alle 3 sphärische Winkel des Dreiecks bekannt, so wie auch Log. b und Log. c oder Log. sin b und Log. sin c aus den angrenzenden Dreiecken gegeben, so ist die Seite a leicht zu bestimmen. Wenn aber der gegebene Winkel A klein ist, oder wenig von zwei rechten abweicht, so kann die dritte Seite auf die gewöhnliche Art nicht genau bestimmt werden, und alsdann hat man folgende Formeln:

$$\sin {}^1/_2 (B - C) \sin {}^1/_2 a = \sin {}^1/_2 (b - c) \cos {}^1/_2 A \text{ und}$$
$$\cos {}^1/_2 (B - C) \sin {}^1/_2 a = \sin {}^1/_2 (b + c) \sin {}^1/_2 A$$

wo aus der Additamententabelle Log. sin $^1/_2$ (b — c) und Log. sin $^1/_2$ (b + c) bestimmt, und mit deren Hülfe $^1/_2$ (B — C) und die dritte Seite a leicht gefunden werden kann.

Beispiel.

Fig. 69.



In Dreieck: RBW (Roggenburg, Bussen, Waldburg) dessen Winkel R und W nicht beobachtet werden konnten, ist gegeben: der sphärische ∟ B = 89° 36′ 21″,20 und Log. sin BR = Log. sin b = 5,2557043.4 und Log. sin BW = Log. sin c = 5,2084207.

Sphärischer Excess.

Log. b	=	5,2557090.6
Log. c	=	5,2084245.1
Log. sin B	=	9,9999897.2
C Log. 2 r′ ² sin 1″	=	0,3166343—10
Log. E	=	0,7807575
E	=	6″,036

folgl. 180 + E	=	180° 0′ 6″,04
∠ B	=	89 36 21,20
also W + R	=	90 23 44,84
und $^1/_2$ (W + R)	=	45 11 52,42

Log. sin b	=	5,2557043.4
Log. sin c	=	5,2084207
Log. Tang. W	=	0,0472836.4
W	=	48° 6′ 46″,38
		45°
W — 45°	=	3° 6′ 46″,38

Log. Tang. (w — 45)	=	8,7354678
Log. Tang. $^1/_2$ (W + R)	=	0,0030001
Log. Tang. $^1/_2$ (W — R)	=	8,7384679
und $^1/_2$ (W — R)	=	3° 8′ 3″,91
$^1/_2$ (W + R)	=	45 11 52,42
W	=	48 19 56,33
R	=	42 3 48,51
B	=	89 36 21,20
		180 0 6,04

Für die Bestimmung von a hat man nun:

sin b : sin a = sin W : sin B $\qquad$ sin c : sin a = sin R : sin B

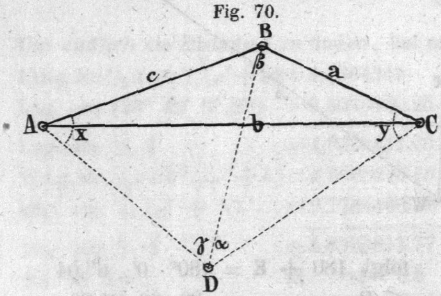
$$\sin a = \frac{\sin b \sin B}{\sin W} \qquad \sin a = \frac{\sin c \sin B}{\sin R}$$

Log. sin b = 5,2557043.4	Log. sin c = 5,2084207
Log. sin B = 9,9999897.2	Log. sin B = 9,9999897.2
5,2556940.6	5,2084104.2
Log. sin W = 9,8733283	Log. sin R = 9,8260446.3
Log. sin a = 5,3823657.6	Log. sin a = 5,3823657.9
red. ad arc = + 84.6	red. ad arc = + 84.6
Log. a = 5,3823742.2	Log. a = 5,3823742.5

folgl. RW = 241198,29 württemb. Fuss
= 212673,20 pariser Fuss.

§. 138.

Fig. 70.



3) Aus 3 Punkten A, B, C, deren Lage gegeben ist, einen vierten Punkt D sphärisch zu bestimmen, wenn noch die den Seiten AB, BC und AC gegenüber liegenden Winkel γ, α und β gegeben sind. Nach v. Bohnenberger.

Im $\triangle$ ABD ist: $\sin c : \sin BD = \sin \gamma : \sin x$
und im $\triangle$ BCD ist: $\sin a : \sin BD = \sin \alpha : \sin y$

$$\text{folgl. } \sin BD = \frac{\sin c \sin x}{\sin \gamma} = \frac{\sin a \sin y}{\sin \alpha}$$

daher $\sin c \sin x \sin \alpha = \sin a \sin y \sin \gamma$
woraus $\sin x : \sin y = \sin a \sin \gamma : \sin c \sin \alpha$
und weil im $\triangle$ ABC $\sin A : \sin C = \sin a : \sin c$ so ist auch: $\sin x : \sin y = \sin A \sin \gamma : \sin C \sin \alpha$ und setzt man I) $\text{Tang. } w = \frac{\sin A \sin \gamma}{\sin C \sin \alpha} = \frac{\sin a \sin \gamma}{\sin c \sin \alpha}$ so ist auch

$$\sin x : \sin y = \text{Tang. } w : 1$$

folgl. II) $\text{Tang. } \frac{1}{2}(x - y) = \text{Tang. } (w - 45) \text{ Tang. } \frac{1}{2}(x + y)$.

Bezeichnet man nun den von dem $\triangle$ ABC bekannten sphärischen Excess mit E, und den des Dreiecks ACD mit E′, so ist in dem Viereck ABCD die Summe der sphärischen Winkel: $B + D + x + y = 360^0 + E + E'$.

Da aber $B + D = \beta + \gamma + \alpha$ bekannt sind, so ziehe man sie zu beiden Seiten der Gleichung ab, und man hat:

$$x + y = 360^0 + E + E' - (B + D) \text{ oder}$$

$$x + y = 360^0 + E - (B + \alpha + \gamma) + E' \text{ und setzt man nun:}$$

$$360^0 + E - (B + \alpha + \gamma) = 2\ S \text{ so ist auch}$$

$$x + y = 2\ S + E' \text{ so wie } \frac{1}{2}(x + y) = S + \frac{E'}{2}$$

und durch Substitution in II ist

$$\text{III Tang. } \frac{1}{2}(x - y) = \text{Tang. } (w - 45^0) \text{ Tang. } \left(S + \frac{E'}{2}\right).$$

Lässt man aber E′ einstweilen weg, so findet man aus

$$\text{Tang. } (w - 45^0) \text{ Tang. } S$$

den Werth von $\text{Tang. } \frac{1}{2}(x - y)$ ganz nahe, und man kann mit dessen Hülfe aus $\frac{1}{2}(x - y)$ und $\frac{1}{2}(x + y)$ die Grössen x und y näherungsweise bestimmen, so dass man den sphär.

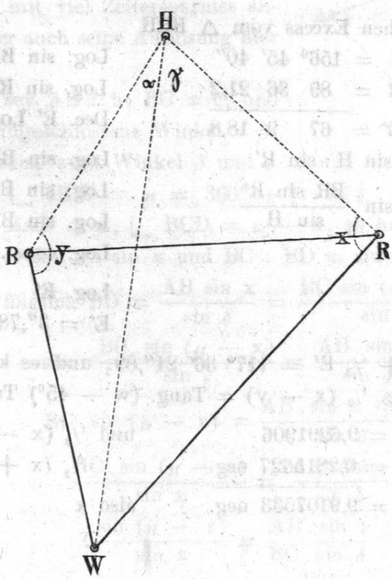
Excess E′ vom △ ACD, so genau als nöthig ist, bestimmen kann. Ist dann auch dieses E′ bekannt, und damit $S + \frac{E'}{2}$ so kann Tang. $\frac{1}{2}$ (x — y) = Tang. (w — 45⁰) Tang. $\left(S + \frac{E'}{2}\right)$ genau bestimmt werden.

Anmerkung. Sind die zwei auf dem gesuchten Punkt gemessenen Winkel $\gamma + \alpha$ grösser als 180⁰, so fällt der gesuchte Punkt in das gegebene Dreieck ABC und der sphärische Excess E′ des gesuchten Dreiecks ACD ist negativ. Wenn der mittlere Punkt B mit dem gesuchten Punkt D auf einer Seite von AC liegt, so ist statt des dieser Seite gegenüberliegenden Winkels im gegebenen Dreieck, dessen Supplement zu 360⁰ zu nehmen, und der sphärische Excess E des gegebenen Dreiecks wird negativ.

Beispiel.

Es sey der Punkt Heroldstatt aus Bussen, Roggenburg und Waldburg zu bestimmen, wenn $\alpha = 13^0\ 51'\ 35'',4$; $\gamma = 62^0\ 35'\ 54'',3$, so wie die Coordinaten von B, R und W gegeben sind.

Fig. 71.



Im △ RWB ist Log. sin BR = 5,2557043.4

und R =	42⁰	3′	48″,51	γ	=	62⁰	35′	54″,3
W =	48	19	56,33	α	=	13	51	35,4
B =	89	36	21,20	$\gamma + \alpha$	=	76	27	29,7
	180	0	6,04	W	=	48	19	56,33
				$W + \gamma + \alpha$	=	124	47	26,03

$360^0 + E - (W + \gamma + \alpha) = 360^0\ 0'\ 6'',04 - 124^0\ 47'\ 26'',03 = 2\ S$

folgl. 2 S = 235 12 40,01

und S = 117 36 20,0 = $\frac{1}{2}$ (x + y) nahe.

Für Tang. $w = \frac{\sin R \sin \gamma}{\sin B \sin \alpha}$ ist Log. sin R = 9,8260446.3 Log. sin B = 9,9999897.2

Log. sin γ = 9,9483164.9 Log. sin α = 9,3793915.6

9,7743611.2 9,3793812.8

9,3793812.8

Log. Tang. w = 0,3949798.4 w = 68° 3′ 48″,94

− 45

w − 45° = 23 3 48,94

Lg. Tg. (w − 45°) = 9,6291906

Log. Tang. S = 0,28157 neg.

Lg. Tg. ½ (x − y) = 9,91076 neg. also ½ (x − y) = − 39° 9′ 20″ } nahezu richtig.

½ (x + y) = 117 36 20

x = 78 27 0

y = 156 45 40

Nun ist für den sphärischen Excess vom △ BRH

x = 78° 27′ 0″,0	y = 156° 45′ 40″	Log. sin BR = 5,25570
R = 42 3 48,51	B = 89 36 21,2	Log. sin R′ = 9,77321
R′ = 36 23 11,49	B′ = 67 9 18,8	Dec. E′ Log. sin H = 0,01225

sin BR : sin BH = sin H : sin R′ Log. sin BH = 5,04096

sin BH = sin $\frac{BR \sin R'}{\sin H}$ Log. sin BR = 5,25570

Log. sin B′ = 9,96452

Log. const. = 0,31663

Log. E′ = 0,57781

E′ = 3″,782 und ½ E′ = 1″,89

Folgl. ½ (x + y = S + ½ E′ = 117° 36′ 21″,89, und es kann nun genau berechnet werden die Formel: Tang. ½ (x − y) = Tang. (w − 45°) Tang. (S + ½ E′)

Log. Tang. (w − 45°) = 9,6291906 und ½ (x − y) = − 39° 9′ 14″,05

Log. Tang. (S + ½ E′) = 0,2815627 neg. ½ (x + y) = 117 36 21,89

Log. Tang. ½ (x − y) = 9,9107533 neg. also x = 78 27 7,84

y = 156 45 35,94

Um WH zu finden hat man nun

1) $\sin WH = \frac{\sin Rw \sin x}{\sin \gamma}$	2) $\sin WH = \frac{\sin BW \sin y}{\sin \alpha}$
Log. sin RW = 5,3823657.6	Log. sin BW = 5.2084207
Log. sin x = 9,9911187.7	Log. sin y = 9.5961391.9
5,3734845.3	4.8045598.9
Log. sin γ = 9,9483164.9	Log. sin α = 9.3793915.6
Log. sin WH = 5,4251680.4	Log. sin WH = 5.4251683.3
red. ad arc + 103.1	red ad arc + 103.1
Log. WH = 5,4251783.5	Log. WH = 5.4251786.4

WH = 266181,91 württ. Fuss.

Berechnet man endlich auch die 2 Seiten BH und RH im $\triangle$ BRH, so ist

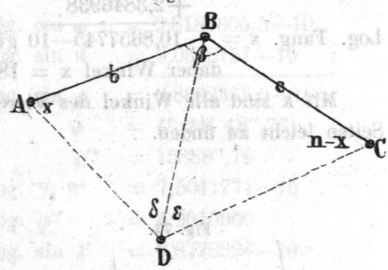
$$\sin BH = \frac{\sin BR \sin R}{\sin H} \text{ und } \sin RH = \frac{\sin BR \sin B}{\sin H}$$

B = 67° 9′ 14″,74	Log. sin BR = 5,2557043.4	Log. sin BR = 5,2557043.4
R = 36 23 19,33	Log. sin R = 9,7732451.8	Log. sin B = 9,9645200.2
H = 76 27 29,7	5,0289495.2	5,2202243.6
180 0 3,77	Log. sin H = 9,9877554.5	Log. sin H = 9,9877554.5
	Log. sin BH = 5,0411940.7	Log. sin RH = 5,2324689.1
	red. ad arc + 17.6	red. ad arc + 42.5
	Log. BH = 5,0411958.3	Log. RH = 5,2324731.6

§. 139.

4) Das Problem aus 3 gegebenen Punkten, A, B, C, den vierten D nach der ebenen Trigonometrie zu bestimmen, ist bei den Dreieckspunkten dritten Ranges oft und mit viel Zeitersparniss angewendet worden, daher auch seine Auflösung hier folgen soll.

Fig. 72.



Auflösung. Es sey AB = b; BC = c; und der von AB und BC eingeschlossene Winkel = β; und die auf D gemessenen zwei Winkel δ und ε. Ist dann $\llcorner$ BAD + $\llcorner$ BCD = μ = 360° — $(\beta + \delta + \varepsilon)$ und $\llcorner$ BAD = x, $\llcorner$ BCD = μ — x, so hat man die Proportion:

$$AB : BD = \sin\delta : \sin x \text{ und } BC : BD = \sin\varepsilon : \sin(\mu - x)$$

$$\text{folglich } BD = \frac{AB \sin x}{\sin\delta} = \frac{BC \sin(\mu - x)}{\sin\varepsilon}$$

$$\text{also: } \frac{BC.\sin(\mu - x)}{\sin\varepsilon} = \frac{AB.\sin x}{\sin\delta}$$

$$BC.\sin(\mu - x) = \frac{AB.\sin x \sin\varepsilon}{\sin\delta}$$

$$\frac{BC.\sin(\mu - x)}{\sin x} = \frac{AB.\sin\varepsilon}{\sin\delta}$$

$$\frac{\sin(\mu - x)}{\sin x} = \frac{AB.\sin\varepsilon}{BC.\sin\delta}$$

$$\frac{\sin\mu\cos x - \cos\mu\sin x}{\sin x} = \frac{AB.\sin\varepsilon}{BC.\sin\delta} = \frac{\sin\mu\cos x}{\sin x} - \frac{\cos\mu\sin x}{\sin x}$$

$$\frac{\sin\mu\cos x}{\sin x} - \cos\mu = \frac{AB.\sin\varepsilon}{BC.\sin\delta}$$

$$\text{daher } \sin\mu \,\text{Cotg.}\, x - \cos\mu = \frac{AB.\sin\varepsilon}{BC.\sin\delta} = \frac{b\sin\varepsilon}{c\sin\delta}$$

$$\sin\mu \,\text{Cotg.}\, x = \frac{b\sin\varepsilon}{c\sin\delta} + \cos\mu = \frac{b\sin\varepsilon + c\sin\delta\cos\mu}{c\sin\delta}$$

$$\text{Cotg.}\, x = \frac{b\sin\varepsilon + c\sin\delta\cos\mu}{c\sin\delta\sin\mu} = \frac{1}{\text{Tang.}\, x}$$

$$\text{folglich Tang.}\, x = \frac{c\sin\delta\sin\mu}{b\sin\varepsilon + c\sin\delta\cos\mu}$$

Beispiel.

$$b = 4326 \quad c = 5212 \quad \beta = 80^0\ 10'\ 24''$$
$$\delta = 24\ \ 17\ \ 30$$
$$\varepsilon = 19\ \ 24\ \ 31$$
$$\overline{\ 123\ \ 52\ \ 25}$$

also $\mu = 360^0 - (\beta + \delta + \varepsilon) = 236^0\ 7'\ 35''$

$\text{Lg. (c. sin } \delta \cos \mu) = -3{,}0773873 = -1195{,}05$

$\text{Log. } \cos \mu = 9{,}7461379 \text{ n.}$
$\text{Log. } c = 3{,}7170044$
$\text{Log. } \sin \delta = 9{,}6142450$
$\text{Log. } \sin \mu = 9{,}9192189. \text{ n}$

$\text{Log. (c} \sin \delta \sin \mu) = -3{,}2504683$
$+2{,}3846938$

$\text{Log. b} = 3{,}6360865$
$\text{Log. } \sin \varepsilon = 9{,}5215320$
$\text{Log. (b} \sin \varepsilon = +3{,}1576185 = +1437{,}54$
$-1195{,}05$

$b \sin \varepsilon + c \sin \delta \cos \mu = +242{,}49$
$\text{Log. } 242{,}49 = 2{,}3846938$

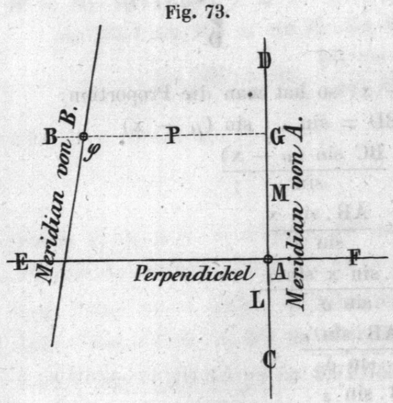
$\text{Log. Tang. } x = -10{,}8657745 - 10 \text{ gibt } -82^0\ 14'\ 35'',4$

daher Winkel $x = 180^0 - 82^0\ 14'\ 35'',4 = 97^0\ 45'\ 24'',6$

Mit x sind alle Winkel des Vierecks ABCD bestimmt, und folglich die unbekannten Seiten leicht zu finden.

§. 140.

Fig. 73.



5) Aus der geographischen Lage zweier Punkte A und B die Coordinaten des einen Punktes B in Bezug auf den Meridian und Perpendikel des andern A zu bestimmen. Nach Oriani.

Es sey L die geographische Breite des Orts A, für dessen Meridian CD und Perpendikel EF die Coordinaten des Punktes B berechnet werden sollen. φ sey die geographische Breite des Orts B und u der Längenunterschied von A und B.

Die Abscisse B sey = AG = M und seine Ordinate BG = P Toisen. Dann sey ferner b = der halben kleinen Erdaxe und e = der Excentricität.

Auflösung. Man berechne zuerst zwei Hülfswinkel λ' und ψ mittelst der Formeln

$$1)\ \text{Tang. } \lambda' = \frac{\text{Tang. } \varphi}{\cos u} \text{ und } 2)\ \sin \psi = \sin u \cos \varphi$$

dann sey die Breite des Fusspunkts G = λ so ist

$$3)\ \lambda = \lambda' + {}^1/_2\, e^2\, \psi'' \sin \lambda' \cos^2 \lambda' \text{ Tang. u.}$$

Hieraus hat man $4)\ \frac{M}{b \sin 1''} = (\lambda - L) + {}^1/_4\, e^2 \left[(\lambda - L) - \frac{3 \sin (\lambda - L) \cos (\lambda + L)}{\sin 1''} \right] = N.$

so ist $M = b \sin 1''\ N$ (Toisen).

Ferner berechne man z nach der Gleichung $5)\ \cos z = \frac{\sin \varphi}{\sin \lambda}$ und man erhält:

$$6)\ \frac{P}{b \sin 1''} = Z + {}^1/_8\, e^2 \sin^2 \lambda \left(2\ Z'' + \frac{3 \sin 2\ Z}{\sin 1''} \right) = Q$$

so ist $P = b \sin 1''\ Q$ (in Toisen).

Beispiel.

Man soll aus den bekannten Längen und Breiten von Tübingen und Paris die Coordinaten von Paris für den Tübinger Meridian bestimmen.

L = der Breite der Tübinger Sternwarte = 48° 31′ 12,″4

φ = „ „ „ Pariser „ = 48 50 13,22

u = dem Längenunterschied v. T. und P. = 6 42 51

b = 3261208,3 Toisen, und Log. b = 6,5133785

Log. e^2 = 7,8052071—10.

Die Bestimmung von M und P gibt sich nun folgendermassen:

1) $\text{Tang. } \lambda' = \dfrac{\text{Tang. } \varphi}{\cos u}$

Log. Tang. φ = 0,0583427—10
Log. cos u = 9,9970112.5—10

Log. Tang. λ' = 0,0613314.5—10
λ' = 49° 1′ 56″,28

2) $\sin \psi = \sin u \cos \varphi$

Log. cos φ = 9,8183605.5—10
Log. sin u = 9,0678751—10

Log. sin ψ = 8,8862353,5—10
ψ = 4° 24′ 48″,76
ψ'' = 15888″,76

3) $\lambda = \lambda' + \frac{1}{2} e^2 \psi'' \sin \lambda' \cos^2 \lambda' \text{ Tg. } u$

Log. $\frac{1}{2} e^2$ = 7,5041771—10
Log. ψ'' = 4,2010900
Log. sin λ' = 9,8779926—10
Log. cos² λ' = 9,6333222.8—10
Log. Tang. u = 9,0708638.3—10

0,2874458; = 1″,9384.

λ' = 49° 1′ 56″,28
1,94

Fusspunkt der Ordinate λ = 49° 1′ 58″,22 Breite
L = 48 31 12,4

$\lambda - L$ = 0° 30 45,82
$\lambda + L$ = 97 33 10,62

4) $$\frac{M}{b \sin 1''} = (\lambda - L) + \tfrac{1}{4} e^2 \left[(\lambda - L)'' - \frac{3 \sin (\lambda - L) \cos (\lambda + L)}{\sin 1''} \right]$$

Log. $\frac{1}{4}$ e² = 7,2031471
Log. $(\lambda - L)''$ = 3,2661893

0,4693364 = 2″9467

Log. $\frac{3}{4}$ e² = 7,6802683—10
Log. sin $(\lambda - L)$ = 7,9517598—10
Log. cos $(\lambda + L)$ = 9,1187355—10 n.
Log. $\dfrac{1}{\sin 1''}$ = 5,3144251—10

0,0651887 = 1″,162

$\lambda - L$ = 0° 30′ 45″,82
+ 2,95
+ 1,16

$\dfrac{M}{b \sin 1''}$ = 0° 30′ 49″,93 = 1849″,93 = N.

M = N b sin 1″

Log. N = 3,2671553
Log. b = 6,5130785
Log. sin 1″ = 4,6855749

Log. M = 4,4661087

M = 29248,84 Toisen
= 199039,8 württ. Fuss.

5) $\cos Z = \frac{\sin \varphi}{\sin \lambda}$ Log. $\sin \varphi = 9,8767028-10$

Log. $\sin \lambda = 9,8779961-10$

Log. $\cos Z = 9,9987067$ und $Z = 4^0\ 25'\ 10''$

$2\ Z = 8\ \ 50\ \ 20$

$2\ Z'' = 31820''$

6) $\frac{P}{b \sin 1''} = Z + {}^1/_8\, e^2 \sin^2 \lambda \left(2\ Z'' + \frac{3 \sin 2\ Z}{\sin 1''}\right)$

Log. ${}^1/_8\ e^2 = 6,9021171-10$

Log. $\sin^2 \lambda = 9,7559922-10$

Log. $2\ Z'' = 4,5027002$

$1,1608095 = 14'',481$

Log. ${}^3/_8\ e^2 = 7,3792383$

Log. $\sin^2 \lambda = 9,7559922$

Log. $\sin^2 Z = 9,1865511$

Log. $\frac{1}{\sin 1''} = 5,3144251$

$1,6362067 = 43'',272$

$Z = 4^0\ 25'\ 10''$

$+ 14,481$

$+ 43,272$

$\frac{P}{b \sin 1''} = 4^0,\ 26'\ 7'',753 = 15967'',753$

Log. $\frac{P}{b \sin 1''} = 4,2032437$

Log. $b = 6,5133785$

Log. $\sin 1'' = 4,6855749$

Log. $P = 5,4021971 = 252462,6$ Toisen.

red. Log. $= 0,8328312$

Für württ. Fuss Log. $P = 6,2350283 = 1718020,4$ w. F.

folglich sind die Coordinaten der Sternwarte von Paris

für den Tübinger Meridian, Absc. $+ 29248,84$. Ord. $- 252462,6$ Toisen.

„ $+ 199039,8$ „ $- 1718020,4$ württ. Fuss.

6) Aus 5. kennt man die Coordinaten der Sternwarte von Paris, in Bezug auf den Meridian der Sternwarte von Tübingen; man soll aus diesen und der bekannten geographischen Lage beider Punkte die Convergenz ihrer Meridiane und das Azimuth von Paris bestimmen.

$x =$ Absc. von Paris $+ 29248,84$ Toisen.

$M = \frac{1}{r \sin 1''}$; Log. $r = 6,5143262$

Log. $\sin 1'' = 4,6855749$

$1,1999011$ folglich Log. $M = 8,8000989$.

$\varphi' =$ der Breite von Tübingen $= 48^0\ 31'\ 12'',4$

$\varphi =$ der „ „ Paris $= 48\ \ 50\ \ 13,22$

$w =$ dem Längenunterschied von Paris und Tübingen $= 6^0\ 42'\ 51''$

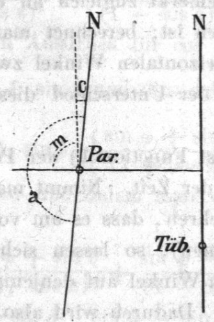
$= 24171''$

Azimuth $m = 90^0 + w \frac{\sin {}^1/_2 (\varphi + \varphi'')}{\cos {}^1/_2 (\varphi - \varphi'')} + {}^1/_{12}\, w \frac{\sin {}^1/_2 (\varphi + \varphi'')}{\cos {}^1/_2 (\varphi - \varphi'')}\, w^2 \sin 1''^2 \cos \varphi^2$.

zuerst berechne man die beiden Hülfswinkel $\xi'' = xM$ und $\varphi'' = \xi + \varphi'$

Log. x $= 4{,}4661086$	$\xi'' = 1845'',9 = 0^0\ 30'\ 45'',9$
Log. M $= 8{,}8000989$	$\varphi' = 48\ \ 31\ \ 12{,}4$
Log. $\xi'' = 3{,}2662075$	$\varphi'' = 49\ \ 1\ \ 58{,}3$
$\varphi = 48\ \ 50\ \ 13{,}22$	Log. sin $^1/_2\,(\varphi + \varphi'') = 9{,}8773506$
$\varphi'' = 49\ \ 1\ \ 58{,}3$	CLg. cos $^1/_2\,(\varphi - \varphi'') = \quad 6$
$\varphi + \varphi'' = 97\ \ 52\ \ 11{,}5$	Log. w'' $= 4{,}3832946$
$\varphi - \varphi'' = 11\ \ 45{,}08$	$4{,}2606458 = 18224{,}10$
$^1/_2\,(\varphi + \varphi'') = 48\ \ 56\ \ 5{,}76$	Lg. w$^2 = 8{,}7665892$
$^1/_2\,(\varphi - \varphi'') = 0\ \ 5\ \ 52{,}54$	Log. cos $\varphi^2 = 9{,}6367202$
	Log. $^1/_{12}$ sin $1''^2 = 8{,}2919686$
Convergenz C $= 5^0\ 3'\ 53'',13$	$0{,}9559238 = 9{,}035$
Azimuth m $= 95\ \ 3\ \ 53{,}13$	
$\alpha = 275\ \ 3\ \ 53{,}13$	C $= 18233{,}13$

Fig. 74.



§. 141.

Die Azimuthbestimmung aus Messungen von Sonnenhöhen und Azimuthalwinkeln mit dem Theodolith.

Ueber die Bestimmung des Azimuths von Kornbühl, vom Tübinger Observatorium aus gesehen $= 169^0\ 12'\ 44'',3$, auf welches die württembergische Landestriangulirung gegründet ist, und das schon in den Jahren von 1792—1796 durch Professor von Bohnenberger bestimmt wurde, fehlen die Details der Sonnenhöhenbeobachtungen, aus denen dasselbe berechnet worden ist.

Ebenso fehlen für die neue Bestimmung desselben zu $169^0\ 12'\ 59'',88$ vom Jahr 1819 die Polarsternbeobachtungen [1] mittelst des Reichenbachischen Universalinstruments, so dass also oben §. 65 ausser den genannten Resultaten dieser Bestimmungen weiter nichts gegeben werden konnte.

Da es aber doch von Interesse seyn dürfte, auch über diesen Gegenstand in dieser Beschreibung das Nöthige zu finden, so wählte der Verfasser hiezu einen Auszug aus

[1] Die Azimuthbestimmung von Altomünster bei München, aus der beobachteten grössten westlichen Digression des Polarsterns, herausgegeben von Soldner, königl. bayer. Steuerrath, München 1813. Soldner gibt sie als die beste Methode für den geodätischen Gebrauch an. Auch bei der englischen Gradmessung wurde diese Methode angewendet. (Monatl. Corresp. Bd. 26. S. 109.)

einer Abhandlung von Astronom Soldner, die 1814 in München über die Azimuthbestimmung aus Sonnenhöhenmessungen mittelst eines Theodoliths erschien und die Aufschrift hat:

Neue Methode, beobachtete Azimuthe zu reduciren.

In den Göttinger gelehrten Anzeigen 46 St. den 23. März 1815 S. 449 u. f. ist von dem Recensenten unter anderem darüber gesagt: „Das hier kürzlich beschriebene Verfahren, welches Herr Soldner in der vorliegenden Abhandlung vorträgt, ist so einfach und liegt so nahe, dass man sich wundern muss, dass es mehreren praktischen Astronomen bei Azimuthbestimmung oder bei ganz ähnlichen Veranlassungen entgangen ist etc.“

Ein Auszug aus der genannten Abhandlung dürfte sonach die Lücke der fehlenden Bohnenberger'schen Anleitung zur Azimuthbestimmung besonders auch desswegen vollständig ausfüllen, als noch durch Zugabe einiger vollständig gelöster Beispiele der Gegenstand gründlich abgehandelt und erläutert ist.

Soldner sagt: „Bei der Beobachtung des Azimuths eines irdischen Objectes kommt es im Allgemeinen auf folgendes an: Man misst den horizontalen Winkel zwischen dem Objecte und einem Gestirn und bemerkt zugleich an einer Uhr den Zeitmoment, in welchem der Winkel gemessen worden ist; berechnet man nun für diesen Moment das Azimuth des Gestirns, d. h. den horizontalen Winkel zwischen dem Meridian und dem Gestirn, so wird die Summe oder der Unterschied dieser zwei Winkel das Azimuth des Objectes seyn.

Das Azimuth eines Gestirns ist Function 1) der Polhöhe des Orts, 2) der Declination und 3) des Stundenwinkels oder der Zeit. Nimmt man nun einen gewissen Zeitmoment willkührlich an (die Folge wird lehren, dass es am vortheilhaftesten ist, dafür das Mittel aller Beobachtungszeiten zu nehmen), so lassen sich durch analytische Ausdrücke die ausser diesem Momente gemessenen Winkel auf denjenigen reduciren, welcher im Momente selbst stattgefunden haben würde. Dadurch wird also die Reduction der gemessenen Azimuthe auf ein Verfahren gebracht, welches dem der Reduction gemessener Zenithdistanzen in der Nähe des Meridians ganz analog, und daher jedem praktischen Astronomen geläufig ist.

Wir zählen wie gewöhnlich die Stundenwinkel vom Meridian an gegen Westen bis zu 360^0 oder 24 Stunden und die Azimuthe vom südlichen Meridian über Westen, Norden, Osten etc., d. h. von der Linken zur Rechten bis 360^0. Heisst nun an dem gegebenen oder vielmehr willkürlich angenommenen Zeitmomente der Stundenwinkel des Gestirns t, seine nördliche Declination δ, sein Azimuth α und Polhöhe des Orts φ, so ist bekanntlich:

$$\text{Cotang } \alpha = \sin \varphi \,.\, \text{Cotg. t} - \cos \varphi \,.\, \text{Tang. } \delta \,.\, \text{cosec. t.}$$

Wenn im Augenblicke einer Beobachtung der Stundenwinkel um Δt grösser ist als t, so wird das Azimuth um eine Grösse $\Delta\alpha$ grösser seyn als α und man hat, da man die Declination constant annehmen kann, nach dem Taylor'schen Theoreme:

$$\Delta\alpha = \Delta t \,.\, \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\Delta t^2}{1.2} \,.\, \frac{d\,d\,\alpha}{d\,t^2} + \frac{\Delta t^3}{1.2.3} \,.\, \frac{d^3\alpha}{d\,t^3} + \text{etc.}$$

Es kommt also darauf an, die Differentialverhältnisse zu entwickeln.

Durch den obigen Ausdruck für α erhält man:

$$\frac{d\,\alpha}{d\,t} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 t} \,.\, (\sin \varphi - \cos \varphi \,.\, \text{Tang. } \delta \,.\, \cos \text{t.})$$

Da hier auch α von t abhängt, so würden die fortgesetzten Differentiationen äusserst complicirt werden, und diess würde nicht bloss eine mühsame Rechnung verursachen, sondern es würden auch die Endresultate so zusammengesetzt erscheinen, dass es schwer hielte, sie auf ihre einfachste Form zurückzuführen.

Wir müssen daher suchen diesen Ausdruck abzuändern. Wenn z die Zeitdistanz des Gestirns, so hat man bekanntlich: $\frac{\sin\alpha}{\sin t} = \frac{\cos\delta}{\sin z}$ und

$$\cos z = \sin\varphi \,.\, \sin\delta + \cos\varphi \,.\, \cos\delta \,.\, \text{cosin. } t.$$

Setzt man nun in unserem Differentialverhältnisse für $\frac{\sin\alpha}{\sin t}$ seinen Werth, und anstatt cos. t dessen Werth aus der letzten Formel, so wird:

$$\frac{d\,\alpha}{d\,t} = \frac{\sin\varphi - \sin\delta \,.\, \cos z.}{\sin^2 z.}$$

Multiplicirt man hier $\sin\varphi$ mit $\cos^2 {}^1\!/_2\, z + \sin^2 {}^1\!/_2\, z$ und setzt $\cos^2 {}^1\!/_2\, z - \sin^2 {}^1\!/_2\, z$ anstatt cos z, so wird: $\frac{d\,\alpha}{d\,t} = \frac{\sin\varphi + \sin\delta}{2\,(1 + \cos z)} = \frac{\sin\varphi - \sin\delta}{2\,(1 - \cos z)}$

Hieraus erhält man ferner:

$$\frac{d\,d\,\alpha}{d\,t^2} = \left\{\frac{\sin\varphi + \sin\delta}{(1 + \cos z)^2} - \frac{\sin\varphi - \sin\delta}{(1 - \cos z)^2}\right\} . \frac{\sin z \,.\, d\,z}{2 \,.\, d\,t}$$

Nun ergibt sich aber durch den Ausdruck für cos z

$\frac{\sin z\, d\, z}{d\,t} = \cos\varphi \,.\, \cos\delta \,.\, \sin t$ und dies substituirt wird:

$$\frac{d\,d\,\alpha}{d\,t^2} = {}^1\!/_2 \cos\varphi \,.\, \cos\delta \,.\, \sin t \,.\, \left\{\frac{\sin\varphi + \sin\delta}{(1 + \cos z)^2} = \frac{\sin\varphi - \sin\delta}{(1 - \cos z)^2}\right\}$$

Durch nochmaliges Differentiiren und indem man wieder für sin z d z seinen Werth setzt, erhält man:

$$\frac{d^3\,\alpha}{d\,t^3} = \cos^2\varphi \,.\, \cos^2\delta \,.\, \sin^2 t \,.\, \left\{\frac{\sin\varphi + \sin\delta}{(1 + \cos z)^3} + \frac{\sin\varphi - \sin\delta}{(1 - \cos z)^3}\right\} + {}^1\!/_2 \cos\varphi \,.\, \cos\delta \,.\, \cos t \,.\, \left\{\frac{\sin\varphi + \sin\delta}{(1 + \cos z)^2} - \frac{\sin\varphi - \sin\delta}{(1 - \cos z)^2}\right\}$$

Bekanntlich ist $1 + \cos z = \sin z \,.\, \text{Cotang } {}^1\!/_2\, z$ und $1 - \cos z = \sin z \,.\, \text{Tang. } {}^1\!/_2\, z$ und man erhält endlich:

$$\Delta\,\alpha = \frac{\Delta\,t}{2 \sin z} . \left\{(\sin\varphi + \sin\delta) \,.\, \text{Tang. } {}^1\!/_2\, z + (\sin\varphi - \sin\delta) \,.\, \text{Cotg. } {}^1\!/_2\, z\right\} + \frac{\Delta\,t^2}{4} .$$

$$\frac{\cos\varphi \,.\, \cos\delta \,.\, \sin t}{\sin^2 z} \left\{(\sin\varphi + \sin\delta)\ \text{Tang.}^2\, {}^1\!/_2\, z - (\sin\varphi - \sin\delta) \,.\, \text{Cotg.}^2\, {}^1\!/_2\, z\right\} + \frac{\Delta\,t^3}{6}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\cos^2\varphi \,.\, \cos^2\delta \,.\, \sin^2 t}{\sin^3 z} \left\{(\sin\varphi + \sin\delta) \,.\, \text{Tang.}^3\, {}^1\!/_2\, z + (\sin\varphi - \sin\delta) \,.\, \text{Cotg.}^3\, {}^1\!/_2\, z\right\} \\ \frac{\cos\varphi \,.\, \cos\delta \,.\, \cos t}{2 \sin^2 z} \left\{(\sin\varphi + \sin\delta)\ \text{Tang.}^2\, {}^1\!/_2\, z - (\sin\varphi - \sin\delta)\ \text{Cotg.}^2\, {}^1\!/_2\, z\right\} \end{array}\right\}$$

Wenn man für den Augenblick einer Beobachtung, in welchem der Stundenwinkel um Δ t grösser war als t, für welchen man α berechnet hat, den hieraus erhaltenen Werth von $\Delta\,\alpha$ zu α addirt, so erhält man das Azimuth des Gestirns für den Augenblick der Beobachtung; oder wenn man $\Delta\,\alpha$ von dem beobachteten Winkel abzieht, erhält man ihn so wie er zur Zeit des Stundenwinkels t stattgefunden haben würde.

Da mir das erstere für die Folge einfacher zu seyn scheint, so werde ich es dabei lassen. Es folgt also, dass wenn man für jede Beobachtungszeit $\Delta\,\alpha$ berechnet, und das Mittel aller $\Delta\,\alpha$ zu α addirt, so wird man dasjenige Azimuth des Gestirns erhalten, welches dem gemessenen Mittelbogen entspricht.

Der Werth von t oder der Zeitpunkt, von welchem man ausgehen will, ist willkürlich; nimmt man aber dafür das Mittel aller Beobachtungszeiten, so wird, weil die Δ t vor dem angenommenen Zeitpunkte negativ sind, die Summe aller *positiven* Δ t der Summe aller negativen gleich seyn, und daher das erste Glied der obigen Reihe, welches natürlich immer das grösste ist, sich beständig aufheben.

Wir wollen nun suchen den Formeln eine solche Einrichtung zu geben, dass sie für den Gebrauch leicht zu übersehen und bequemer werden.

Setzt man:

$$M = \frac{\cos\varphi \,.\, \cos\delta \,.\, \sin t}{2 \,.\, \sin^2 z}\left\{(\sin\varphi + \sin\delta)\,\text{Tang.}^2 \tfrac{1}{2} z - (\sin\varphi - \sin\delta)\,\text{Cotg.}^2 \tfrac{1}{2} z\right\}$$

$$N = \frac{\cos^2\varphi \,.\, \cos^2\delta \,.\, \sin^2 t}{\sin^3 z}\left\{(\sin\varphi + \sin\delta)\,\text{Tang.}^3 \tfrac{1}{2} z + (\sin\varphi - \sin\delta).\,\text{Cotg.}^3 \tfrac{1}{2} z\right\} + M\,\text{Cotg. } t$$

so wird in Sekunden:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta t^2}{2\sin 1''}.\, M + \frac{\Delta t^3}{6 \sin 1''}.\, N$$

Δ t ist hier in Theilen des Halbmessers ausgedrückt, durch die Beobachtungen aber ist es immer in Zeit gegeben; der Ausdruck muss daher so abgeändert werden, dass man die gegebenen Δ t unmittelbar gebrauchen kann.

Anstatt $\tfrac{1}{2}\Delta t^2$ kann man setzen $2\sin^2 \tfrac{1}{2}\Delta t$; der daraus entstehende Fehler wird nur von der Ordnung Δt^4 und daher unmerklich. Es wird also das erste Glied: $\frac{2\sin^2 \frac{1}{2}\Delta t}{\sin 1''}.\, M$, wovon der mit M multiplicirte Theil für die verschiedenen Δ t in Zeit, durch Delambre's Reductionstafeln der Zeitdistanzen schon gegeben ist. Für den zweiten Theil oder Δt^3 hat man noch keine Tafel, dieser Theil ist aber immer sehr klein, so dass es dabei nicht nöthig ist, weiter als auf ganze, höchstens zehntel Zeitminuten zu geben.

Bedeutet daher $\Delta t'$ Zeitminuten, so ist

$$\Delta t^3 = (900 \sin 1'')^3 \,.\, \Delta t'^3$$

oder um zu grosse Zahlen zu vermeiden

$$\Delta t^3 = (9000 \sin 1'')^3 \,.\, \left(\frac{\Delta t'}{10}\right)^3.$$

Wir erhalten also in Sekunden

$$\Delta\alpha = M\,\frac{2\sin^2 \frac{1}{2}\Delta t}{\sin 1''} + 2{,}856\, N\left(\frac{\Delta t'}{10}\right)^3.$$

Man wird nun bei der vollständigen Berechnung eines beobachteten Azimuths auf folgende Weise zu verfahren haben: Man sucht erst das Mittel aller Beobachtungszeiten und dafür den Stundenwinkel t und Declination δ. Damit berechnet man die Hülfswinkel β und γ durch

$$\text{Tang. }\beta = \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi - \delta)}{\cos \frac{1}{2}(\varphi + \delta)}.\,\text{Cotg. } \tfrac{1}{2} t \qquad \text{Tang. }\gamma = \frac{\cos \frac{1}{2}(\varphi - \delta)}{\sin \frac{1}{2}(\varphi + \delta)}.\,\text{Cotg } \tfrac{1}{2} t$$

wo nachher, wie bekannt $\alpha = 180^0 - \beta - \gamma$ dann

$$\sin z = \frac{\cos\delta \,.\, \sin t}{\sin(\beta + \gamma)}$$

und damit

$$M = \frac{\cos\varphi \,.\, \cos\delta \,.\, \sin t}{2 \sin^2 z} \left\{ (\sin\varphi + \sin\delta) \operatorname{Tang.}^2 {}^1\!/_2 z - (\sin\varphi - \sin\delta) \operatorname{Cotg.}^2 {}^1\!/_2 z \right\}$$

$$= \frac{\cos\varphi \,.\, \cos\delta}{4} \,.\, \left(\frac{\sin 2\gamma}{\cos {}^1\!/_2 z^2} - \frac{\sin 2\beta}{\sin {}^1\!/_2 z^2} \right)$$

$$N = \frac{\cos\varphi^2 \,.\, \cos\delta^2 \,.\, \sin^2 t}{\sin^3 z} \,.\, \left\{ (\sin\varphi + \sin\delta) \operatorname{Tang.}^3 {}^1\!/_2 z + (\sin\varphi - \sin\delta) \operatorname{Cotg.}^3 {}^1\!/_2 z \right\} + M. \operatorname{Cotg.} t.$$

$$= \frac{\cos\varphi^2 \,.\, \cos\delta^2 \,.\, \sin t}{4} \left(\frac{\sin 2\gamma}{\cos {}^1\!/_2 z^4} + \frac{\sin 2\beta}{\sin {}^1\!/_2 z^4} \right) + M. \operatorname{Cotg.} t.$$

Bedeutet nun Σ die Summe aller Zahlen, welche nach Anleitung des vorhergehenden, den verschiedenen Δ t entsprechen, und n die Anzahl der Beobachtungen, so ist

$$\Delta\alpha = \frac{M}{n} \,.\, \Sigma \frac{2 \sin^2 {}^1\!/_2 \Delta t}{\sin 1''} + \frac{2{,}856\, N}{n} \,.\, \Sigma \left(\frac{\Delta t'}{10} \right)^3$$

Und wenn endlich noch A der Mittelbogen des gemessenen Winkels unter der Voraussetzung, dass während der Messung das terrestrische Object links vom Gestirne war, so hat man, vom südlichen Meridiane gezählt, das gesuchte Azimuth $= 180^0 - \beta - \gamma - A + \Delta\alpha$.

Ueber diese Formeln ist zu bemerken, dass bloss die Winkel β und γ und etwa z scharf berechnet werden müssen; in den Ausdrücken für M und N braucht man die trigonometrischen Functionen, Tang. $^1\!/_2$ z ausgenommen wegen der höhern Potenzen, nur auf ganze Minuten und rechnet so wie in dem Werthe von $\Delta\alpha$ mit kleinen Logarithmentafeln von fünf Decimalstellen. In den Werthen für M und N lassen sich bekanntlich, wenn man es bequemer findet, die Summen $\sin\varphi + \sin\delta$ und $\sin\varphi - \sin\delta$ in Producte verwandeln; auch die schon gegebenen Hülfswinkel β und γ liessen sich dabei benützen, aber durch letzteres könnte leicht Verwechslung entstehen. Auf die Zeichen hat der Rechner sorgfältig zu sehen, aber auch durch sie allein gibt sich alles von selbst, so dass er nicht nöthig hat eine Figur zu entwerfen. Im allgemeinen sieht man, dass bei Beobachtungen in der östlichen Halbkugel β und γ negativ werden, weil t im dritten oder vierten Quadranten ist. M wird dann auch negativ, aber nicht N. Wenn δ grösser als φ ist, und z bedeutend kleiner als 90^0, gehen auch Verwechslungen von Zeichen vor, welche nicht übersehen werden dürfen. Wenn das terrestrische Object rechts von dem Gestirne steht, ist das Zeichen von A umgekehrt. In dem Werthe von $\Delta\alpha$ richtet sich das Zeichen des ersten Theils nach dem von M, im zweiten Theil aber nach den Zeichen von N und dem der algebraischen Summe $\Sigma \left(\frac{\Delta t'}{10} \right)^3$.

Um die Rechnung zu erläutern, wollen wir ein fingirtes Beispiel vornehmen, weil man ein solches erstens so einrichten kann, dass es für die Methode besonders ungünstig wird, und weil dann dadurch, dass die Winkel berechnet anstatt gemessen worden, sie vollkommen genau sind und daher einen sichern Probirstein für die Methode geben.

Ich nehme an, man habe an einem Orte, dessen Polhöhe $\varphi = 48^0$ an folgenden Zeiten $6^u\ 55'$, $7^u\ 0'$, $7^u\ 5'$, $10'$, $20'$ und $30'$ Abends wahre Sonnenzeit, den Azimuthalwinkel zwischen einem irdischen Objecte, dessen Azimuth $= 20^0$ und dem Mittelpunkte der Sonne gemessen. Indem ich nun $\delta = +16^0$ und constant annahm, habe ich die sechs Azimuthe der Sonne, welche obigen Zeiten entsprechen, berechnet, von jedem 20^0 abgezogen und so die sechs Winkel zwischen dem Objecte und der Sonne in Summa gefunden $561^0\ 16'\ 20''4$. Diese Summe würde man gefunden haben, wenn man den Winkel sechsmal repetirt hätte, folglich wäre der einfache gemessene Winkelbogen $A = 93^0\ 32'\ 43'',4$. Diess also die Beobachtung.

Nun ist das Mittel obiger Zeiten $7^u\ 10'$, das gibt $t = 107^0\ 30'$ und damit $\beta = 13^0\ 24'\ 16'',6$; $\gamma = 53^0\ 3'\ 45''2$; $z = 89^0\ 20'\ 40''$ und endlich

$$\text{Log. } M = 9{,}20063 + \text{ und Log. } (2{,}856\ N) = 0{,}1570 +$$

Nun steht die weitere Berechnung so:

Zeiten. $7^u\ 10'$.	$\Delta t'$.	$\frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta t}{\sin 1''}$.	$\left\{\frac{\Delta t'}{10}\right\}^3$.
$6^u\ 55'$	$-15'$	$441'',6$	$-3'',4$
7 0	-10	196,3	$-1{,}0$
7 5	-5	49,1	$-0{,}1$
7 10	0	0,0	0,0
7 20	$+10$	196,3	$+1{,}0$
7 30	$+20$	784,9	$+8{,}0$
		1668,2	$+4{,}5$
		$= \Sigma \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta t}{\sin 1''}$	$= \Sigma \left\{\frac{\Delta t'}{10}\right\}^3$

Hieraus erhält man:

$$\frac{2{,}856\ N}{n} \cdot \Sigma \left(\frac{\Delta t}{10}\right)^3 = +\ 1{,}08$$

$$\frac{M}{n} \cdot \Sigma \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta t}{\sin 1''} = +\ 44'',13$$

$$\Delta \alpha = 45'',21$$

$$\text{und } 180^0 - \beta - \gamma = 113^0\ 31'\ 58'',2$$

$$A = -\ 93\ \ 32\ \ 43{,}4$$

$$19^0\ 59'\ 14'',8$$

$$+\Delta \alpha = +\ 4{,}52$$

$$\text{Azimuth} = 20\ \ 0\ \ 0{,}0$$

Dieses Azimuth ist vollkommen wie es seyn muss, woraus hervorgeht, dass die folgenden Glieder unserer Reihe, welche von höherer Ordnung sind als die dritte, unmerklich sind, und dass man also nach unserer Methode ohne Bedenken eine Reihe Beobachtungen zusammennehmen kann, welche während eines Zeitraums von vierzig und mehr Minuten gemacht worden sind.

Das zweite Glied von $\Delta \alpha$, welches von Δt^3 abhängt, ist hier sehr klein und wird bei wirklichen Beobachtungen fast immer vernachlässigt werden können.

Denn es ist klar, dass die algebraische Summe aller $\left(\frac{\Delta t}{10}\right)^3$ null wird, wenn die Zwischenzeiten der Beobachtungen gleich sind, und das ist bei wirklichen Beobachtungen gewöhnlich nahe der Fall und nicht wie hier, wo sie absichtlich sehr ungleich und von 5′ und 10′ angenommen worden sind. Wenn man diess Glied vernachlässigen kann, so kann man auch noch die Berechnung von z dadurch ersparen, dass man M nach der Formel:

$$M = \frac{\cos\varphi \,.\, \sin^2(\beta+\gamma)}{\cos\delta \,.\, \sin t} \,.\, \left\{ \frac{\cos\varphi \,.\, \sin 2(\beta+\gamma)}{\cos\delta \,.\, \sin t} - \sin\delta \right\}$$

berechnet, welche sich durch bekannte Verwandlungen und Substitutionen aus der vorigen ableiten lässt.

Zusätze.

1) Es ist vielleicht nicht überflüssig zu erinnern, dass, wenn man mit einem Theodolith- oder Horizontalkreise nicht abwechselnd beide Sonnenränder nimmt, wodurch man den Mittelpunkt erhält, sondern immer den nämlichen und am Ende an den gemessenen Mittelbogen den Sonnenhalbmesser anbringt, man diesen nicht so nehmen dürfe, wie er in den Tafeln steht, sondern durch sin z dividirt, oder in dem Verhältnisse sin z : 1 vergrössert, wovon sich der Grund leicht einsehen lässt.

Beispiel. Es ist oben $z = 89^0\ 20'\ 40''$

und angenommen es sey in den Tafeln der Sonnenhalbmesser zu 16′ 5″ angegeben, so ist

Log. 16′ 5″ oder Log. 965 = 2,9845273

und Log. sin z = 9,9999710

Log. des Sonnenhalbmessers = 2,9845563 = 965″,07

folglich Sonnenhalbmesser = 16′ 5″,07.

2) Die genaue Vertikalbewegung des Fernrohrs ist Haupterforderniss bei Azimuthalwinkelmessungen; denn wenn diese fehlerhaft ist, so werden die Winkel desto unsicherer je höher die Sonne steht, und ein Fehler in der Zeitbestimmung im Meridian ist von weit grösserem Einfluss auf das Azimuth als am Horizonte.

Ein Fehler von einer Zeitsekunde verursacht einen Fehler im Azimuthe am Horizont von 15″ sin (Polhöhe), folglich bei $\varphi = 45^0$ einen Fehler von 10″,6 Sekunden und im Meridian ist dieser

$15'' \dfrac{\cos\text{(Declination)}}{\sin\text{(Zenithdistanz)}}$ also bei $\varphi = 45^0$ beträgt der Fehler 21″,2 Sekunden.

Für die Bestimmung der Azimuthe ist sonach die Beobachtung der auf- oder untergehenden Sonne (wodurch etwaige Fehler in Polhöhe und Declination unwirksam gemacht werden) viel vortheilhafter, als Meridianbeobachtungen. Bei Azimuthbestimmung durch den Polarstern, wo ungefähre Zeitangaben schon hinreichend sind, kann die Bewegung des Fernrohrs nur allein ungünstig wirken.

3) Um eine mittelst eines Theodoliths beobachtete Sonnenhöhe zu rectificiren, d. h. auf die wahre Sonnenmittelpunktshöhe zurückzuführen, hat man, wenn

H = der beobachteten Sonnenhöhe,
h = der rectificirten Sonnenhöhe,
a = der Refraction,
b = der Parallaxe, wenn diese = Horizontalparallaxe × cos H genommen ist,
c = dem Sonnenhalbmesser, im Verhältniss wie sin z : 1 genommen,
d = dem Collimationsfehler des Höhenkreises

$$h = H - a + b \pm c \pm d.$$

Der gemessene horizontale Azimuthalwinkel A′ wird auf den Sonnenmittelpunkt berechnet durch A′ ± c; das Mittel aus mehreren solchen Winkeln ist = A.

Delambre's Reductionstafel des Stundenwinkels $\Delta t'$ in Sekunden für Bogen $\frac{1}{2}\,\Delta t$, d. i. für Theile des Halbmessers, nach der Formel $\dfrac{2 \sin^2 \frac{1}{2}\,\Delta t}{\sin 1''}$.

Δ' Sec.	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′	11′
0″	0″,0	2″,0	7″,8	17″,7	31″,4	49″,1	70″,7	96″,2	125″,7	159″,0	196″,3	237″,5
1	0,0	2,0	8,0	17,9	31,7	49,4	71,1	96,9	126,2	159,6	197,0	238,3
2	0,0	2,1	8,1	18,1	31,9	49,7	71,5	97,1	126,7	160,2	197 6	239,0
3	0,0	2,2	8,2	18,3	32,2	50,1	71,9	97,6	127,2	160,8	198,3	239,7
4	0,0	2,2	8,4	18,5	32,5	50,4	72,3	98,1	127,8	161,4	198,9	240,4
5	0,0	2,3	8,5	18,7	32,7	50,7	72,7	98,5	128,3	162,0	199,6	241,2
6	0,0	2,4	8,7	18,9	33,0	51,1	73,1	99,0	128,8	162,6	200.3	241,9
7	0,0	2,4	8,8	19,1	33,3	51,4	73,5	99,4	129,4	163,2	200,9	242,6
8	0,0	2,5	8,9	19,3	33,5	51,7	73,9	99,9	129,9	163,8	201,6	243,3
9	0,0	2,6	9,1	19,5	33,8	52,1	74,3	100,4	130,4	164,4	202,2	244,1
10	0,1	2,7	9,2	19,7	34,1	52,4	74,7	100,8	131,0	165,0	202,9	244,8
11	0,1	2,7	9,4	19,9	34,4	52,7	75,1	101,3	131,5	165,6	203.6	245,5
12	0,1	2,8	9,5	20,1	34,6	53,1	75,5	101,8	132,0	166,2	204,2	246,2
13	0,1	2,9	9,6	20,3	34,9	53,4	75,9	102,3	132,6	166,8	204,9	247,0
14	0,1	3,0	9,8	20,5	35,2	53,8	76,3	102,7	133,1	167,4	205,6	247,7
15	0,1	3,1	9,9	20,7	35,5	54,1	76,7	103,2	133,6	168,0	206,3	248,5
16	0,1	3,1	10,1	20,9	35,7	54,5	77,1	103,7	134,2	168,6	206,9	249,1
17	0,2	3,2	10,2	21,2	36,0	54,8	77,5	104,2	134,7	169,2	207,6	249,9
18	0,2	3,2	10,4	21,4	36,3	55,1	77,9	104,6	135,3	169,8	208,3	250,7
19	0,2	3,4	10,5	21,6	36,6	55,5	78,3	105,1	135,8	170,4	208,9	251,4
20	0,2	3,5	10,7	21,8	36,9	55,8	78,8	105,6	136,4	171,0	209,6	252,2
21	0,3	3,6	10,8	22,0	37,2	56,2	79,2	106,1	136,9	171,6	210,3	252,9
22	0,3	3,7	11,0	22,3	37,4	56,5	79,6	106,6	137,4	172,2	211,0	253,6
23	0,3	3,8	11,1	22,5	37,7	56,9	80,0	107,0	138,0	172,9	211,6	254,4
24	0,3	3,8	11,3	22,7	38,0	57,3	80,4	107,5	138,5	173,5	212,3	255,1
25	0,3	3,9	11,5	22,9	38,3	57,6	80,8	108,0	139,1	174,1	213,0	255,9
26	0,4	4,0	11,6	23,1	38,6	58,0	81,3	108,5	139,6	174,7	213,7	256,6
27	0,4	4,1	11,8	23,4	38,9	58,3	81,7	109,0	140,2	175,3	214,4	257,4
28	0,4	4,2	11,9	23,6	39,2	58,7	82 2	109,5	140,7	175,9	215,1	258,1
29	0,5	4,3	12,1	23,8	39,5	59,0	82,5	110,0	141,3	176,6	215,8	258,9
30	0,5	4,4	12,3	24,0	39,8	59,4	83,0	110,4	141,8	177,2	216,4	259,6
31	0,5	4,5	12,4	24,3	40,1	59,8	83,4	110.9	142.4	177,8	217,1	260,4
32	0,6	4,6	12,6	24,5	40,3	60,1	83,8	111,4	143,0	178,4	217,8	261,1
33	0,6	4,7	12,8	24,7	40,6	60,5	84,2	111,9	143,5	179,0	218,5	261,9
34	0,6	4,8	12,9	25,0	40,9	60,8	84,7	112,4	144,1	179,7	219,2	262,6
35	0,7	4,9	13,1	25,2	41,2	61,2	85,1	112,9	144,6	180,3	219,9	263,4
36	0,7	5,0	13,3	25,4	41,5	61,6	85,8	113,4	145,2	180,9	220,6	264,1
37	0,7	5,1	13,4	25,7	41,8	61.9	86,0	113,9	145,8	181,6	221,3	264,9
38	0,8	5,2	13,6	25,9	42,1	62,3	86,4	114,4	146,3	182,2	222,0	265,7
39	0,8	5,3	13,8	26,2	42,5	62,7	86,8	114,9	146,9	182,8	222,7	266,4
40	0,9	5,4	14,0	26,4	42,8	63,0	87,3	115,4	147,5	183,4	223,4	267,2
41	0,9	5,6	14,1	26,6	43,1	63,4	87,7	115,9	148,0	184,1	224,1	267,9
42	1,0	5,7	14,3	26,9	43,4	63,8	88,1	116,4	148,6	184,7	224,8	268,7
43	1,0	5,8	14,5	27,1	43,7	64,2	88,6	116,9	149,2	185,4	225.3	269,5
44	1,1	5,9	14,7	27,4	44,0	64,5	89,0	117,4	149,7	186,0	226,2	270,2
45	1,1	6,0	14,8	27,6	44,3	64,9	89,5	117,9	150,3	186,6	226,9	271,0
46	1,2	6,1	15,0	27,9	44,6	65,3	89,9	118,4	150,9	187,3	227,6	271,8
47	1,2	6,2	15,2	28,1	44,9	65,7	90,3	118,9	151,5	187,9	228,3	272,6
48	1,3	6,4	15,4	28,3	45,2	66,0	90,8	119,5	152,0	188,5	229,0	273,3
49	1,3	6,5	15,6	28,6	45,5	66,4	91,2	120,0	152,6	189,2	229,7	274,1
50	1,4	6,6	15,8	28,8	45,9	66,8	91,7	120,5	153,2	189,8	230,4	274,9
51	1,4	6,7	15,9	29,1	46,2	67,2	92,1	121,0	153,8	190,5	231,1	275,6
52	1,5	6,8	16,1	29,4	46,5	67,6	92,6	121,5	154.4	191,1	231.8	276,4
53	1,5	7,0	16,3	29,6	46,8	68,0	93,0	122,0	154,9	191,8	232,5	277,2
54	1,6	7,1	16,5	29,9	47,1	68,3	93,5	122,5	155,5	192,4	233,3	278,0
55	1,6	7,2	16,7	30,1	47,5	68,7	93,9	123,1	156,1	193,1	234,0	278,9
56	1,7	7,3	16,9	30,4	47,8	69,1	94,4	123,6	156,7	193,7	234,7	279,5
57	1,8	7,5	17 1	30,6	48,1	69,5	94,8	124,1	157,3	194,4	235,4	280,3
58	1,8	7,6	17,3	30,9	48,4	69,9	95,3	124,6	157,8	195,0	236,1	281,1
59	1,9	7,7	17,5	31,1	48,8	70,3	95,7	125,1	158,4	195,7	236,8	281,9
60	2,0	7,8	17,7	31,4	49,1	70,7	96,2	125,7	159,0	196 3	237,5	282,7

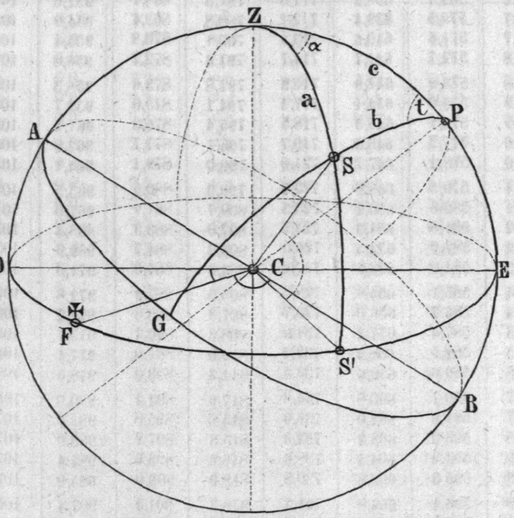
$\frac{\Delta t'}{\text{Sec.}}$	12′	13′	14′	15′	16′	17′	18′	19′	20′	21′	22′	23′
0″	282″,7	331″,8	384″,7	441″,6	502″,5	567″,1	635″,8	708″,4	784″,9	865″,3	949″,6	1038″
1	283,5	332,6	385,6	442,6	503,5	568,2	637,0	709,7	786,2	866,7	951,0	1039
2	284,2	333,4	386,5	443.6	504.6	569,4	638,2	711,0	787,5	868,1	952,0	1041
3	285,0	334,3	387,5	444,6	505,7	570,5	639,4	712,2	788,8	869,4	954,0	1042
4	285,8	335,2	388,4	445,6	506,7	571,6	640,6	713,5	790,1	870,8	955,4	1044
5	286,6	336,0	389,3	446,5	507,8	572,7	641,7	714,7	791,4	872,2	956,8	1045
6	287,4	336,9	390,2	447,5	508,8	573,9	642,9	715,9	792,8	873,6	958,3	1047
7	288,2	337,7	391,1	448,5	509,9	575,0	644,1	717,2	794,1	875,0	959,7	1048
8	289,0	338.6	392,1	449,5	510,9	576,1	645,3	718,5	795,4	876,3	961,2	1050
9	289,8	339,4	393,0	450,5	512.0	577 3	646,5	719,7	796,7	877,7	962,6	1051
10	290,6	340,3	393,9	451,5	513,0	578,4	647,7	721,0	798,0	879,1	964,1	1053
11	291,4	341,2	394.8	452,5	514,1	579,5	648,9	722,2	799,3	880,5	965,5	1054
12	292,2	342,0	395,8	453,5	515,1	580,6	650,1	723,5	800,7	881,9	967,0	1056
13	293,0	342,9	396,7	454,5	516,2	581,8	651,3	724,7	802,0	883,3	968,4	1057
14	293,8	343,7	397,6	455,5	517,2	582,9	652,5	726,0	803,3	884,7	969,9	1059
15	294,6	344,6	398,6	456,5	518,3	584.0	653,6	727,2	804,6	886,0	971,3	1060
16	295,4	345,5	399,5	457,5	519 4	585,1	654,8	728,5	806,0	887,4	972,8	1062
17	296,2	346,3	400,5	458,5	520.4	586 2	656,0	729,7	807,3	888,8	974,2	1063
18	297,0	347,2	401,4	459.5	521,5	587,4	657,2	731,0	808,6	890,2	975,7	1065
19	297,8	348,1	402 3	460,5	522,5	588,5	658,4	732,2	810,0	891,6	977,1	1066
20	298,6	349,0	403,3	461,5	523,5	589,6	659,6	733,5	811,3	893,0	978,6	1068
21	299,4	349,8	404,2	432,5	524,7	590.7	660,8	734,8	812,6	894,4	980,0	1069
22	300,2	350,7	405,1	463,5	525,7	591,9	662,0	736,0	814,0	895,8	981,5	1071
23	301,0	351,6	406,0	464,5	526,8	593,0	663.2	737,3	815,3	897,2	983,0	1072
24	301,8	352,5	407,0	465,5	527,9	594,2	664,4	738,6	816,6	898,6	984,4	1074
25	302,6	353,3	408,0	466,5	528,9	595.3	665,6	739,8	818,0	900,0	985,9	1075
26	303,5	354,2	408,9	467,5	530,0	596,4	666,8	741,1	819,3	901,4	987,4	1077
27	304 3	355,1	409,9	468,5	531,1	597,6	668,0	742,4	820,6	902,8	988,8	1078
28	305,1	356,0	410,8	469,5	532,2	598,7	669,2	743,7	821,9	904,2	990,3	1080
29	305.9	356,9	411,7	470,5	533,2	599.9	670,4	744,9	823,3	905,6	991,7	1081
30	306,7	357,7	412,7	471,5	534,3	601,0	671,6	746,2	824,6	907,0	993,2	1083
31	307.5	358,6	413,6	472,6	535,4	602,1	672,8	747,4	826,0	908,4	994,7	1085
32	308,4	359,5	414,6	473,6	536,5	603,3	674,0	748,7	827,3	909,8	996,2	1086
33	309,2	360.3	415,6	474,6	537,6	604,4	675,3	750,0	828,6	911,2	997,6	1088
34	310,0	361,2	416,6	475,6	538,7	605,6	676,5	751,3	830,0	912,6	999,1	1089
35	310,8	362,1	417,5	476,6	539,7	606,7	677,7	752,6	831,3	914,0	1001	1091
36	311,6	363,0	418,4	477,6	540,8	607,9	678,9	753,8	832,7	915,5	1002	1093
37	312 5	363,9	419,4	478,7	541,9	609,0	680,1	755,1	834,0	916,9	1004	1094
38	313,3	364,8	420,3	479,7	543,0	610,2	681,4	756,4	835,4	918,3	1005	1096
39	314,2	365,7	421,3	480,7	544.1	611,3	682,6	757,7	836,7	919,7	1007	1097
40	315,0	366,5	422,2	481,7	545,2	612,5	683,8	759,0	838,1	921.1	1008	1099
41	315,8	367,5	423,2	482,8	546,3	613,7	685,0	760,3	839,4	922,5	1009	1100
42	316,6	368,4	424,2	483,8	547,4	614.8	686,3	761,5	840,8	923,9	1011	1102
43	317,4	369,3	425,1	484,8	548,5	616,0	687,5	762,8	842,1	925,4	1012	1103
44	318.3	370,2	426,1	485,8	549,6	617,1	688,7	764,1	843,5	926,8	1014	1105
45	319.1	371,1	427,0	386,9	550,6	618,3	690,0	765,4	844,8	928,2	1015	1106
46	319,9	372,0	428.0	487,9	551,7	619,5	691,2	766,7	846,2	929,6	1017	1108
47	320,8	372,9	429,0	488,9	552,8	620,6	692,4	768,0	847,5	931,0	1018	1109
48	321,6	373,8	430,0	490,0	553,9	621,8	693,6	769,3	848,9	932,5	1020	1111
49	322,4	374,7	430,9	491,0	555,0	622,9	694,9	770,6	850,2	933,9	1021	1112
50	323,3	375,6	431,9	492,0	556,1	624,1	696,1	771,9	851,6	935,3	1023	1114
51	324,1	376,5	432,8	493,1	557,2	625,3	697,3	773,2	853,0	936,7	1024	1116
52	325,0	377,4	433,8	494,1	558,3	626,4	698,6	774,5	854,3	938,2	1026	1117
53	325,8	378,3	434,8	495,2	559,4	627,6	699,8	775,8	855,7	939,6	1027	1119
54	326,7	379,2	435,7	496,2	560,5	628,8	701,1	777,1	857,1	941,0	1029	1120
55	327,5	380,2	436,7	497,2	561,6	630,0	702,3	778,4	558,4	942,4	1030	1122
56	328,4	381,1	437,7	498,2	562,7	631,1	703,5	779,7	859,8	943,9	1032	1124
57	329,2	382,0	438,7	499,2	563,8	632,3	704,8	781,0	861,2	945,3	1033	1125
58	330,0	382,9	439,6	500.3	564,9	633.5	706,0	782,3	862,6	946,7	1035	1127
59	330,9	383,8	440,6	501,4	566,0	634,6	707,2	783,6	863,9	948,2	1036	1128
60	331,8	384,7	441,6	502,5	567,1	635,8	708,4	784,9	865,3	949,6	1038	1130

Diese Reductionstafel ist den Beobachtern mit Repetitionskreisen unentbehrlich.

§. 142.

Erstes Beispiel der Azimuthbestimmung nach der neuen Methode von Soldner.

Fig. 75.



Es sind auf einem Punkte C [1] der östlichen Halbkugel, dessen Polhöhe $= 48^0\,43'\,22''$ ist, im Juli durch vier Zenith-Distanzenmessungen die von der Refraction bereinigten und mit der Parallaxe (P. cosh.) und dem Sonnenhalbmesser vermehrten und somit rectificirten Sonnenmittelpunktshöhen SCS' und die dazu gehörigen vier Azimuthalwinkel S'CF bestimmt worden (der Horizontalfaden des Kreuzes im Fernrohr tangirte also beim Anvisiren der Sonne den obern Sonnenrand und der Verticalfaden den Sonnenrand links); nun soll hiernach das Azimuth DCF dieses Punktes, F welcher Vormittags rechts von der Sonne lag, bestimmt werden.

Auf den Mittelpunkt der Sonne berechnete:

	a) wahre Sonnenhöhen SCS' = h	b) Azimuthalwinkel S'CF = A'
Beobachtung 1)	2⁰ 54' 24"	83⁰ 43' 24"
„ 2)	3 32 40	82 53 17,6
„ 3)	3 56 58	82 23 29,3
„ 4)	5 23 38	80 36 28,0
	Summe	329 36 38,9 und div. 4
	A =	82 24 9,725.

Eine nach der wahren Zeit regulirte Sekundentaschenuhr zeigte nach den Momenten der Beobachtung

1)	4 u 36' 8" Morgens	Dauer der Beobachtung 17' 3" und in dieser Zeit nahm die Declination um 7" ab; also bis auf das Mittel 3",5
2)	4 40 33 „	
3)	4 43 17 „	
4)	4 53 11 „	

und hier berechnen sich

	I. die Declinationen $GS = \delta$	II. die Polardistanzen $SP = D$
1)	+ 21⁰ 7' 39"	68⁰ 52' 21"
2)	+ 21 7 37	68 52 23
3)	+ 21 7 36	68 52 24
4)	+ 21 7 32	68 52 28
Mittlere Declination $\delta =$	+ 21 7 35,5	

[1] Bohnenberger geographische Ortsbestimmung von 1795. S. 461. In Altburg bei Calw wurde das Azimuth von Kornbühl zu 35⁰ 34' 46" bestimmt.

Berechnung der Stundenwinkel t.

Aus h der wahren Sonnenhöhe
D der Polardistanz und
φ der Polhöhe
hat man $(\sin {}^1/_2 t)^2 = \frac{\cos {}^1/_2 S . \sin ({}^1/_2 S - h)}{\cos \varphi . \sin D}$
wo $h + D + \varphi = S$ ist.

Ad 1te Beobachtung h	$= 2^0\ 54'\ 24''$	Log. cos ½ S	= 9,6956583
D	= 68 52 21	Log. sin (½ S — h)	= 9,9252751
φ	= 48 43 22		9,6209334
S	= 120 30 7	Log. cos φ	= 9,8193484
½ S	= 60 15 3,5	Log. sin D	= 9,9697795
½ S — h	= 57 20 39,5		9,7891279
		Log. (sin ½ t)²	= 9,8318055
		und Log. sin ½ t	= 9,9159027[5]; ½ t = 55°28′57″,14

folglich ad 1. Stundenwinkel t = Bogen AG = 110° 57′ 54″,28 = 7 St. 23′ 51″,41.

Die erste Beobachtung geschah also Morgens 4u 36′ 8″59.

Ad 2te Beobachtung h	$= 3^0\ 32'\ 40''$	Log. cos ½ S	= 9,6913977
D	= 68 52 23	Log. sin (½ S — h)	= 9,9237178
φ	= 48 43 22		9,6151155
S	= 121 8 25	Log. cos φ	= 9,8193484
½ S	= 60 34 12,5	Log. sin D	= 9,9697811
½ S — h	= 57 1 32,5		9,7891295
		Log. (sin ½ t)²	= 9,8259860
		Log. sin ½ t	= 9,9129930 u. ½ t = 54°55′48″,31

folglich ad 2 Stundenwinkel t = 109° 51′ 36″,62 = 7 St. 19′ 26″,44

Ad 3te Beobachtung h	$= 3^0\ 56'\ 58''$	Log. cos ½ S	= 9,6886639
D	= 68 52 24	Log. sin (½ S — h)	= 9,9227192
φ	= 48 43 22		9,6113831
S	= 121 32 44	Log. cos φ	= 9,8193484
½ S	= 60 46 22	Log. sin D	= 9,9697819
½ S — h	= 56 49 24		9,7891303
		Log. (sin ½ t)²	= 9,8222528
		Log. sin ½ t	= 9,9111264 u. ½ t = 54°34′53″,66

folglich ad 3 Stundenwinkel t = 109° 9′ 47″,32 = 7 St. 16′ 39″,14.

Ad 4te Beobachtung h	$= 5^0\ 23'\ 38''$	Log. cos ½ S	= 9,6787250
D	= 68 52 28	Log. sin (½ S — h)	= 9,9190930
φ	= 48 43 22		9,5978180
S	= 122 59 28	Log. cos φ	= 9,8193484
½ S	= 61 29 44	Log. sin D	= 9,9697835
½ S — h	= 56 6 6		9,7891319
		Log. (sin ½ t)²	= 9,8086861
		Log. sin ½ t	= 9,9043430[5] u. ½ t = 53°21′5″,03

folglich ad 4 Stundenwinkel t = 106° 42′ 10″,06 = 7 St. 6 48″,67.

Stundenwinkel.	Zeiten. 7^u 16′ 41″,41	$\Delta t'$.	$\frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta t}{\sin 1''}$	$\left(\frac{\Delta t'}{10}\right)^3$
1) 110° 57′ 54″,28	7^u 23′ 51″,41	+ 7′ 10″	100,8	+ 0,373
2) 109 51 36,62	7 19 26,44	+ 2 45,03	14,8	+ 0,020
3) 109 9 47,32	7 16 39,14	0 2,27	0	0
4) 106 42 10,06	7 6 48,67	− 9 52,74	191,8	− 0,97
436 41 28,28:4	29 6 45,66		307,4	− 0,577
t = 109 10 22,07			$= \Sigma \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta t}{\sin 1''}$	$= \Sigma \left(\frac{\Delta t'}{10}\right)^3$
½t = 54 35 11,03				

$$\text{Tang. } \beta = \frac{\sin \frac{1}{2} (\varphi - \delta)}{\cos \frac{1}{2} (\varphi + \delta)} . \text{Cotg. } \tfrac{1}{2} t$$

Log. sin ½ (φ − δ) = 9,3774914
Log. cos ½ (φ + δ) = 9,9137638
9,4637276
Log. Cotg. ½ t = 9,8518820
Log. Tang. β = 9,3156096; und β = 11° 41′ 8″,19; 2 β = 23° 22′ 16″,38.

φ = 48° 43′ 22″
δ = + 21 7 35,5
φ − δ = 27 35 46,5
½ (φ − δ) = 13 47 53,25
φ + δ = 69 50 57,5
½ (φ + δ) = 34 55 28,75

$$\text{Tang. } \gamma = \frac{\cos \frac{1}{2} (\varphi - \delta)}{\sin \frac{1}{2} (\varphi + \delta)} . \text{Cotg. } \tfrac{1}{2} t$$

Log. cos ½ (φ − δ) = 9,9872828
Log. sin ½ (φ + δ) = 9,7577745
0,2295083
Log. Cotg. ½ t = 9,8518820
Log. Tang. γ = 0,0813903
γ = 50° 20′ 15″,69
2 γ = 100 40 31,38
und β + γ = 62 1 23,88

$$\sin z = \frac{\cos \delta . \sin t}{\sin (\beta + \gamma)}$$

Log. cos δ = 9,9697824
Log. sin t = 9,9752169
C Log. sin (β + γ) = 0,0539713
Log. sin z = 9,9989706
z = 86° 3′ 24″,0
½ z = 43 1 42,0

$$M = \frac{\cos \varphi . \cos \delta}{4} . \left\{ \frac{\sin 2 \gamma}{\cos \frac{1}{2} z^2} - \frac{\sin 2 \beta}{\sin \frac{1}{2} z^2} \right\} .$$

Log. sin 2 γ = 9,9924176
Log. cos ½ z² = 9,7278542
0,2645634

Log. sin 2 β = 9,5984478
Log. sin ½ z² = 9,6680270
9,9304208

Log. 0,98696 = 9,9942996
Log. cos φ = 9,8193484
Log. cos δ = 9,9697824
Comp. Log. 4 = 9,3979400
Log. M = 9,1813704

$$\frac{\sin 2 \gamma}{\cos \frac{1}{2} z^2} = 1,83892 \qquad \frac{\sin 2 \beta}{\sin \frac{1}{2} z^2} = 0,85196$$

$$\frac{\sin 2 \beta}{\cos \frac{1}{2} z^2} = 0,85196$$

$$\frac{\sin 2 \gamma}{\cos \frac{1}{2} z^2} - \frac{\sin 2 \beta}{\sin \frac{1}{2} z^2} = 0,98696.$$

$$N = \frac{\cos \varphi^2 . \cos \delta^2 . \sin t}{4} \left\{ \frac{\sin 2 \gamma}{\cos \frac{1}{2} z^4} + \frac{\sin 2 \beta}{\sin \frac{1}{2} z^4} \right\} + M. \text{Cotg. t.}$$

Log. sin 2 γ = 9,9924176	Log. sin 2 β = 9,5984478	Log. M = 9,1813704
Log. cos $^1/_2$ z^4 = 9,4557084	Log. sin $^1/_2$ z^4 = 9,3360540	Log. Cotg. t = 9,5412105
Log. $\frac{\sin 2\gamma}{\cos {}^1/_2 z^4}$ = 0,5367092	= 0,2623938	= 8,7225809
$\frac{\sin 2\gamma}{\cos {}^1/_2 z^4}$ = 3,4412	$\frac{\sin 2\beta}{\sin {}^1/_2 z^4}$ = 1,8298	M Cotg. t = 0,05279
	3,4412	

$$\frac{\sin 2\gamma}{\sin {}^1/_2 z^4} = \frac{\sin 2\beta}{\sin {}^1/_2 z^4} = 5{,}2710$$

Log. 5,2710	= 0,7218930	N = 0,47132 + 0,05279	= 0,52411
Log. sin t	= 9,9752169	Log. N	= 9,7194224
Log. cos δ^2	= 9,9395648	Log. 2,856	= 0,4557582
Log. cos φ^2	= 9,6386968	folgl. Log. 2,856 N	= 0,1751806
Comp. Log. 4	= 9,3979400		
	= 9,6733115		
	= 0,47132		

Endlich $\Delta\,\alpha = \frac{M}{n} \cdot \Sigma \frac{2 \sin^2 {}^1/_2 \Delta t}{\sin 1''} + \frac{2{,}856\,N}{n} \cdot \Sigma \left(\frac{\Delta t'}{10}\right)^3$

Log. M	= 9,1813704	
Log. 307,4	= 2,4877039	
Comp. Log. 4	= 9,3979400	
Log. $\left(\frac{M}{n} \cdot \Sigma \frac{2 \sin^2 {}^1/_2 \Delta t}{\sin'' 1}\right)$	= 1,0670143	= 11″,669
Log. 2,856 N	= 0,1751806	
Log. 0,577	= 9,7611758	
Comp. Log. 4	= 9,3979400	
Log. $\left(\frac{2{,}856\,N}{n} \cdot \Sigma \frac{\Delta t}{10}\right)^3$	= 9,3342964	= 0,2159
		$\Delta\,\alpha$ = + 11,88

$180^0 - \beta - \gamma = 180^0 - 62^0\ 1'\ 23'',88 = 117^0\ 58'\ 36'',12$

$A = -\ 82\ \ 24\ \ \ 9{,}72$

$35\ \ 34\ \ 26{,}40$

$\Delta\,\alpha = +\ \ \ \ 11{,}88$

Folglich Azimuth DCF = 35 34 38,28.

§. 143.

Zweite Methode der Auflösung des ersten Beispiels, nach Bohnenbergers geogr. Ortsbestimmung von 1795.

Im sphärischen Dreieck ZPS Fig. 75 ist

sin ZS : sin ZPS = sin PS : sin PZS

cos h : sin t = cos δ : sin α

$$\text{folglich } \sin\alpha = \frac{\sin t \cdot \cos\delta}{\cos h}$$

Legt man nun die in I. bestimmten Grössen von t, δ und h zu Grunde, so ist für

Beobachtung 1)	$t = 110^0\ 57'\ 54'',28$	und Log. sin t	$= 9,9702532$
	$\delta = 21\quad 7\quad 39$	Log. cos δ	$= 9,9697796$
	$h = 2\quad 54\quad 24$	Comp. Log. cos h	$= 0,0005591$
	$180^0 - \alpha = 119^0\ 17'\ 25'',34$	Log. sin α	$= 9,9405919$
	$- A' = 83\quad 43\quad 24$	α	$= 60^0\ 42'\ 34'',66$
	Azim. ad 1) $= 35\quad 34\quad 1,34$		
für Beobachtung 2)	$t = 109^0\ 51'\ 36'',62$	und Log. sin t	$= 9,9733701$
	$\delta = 21\quad 7\quad 37$	Log. cos δ	$= 9,9697812$
	$h = 3\quad 32\quad 40$	Comp. Log. cos h	$= 0,0008315$
	$180^0 - \alpha = 118^0\ 28'\ 46'',2$	Log. sin α	$= 9,9439828$
	$- A' = 82\quad 53\quad 17,6$	α	$= 61^0\ 31'\ 13'',8$
	Azimuth ad 2) $= 35\quad 35\quad 28,6$		
für Beobachtung 3)	$t = 109^0\ 9'\ 47'',32$	und Log. sin t	$= 9,9752423$
	$\delta = 21\quad 7\quad 36$	Log. cos δ	$= 9,9697820$
	$h = 3\ 56\quad 58$	Comp. Log. cos h	$= 0,0010326$
	$180^0 - \alpha = 117^0\ 58'\ 10'',98$	Log. sin α	$= 9,9460569$
	$- A' = 82\quad 23\quad 29,3$	α	$= 62^0\ 1'\ 49'',02$
	Azimuth ad 3) $= 35\quad 34\quad 41,68$		
für Beobachtung 4)	$t = 106^0\ 42'\ 10'',06$	und Log. sin t	$= 9,9812787$
	$\delta = 21\quad 7\quad 32$	Log. cos δ	$= 9,9697852$
	$h = 5\quad 23\quad 38$	Comp. Log. cos h	$= 0,0019273$
	$180^0 - \alpha = 116^0\ 10'\ 48'',84$	Log. sin α	$= 9,9529912$
	$- A' = 80^0\ 36\quad 28$	α	$= 63^0\ 59'\ 11'',16$
	Azimuth ad 4) $= 35\quad 34\quad 20,84$		

Azimuth	1)	35^0	$34'$	$1'',34$
„	2)	35	35	28,60
„	3)	35	34	41,68
„	4)	35	34	20,84
Summa		142	18	32,46

und diese dividirt mit 4 gibt das Azimuth DCF $= 35^0\ 34'\ 38'',11$ wie oben aus I.

Werden die Seiten des sphärischen Dreiecks ZPS Fig. 75 als bekannt angenommen und mit a, b, c bezeichnet, so ist

$$a = SZ = 90^0 - h$$
$$b = SP = 90 - \delta \text{ oder } 90^0 + \delta$$
$$c = PZ = 90 - \varphi$$

und nach der sphärischen Trigonometrie hat man für t den Stundenwinkel:

$$\sin {}^1/_2\, P = \sqrt{\frac{\sin {}^1/_2\,(a + b - c) \,.\, \sin {}^1/_2\,(a + c - b)}{\sin b \,.\, \sin c}}$$

und für α; $$\sin {}^1/_2\, Z = \sqrt{\frac{\sin {}^1/_2\,(a + b - c) \,.\, \sin {}^1/_2\,(b + c - a)}{\sin a \,.\, \sin c}}$$

oder wenn $S = a + b + c$ genommen wird,

$$\sin {}^1/_2\, Z = \sqrt{\frac{\sin({}^1/_2\, S - a) \,.\, \sin({}^1/_2\, S - c)}{\sin a \,.\, \sin c}}$$

Ist ferner 1) der Stundenwinkel t aus der genauen Beobachtungszeit,
2) die Polhöhe φ,
3) die Declination der Sonne δ bekannt, so findet sich die wahre Sonnenhöhe aus der Formel: $\sin h = \sin \varphi . \sin \delta + \cos \varphi . \cos \delta . \cos t$. (wenn $\delta +$)

Aus dieser Formel findet sich aber auch der Ausdruck für die Bestimmung von t

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin \varphi . \sin \delta}{\cos \varphi . \cos \delta}$$

und diese Formel für genaue logarithmische Berechnung einzurichten, setze man statt cos t seinen gleichen Werth $1 - 2 (\sin {}^1/_2\, t)^2$ und man hat:

$$\sin h = \cos (\varphi - \delta) - 2 (\sin {}^1/_2\, t)^2 . \cos \varphi . \cos \delta,$$

folgl. $2 (\sin {}^1/_2\, t)^2 . \cos \varphi . \cos \delta = \sin h - \cos (\varphi - \delta) = \sin h - \sin (90^0 - \varphi + \delta)$

$$= 2 \cos \left(\frac{h + 90^0 - \varphi + \delta}{2}\right) . \sin \left(\frac{h - 90^0 + \varphi - \delta}{2}\right)$$

und setzt man endlich für δ die Polardistanz D, also $\delta = 90^0 - D$, so erhält man:

$$(\sin {}^1/_2\, t)^2 . \cos \varphi . \sin D = \sin \left\{\frac{(\varphi + D - h)}{2}\right\} . \cos \left\{\frac{(\varphi + D + h)}{2}\right\}$$

und wird noch der Kürze wegen $\varphi + D + h = S$ gesetzt, so erhält man die Formel für die Bestimmung des Stundenwinkels:

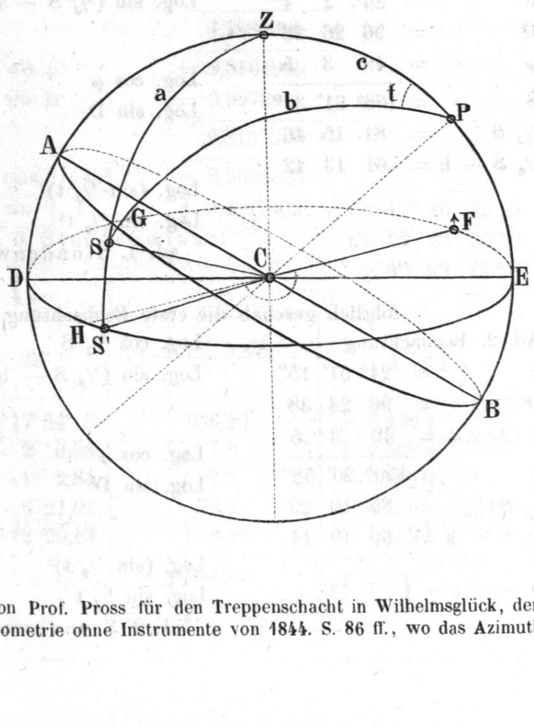
$$(\sin {}^1/_2\, t)^2 = \frac{\cos {}^1/_2\, S . \sin ({}^1/_2\, S - h)}{\cos \varphi . \sin D.}$$

§. 144.

Erste Methode der Auflösung nach Soldner, zweites Beispiel.[1]

Angenommen es seyen im October auf einem Punkte C, dessen Polhöhe $= 49^0\ 3'\ 5''$ ist, mit einem Theodolith Messungen für die Azimuthbestimmung desselben vorgenommen worden, wo das Object F Vormittags links von der Sonne lag.

Fig. 76.



Nebst 5 Sonnenhöhen S'S seyen auch zugleich die zugehörigen 5 horizontalen Azimuthal-Winkel FCS' gemessen worden, man soll hiernach das Azimuth F von C aus gesehen, bestimmen.

Die Sonnenränder wurden mit dem astronomischen Fernrohr so pointirt, dass der Horizontalfaden den untern Sonnenrand und der Verticalfaden die Sonne links tangirte. Die 5 gemessenen Sonnenhöhen wurden dann so

[1] Dieses ist die Azimuthbestimmung von Prof. Pross für den Treppenschacht in Wilhelmsglück, den 10. October 1843; s. dessen praktische Geometrie ohne Instrumente von 1844. S. 86 ff., wo das Azimuth $= 35^0\ 44\ 46$ angegeben ist.

rectificirt, dass der negative Collimationsfehler ($-3' 40''$) des Höhenkreises und die Refraktion abgezogen, sowie die Parallaxe ($P \cos h = 8'',6 \cos h$) und der Halbmesser der Sonne ($16' 5''$) im Verhältniss $\sin z : 1$ addirt wurden.

Hiernach ergaben sich

1) Die wahren Sonnenhöhen = h		2) Die um den Sonnenhalbmesser vergrösserten Azimuthalwinkel.	
Beobachtung	1) 23° 2′ 4″	168° 17′ 0″	Mittel A = 172° 32′ 4″
„	2) 24 51 15	172 1 0	
„	3) 25 11 47	172 45 20	
„	4) 25 46 49	174 3 40	
„	5) 26 25 22	175 33 20	

Die für die Mittagszeit nach den Ephemeriden bestimmte Declination der Sonne berechnete sich nach einer Sekunden-Taschenuhr, welche die wahre Zeit zeigte, auf die 5 Beobachtungen zu:

Declination = δ	Polardistanz = D
ad 1) — 6° 26′ 23″	96° 26′ 23″
2) — 6 26 38	96 26 38
3) — 6 26 41	96 26 41
4) — 6 26 46	96 26 46
5) — 6 26 51	96 26 51

Aus der wahren Sonnenhöhe = h, der Polardistanz = D und der Polhöhe des Beobachtungsorts = φ bestimmen sich nun die wahren Zeitmomente der Beobachtungen aus:

$$(\sin {}^1/_2\, t)^2 = \frac{\cos {}^1/_2\, S \sin ({}^1/_2\, S - h)}{\cos \varphi \sin D} \text{ wo } h + D + \varphi = S.$$

Ad. 1. Beobachtung			
h	= 23° 2′ 4″	Log. cos ½ S	= 8,9998530
D	= 96 26 23	Log. sin (½ S — h)	= 9,9427741
φ	= 49 3 5		8,9426271
S	= 168° 31′ 32″	Log. cos φ	= 9,8164945
½ S	= 84 15 46	Log. sin D	= 9,9972510
½ S — h	= 61 13 42		9,8137455
		Log. (sin ½ t)²	= 9,1288816
		Log. sin ½ t	= 9,5644408; ½ t = 21° 31′ 8″,39
		ad. 1. Stundenwinkel	t = 43 2 16″,78
			= 2St. 52 9″,11

folglich geschah die erste Beobachtung Morgens 9U. 7′ 50″,89

Ad. 2. Beobachtung			
h	= 24° 51′ 15″	Log. cos ½ S	= 8,9248862
D	= 96 26 38	Log. sin (½ S — h)	= 9,9389244
φ	= 49 3 5		8,8638106
S	= 170° 20′ 58″	Log. cos φ	= 9,8164945
½ S	= 85 10 29	Log. sin D	= 9,9972477
½ S — h	= 60 19 14		9,8137422
		Log. (sin ½ t)²	= 9,0500684
		Log. sin ½ t	= 9,5250342; ½ t = 19° 34′ 19″,34
		ad. 2. Stundenwinkel	t = 39 8 38″,68
			= 2St. 36 34″,58

Ad. 3. Beobachtung

$h = 25^0\ 11'\ 47''$
$D = 96\ 26\ 41$
$\varphi = 49\ 3\ 5$
$S = 170^0\ 41'\ 33''$
$^1/_2\ S = 85\ 20\ 46'',5$
$^1/_2\ S - h = 60\ 8\ 59'',5$

Log. cos $^1/_2$ S $= 8,9092028$
Log. sin ($^1/_2$ S — h) $= 9,9381845$
$8,8473873$
Log. cos φ $= 9,8164945$
Log. sin D $= 9,9972469$
$9,8137414$
Log. (sin $^1/_2$ t)^2 $= 9,0336459$
Log. sin $^1/_2$ t $= 9,5168229$; $^1/_2\,t = 19^0\ 11'\ 27'',4$
ad. 3. Stundenwinkel $t = 38\ 22\ 54'',88$
$= 2^{St.}\ 33\ 31'',66$

Ad. 4. Beobachtung

$h = 25^0\ 46'\ 49''$
$D = 96\ 26\ 46$
$\varphi = 49\ 3\ 5$
$S = 171^0\ 16'\ 40''$
$^1/_2\ S = 85\ 38\ 20$
$^1/_2\ S - h = 59\ 51\ 31$

Log. cos $^1/_2$ S $= 8,8810551$
Log. sin ($^1/_2$ S — h) $= 9,9369101$
$8,8179652$
Log. cos φ $= 9,8164945$
Log. sin D $= 9,9972457$
$9,8137402$
Log. (sin $^1/_2$ t)^2 $= 9,0042250$
Log. sin $^1/_2$ t $= 9,5021125$; $^1/_2\,t = 18^0\ 31'\ 41'',16$
ad. 4. Stundenwinkel $t = 37\ 3\ 22'',32$
$= 2^{St.}\ 28\ 13'',49$

Ad. 5. Beobachtung

$h = 26^0\ 25'\ 22''$
$D = 96\ 26\ 51$
$\varphi = 49\ 3\ 5$
$S = 171\ 55\ 18$
$^1/_2\ S = 85\ 57\ 39$
$^1/_2\ S - h = 59\ 32\ 17$

Log. cos $^1/_2$ S $= 8,8478093$
Log. sin ($^1/_2$ S — h) $= 9,9354902$
$8,7832995$
Log. cos φ $= 9,8164945$
Log. sin D $= 9,9972445$
$9,8137390$
Log. (sin $^1/_2$ t)^2 $= 8,9695605$
Log. sin $^1/_2$ t $= 9,4847802$; $^1/_2\,t = 17^0\ 46'\ 42'',5$
ad. 5. Stundenwinkel $t = 35\ 33\ 25'',0$
$= 2^{St.}\ 22\ 13'',67$

Stundenwinkel.	Zeiten. $2^u\ 34'\ 34'',5$	$\Delta t'$	$\frac{2\sin^2 {}^1/_2\,\Delta t}{\sin 1''}$	$\left(\frac{\Delta t'}{10}\right)^3$	
1) $t = 43^0\ 2'\ 16'',78$	$2^u\ 52'\ 9'',11$	$+\ 17'\ 34'',61$	606,26	$+\ 5,430$	$+5,438$
2) $t = 39\ 8\ 38,68$	2 36 34,58	$+\ 2\ \ 0,08$	7,8	$+\ 0,008$	
3) $t = 38\ 22\ 54,88$	2 33 31,66	$-\ 1\ \ 2,84$	2,2	$-\ 0,001$	$-2,139$
4) $t = 37\ 3\ 22,32$	2 28 13,49	$-\ 6\ 21,01$	79,2	$-\ 0,256$	
5) $t = 35\ 33\ 25,0$	2 22 13,67	$-\ 12\ 20,83$	299,26	$-\ 1,882$	
Mittlerer Stundenwinkel. $t = 38^0 38'\ 7'',52$ $^1/_2 t = 19\ 19\ 3,766$			$\Sigma\ 994,72$ $= \Sigma\ \frac{2\sin^2 {}^1/_2\,\Delta t}{\sin 1''}$	$\Sigma\left(\frac{\Delta t}{10}\right)^3 = +3,299$	

$$\text{Tang. } \beta = \frac{\sin {}^1/_2 (\varphi - \delta)}{\cos {}^1/_2 (\varphi + \delta)} \text{ Cotg. } {}^1/_2 \text{ t}$$

$\varphi = 49^0 \ 3' \ 5''$

$\delta = 6 \ 26 \ 41$

$\varphi - \delta = 55 \ 29 \ 46$

${}^1/_2 (\varphi - \delta) = 27 \ 44 \ 53$

$\varphi + \delta = 42 \ 36 \ 24$

${}^1/_2 (\varphi + \delta) = 21 \ 18 \ 12$

Log. sin $^1/_2 (\varphi - \delta) = 9{,}6679985$

cos $^1/_2 (\varphi + \delta) = 9{,}9692622$

$9{,}6987363$

Log. Cotg. $^1/_2$ t $= 0{,}4552599$

Log. Tang. β $= 0{,}1539962$; und $\beta = 54^0 \ 57' \ 6'',56$; $2 \beta = 109^0 \ 54' \ 13'',12$.

$$\text{Tang. } \gamma = \frac{\cos {}^1/_2 (\varphi - \delta)}{\sin {}^1/_2 (\varphi + \delta)} \text{ Cotg. } {}^1/_2 \text{ t}$$

Log. cos $^1/_2 (\varphi - \delta) = 9{,}9469450$

Log. sin $^1/_2 (\varphi + \delta) = 9{,}5602719$

$0{,}3866731$

Log. Cotg. $^1/_2$ t $= 0{,}4552599$

Log. Tang. $\gamma = 0{,}8419330$

$\gamma = 81^0 \ 48' \ 40'',44$

$2 \gamma = 163 \ 37 \ 20'',88$

und $\beta + \gamma = 136 \ 45 \ 47'',00$

$$\sin Z = \frac{\cos \delta \sin t}{\sin (\beta + \gamma)}$$

Log. cos $\delta = 9{,}9972469$

Log. sin t $= 9{,}7954369$

Compl. Log. sin $(\beta + \gamma) = 0{,}1642987$

Log. sin Z $= 9{,}9569825$

$Z = 64^0 \ 55' \ 1'',92$

$^1/_2 Z = 32 \ 27 \ 30'',96$

$$M = \frac{\cos \varphi \cos \delta}{4} \left\{ \frac{\sin 2 \gamma}{\cos {}^1/_2 Z^2} - \frac{\sin 2 \beta}{\sin {}^1/_2 Z^2} \right\}$$

Log. sin $2 \gamma = 9{,}4501956$

Log. cos $^1/_2 Z^2 = 9{,}8524578$

$9{,}5977378$

$$\frac{\sin 2 \gamma}{\cos {}^1/_2 Z^2} = 0{,}39604$$

$-\ 3{,}26441$

Log. sin $2 \beta = 9{,}9732510$

Log. sin $^1/_2 Z^2 = 9{,}4594464$

$0{,}5138046$

$$\frac{\sin 2 \beta}{\sin {}^1/_2 Z^2} = 3{,}26441$$

$$\frac{\sin 2 \gamma}{\cos {}^1/_2 Z^2} - \frac{\sin 2 \beta}{\sin {}^1/_2 Z^2} = -\ 2{,}86838$$

Log. $-\ 2{,}86837 = 0{,}4576352$ neg.

Log. cos $\delta = 9{,}9972469$

Log. cos $\varphi = 9{,}8164945$

Compl. Log. 4 $= 9{,}3979400$

Log. M $= 9{,}6693166$ neg.

$$N = \frac{\cos \varphi^2 \cos \delta^2 \sin t}{4} \left\{ \frac{\sin 2 \gamma}{\cos {}^1/_2 Z^4} + \frac{\sin 2 \beta}{\sin {}^1/_2 Z^4} \right\} + M \text{ Cotg. t.}$$

Log. sin $2 \gamma = 9{,}4501956$ Log. sin $2 \beta = 9{,}9732510$ Log. M $= 9{,}6693166$

Log. cos $^1/_2 Z^4 = 9{,}7049156$ Log. sin $^1/_2 Z^4 = 8{,}9188928$ Log. Cotg. t $= 0{,}0972889$

$9{,}7452800$ $\quad 1{,}0543582$ $\quad 9{,}7666055$ neg

$$\frac{\sin 2 \gamma}{\cos {}^1/_2 Z^4} = 0{,}55626 \qquad \frac{\sin 2 \beta}{\sin {}^1/_2 Z^4} = 11{,}3333$$

M Cotg. t $= 0{,}58426$ neg.

$$\frac{\sin 2 \beta}{\sin {}^1/_2 Z^4} = 11{,}3333$$

Summe $11{,}88956$ und

$$\begin{aligned}
\text{Log. } 11{,}88956 &= 1{,}0751659\\
\text{Log. sin t} &= 9{,}7954369\\
\text{Log. cos } \delta^2 &= 9{,}9944938\\
\text{Log. cos } \varphi^2 &= 9{,}6329890\\
\text{Compl. Log. } 4 &= 9{,}3979401\\
\hline
&\ 9{,}8960257
\end{aligned}$$

$$\frac{\cos\varphi^2 \cos\delta^2 \sin t}{4}\left\{\frac{\sin 2\gamma}{\cos {}^1/_2 Z^4} + \frac{\sin 2\beta}{\sin {}^1/_2 Z^4}\right\} = 0{,}78709 \qquad \text{Log. N} = 9{,}3071322$$

$$- \text{M Cotg. t} = 0{,}58426 \qquad \text{Log. } 2{,}856 = 0{,}4557582$$

$$\text{folglich N} = 0{,}20283 \qquad \text{Log. } 2{,}856 \text{ N} = 9{,}7628904$$

und endlich: $$\triangle\,\alpha = \frac{M}{n}.\Sigma.\frac{2\sin^2 {}^1/_2 \triangle t}{\sin 1''} + \frac{2{,}856\text{ N}}{n}.\Sigma.\left(\frac{\triangle t'}{10}\right)^3$$

$$\begin{aligned}
\text{Log. M} &= 9{,}6693166 \text{ neg.}\\
\text{Log. } 994{,}72 &= 2{,}9977009\\
\text{Compl. Log. } 5 &= 9{,}3010300
\end{aligned}$$

$$\text{Log. }\left(\frac{M}{n}.\Sigma.\frac{2\sin^2 {}^1/_2 \triangle t}{\sin 1''}\right) = 1{,}9680475 \text{ neg.} \qquad = -\ 92'',906$$

$$\begin{aligned}
\text{Log. } 2{,}856\text{ N} &= 9{,}7628904\\
\text{Log. } 3{,}299 &= 0{,}5183823\\
\text{Compl. Log. } 5 &= 9{,}3010300
\end{aligned}$$

$$\text{Log. }\left(\frac{2{,}856\text{ N}}{n}.\Sigma.\left(\frac{\triangle t'}{10}\right)^3\right) = 9{,}5823027 \qquad +\ 0'',382$$

$$\triangle\,\alpha = -\ 92'',542 = -\ 0^0\ 1'\ 32'',52$$

$$\begin{aligned}
180^0 - \beta - \gamma &= 43^0\ 14'\ 13'',0\\
+ \text{A} &= 172\ \ 32\ \ \ 4{,}0\\
\hline
&\ 215\ \ 46\ \ 17{,}0\\
- \triangle\,\alpha &= \ \ \ 0\ \ \ 1\ \ 32{,}52\\
\hline
\text{Azimuthbogen FES'D} &= 215\ \ 44\ \ 44{,}48\\
\text{„ \quad DCH} &= \ \ 35\ \ 44\ \ 44{,}48 = \text{FCE.}
\end{aligned}$$

§. 145.

Zweite Methode der Auflösung des zweiten Beispiels nach Bohnenbergers geogr. Ortsbestimmung von 1795.

Im Dreieck PSZ ist $\sin Z = \sin\alpha = \dfrac{\sin t \cos\delta}{\cos h}$ Fig. 76.

1. Beobachtung $t = 43^0\ 2'\ 16'',78$ — Log. sin t $= 9{,}8340920$
$\delta = 6\ \ 26\ \ 23$ — Log. cos δ $= 9{,}9972511$
$h = 23\ \ 2\ \ 4$ — C. Log. cos h $= 0{,}0360849$

$$\begin{aligned}
\text{Log. sin } \alpha &= 9{,}8674280\\
&\ 180^0\\
\alpha &= 47^0\ 28'\ 14'',90\\
\hline
&\ 132\ \ 31\ \ 45{,}10\\
\text{A}' &= 168\ \ 17\ \ \ 0\\
\hline
\text{Azimuth ad 1} &= 35\ \ 45\ \ 14{,}9
\end{aligned}$$

2. Beobachtung	$t = 39^0\ 8'\ 38'',68$	Log. sin t $= 9,8002170$
	$\delta = 6\ 26\ 38$	Log. cos δ $= 9,9972476$
	$h = 24\ 51\ 15$	C. Log. cos h $= 0,0422105$
		Log. sin α $= 9,8396751$
		180^0
		α $= 43^0\ 44'\ 3'',05$
		$136\ 15\ 56,95$
		A′ $= 172\ 1$
		Azimuth ad 2 $= 35\ 45\ 3,05$
3. Beobachtung	$t = 38^0\ 22'\ 54'',88$	Log. sin t $= 9,7930219$
	$\delta = 6\ 26\ 41$	Log. cos δ $= 9,9972469$
	$h = 25\ 11\ 47$	C. Log. cos h $= 0,0434215$
		Log. sin α $= 9,8336903$
		180^0
		α $= 42^0\ 59'\ 18'',80$
		$137\ 0\ 41,20$
		A′ $= 172\ 45\ 20$
		Azimuth ad 3 $= 35\ 44\ 38,8$
4. Beobachtung	$t = 37^0\ 3'\ 22'',32$	Log. sin t $= 9,7800278$
	$\delta = 6\ 26\ 46$	Log. cos δ $= 9,9972457$
	$h = 25\ 46\ 49$	C. Log. cos h $= 0,0455314$
		Log. sin α $= 9,8228049$
		180^0
		α $= 41^0\ 40'\ 49'',32$
		$138\ 19\ 10,68$
		A′ $= 174\ 3\ 40$
		Azimuth ad 4 $= 35\ 44\ 29,28$
5. Beobachtung	$t = 35\ 33\ 25'',0$	Log. sin t $= 9,7645586$
	$\delta = 6\ 26\ 51$	Log. cos δ $= 9,9972445$
	$h = 26\ 25\ 22$	C. Log. cos h $= 0,0479175$
		Log. sin α $= 9,8097206$
		180^0
		α $= 40^0\ 11'\ 0'',96$
		$139\ 48\ 59,04$
		A′ $= 175\ 33\ 20$
		Azimuth ad 5 $= 35\ 44\ 20,96$

Das arithmetische Mittel aus den 5 Bestimmungen

1.	35^0	$45'$	$14'',9$
2.	35	45	3,05
3.	35	44	38,80
4.	35	44	29,28
5.	35	44	20,96
Summe	178	43	46,99

Azimuth des Punktes F $=$ 35 44 45,39 $=$ FEC. diff. mit I um $0'',91$.

§. 146.

Die Methode der kleinsten Quadrate, angewendet auf Winkelbeobachtungen (nach Littrow.)

Es sollen $x, x_1, x_2, x_3, \ldots$ die durch Beobachtungen unmittelbar erhaltenen Winkelgrössen, Horizontal- oder Verticalwinkel, und die Anzahl dieser Beobachtungen, für ein und denselben Punkt $= N$ seyn.

Sind diese Beobachtungen unter gleichen Umständen gemacht worden, also alle von gleichem Werthe, und kann man demnach in Betreff ihrer Genauigkeit keinen Unterschied unter ihnen machen, so ist die genaue und also wahrscheinliche Bestimmung des betreffenden Winkels, der X heissen soll, gleich dem arithmetischen Mittel aus allen Beobachtungen, nämlich

$$X = \frac{x + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots}{N}$$

oder wenn man die Summe von $x + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots = \Sigma x$ setzt, so ist

$$X = \frac{\Sigma x}{N}.$$

Angenommen aber, es sey e der Unterschied zwischen diesem wahrscheinlichen Werth X unserer Beobachtung und dem unmittelbaren Resultate x der ersten Beobachtung, d. h. es sey $e = X - x$ und ferner $e_1 = X - x_1$

$$e_2 = X - x_2$$
$$e_3 = X - x_3 \text{ etc.}$$

Die Grössen $e, e_1, e_2, e_3, \ldots$ kann man als die Fehler der einzelnen Beobachtungen ansehen. Bezeichnet man nun wieder der Kürze wegen die Summe der Quadrate der Grössen $e^2, e^2_1, e^2_2, e^2_3, \ldots$ durch Σe^2, so dass

$$\Sigma e^2 = e^2 + e^2_1 + e^2_2 + e^2_3 + \ldots \text{ ist,}$$

so heisst die Grösse $$P = \frac{N^2}{2\,\Sigma e^2}$$

das Gewicht jener Bestimmung von X als des wahrscheinlichsten Werthes von x.

Man sieht, dass dieses Gewicht desto grösser seyn wird, je grösser die Anzahl N der Beobachtungen und je kleiner die Grössen $e, e_1, e_2, e_3 \ldots$ d. h. je genauer die unmittelbar erhaltenen Winkelgrössen sind.

Bezeichnet man ferner den mittlern zu befürchtenden Beobachtungsfehler mit Z, welchen man bei der Bestimmung von X begangen haben könnte, so ist

$$Z = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}} = \frac{0{,}282095}{\sqrt{P}} \text{ wo } \pi = 3{,}1415926 \text{ ist.}$$

Dieser mittlere zu befürchtende Fehler Z ist die Summe der Producte jedes Fehlers der einzelnen Beobachtungen in seine Wahrscheinlichkeit.

Von dem mittlern zu befürchtenden Fehler Z unterscheidet sich der wahrscheinliche Fehler V, den man bei der Bestimmung von X begangen haben kann. Dieser Fehler V ist nämlich derjenige, von dem es gleich wahrscheinlich ist, dass man ihn begangen oder dass man ihn auch nicht begangen habe. Dieser wahrscheinliche Fehler ist:

$$V = \frac{0{,}4769363}{\sqrt{P}}$$

Die beiden Fehler Z und V beziehen sich auf das Resultat X, welches man aus den einzelnen Beobachtungen $x, x_1, x_2, x_3 \ldots$ abgeleitet hat. Nennt man nun eben so v den wahrscheinlichen Fehler jeder einzelnen dieser Beobachtungen, so ist

$$v = 0{,}4769363 \sqrt{\frac{N}{P}}$$

und die wahrscheinliche Grenze $v + \Delta v$ dieses Fehlers v ist

$$v + \Delta v = v \left(1 + \frac{0{,}4769363}{\sqrt{N}}\right)$$

wo in allen diesen Ausdrücken wegen dem Wurzelzeichen die dasselbe enthaltende Grösse immer mit den doppelten Zeichen $\pm$ verstanden wird.

Der letzte Ausdruck sagt daher, dass der wahre, wirklich statthabende Werth von v zwischen die beiden Grenzen fallen wird:

$$v\left(1 + \frac{0{,}4769363}{\sqrt{N}}\right) \text{ und}$$

$$v\left(1 - \frac{0{,}4769363}{\sqrt{N}}\right)$$

oder dass man 1 gegen 1 wetten kann, dass der wahre Werth von v zwischen diese beiden Grössen fallen wird.

Um aber auch die Wahrscheinlichkeit w zu finden, dass eine der bisher bestimmten Grössen, dass z. B. der mittlere zu befürchtende Fehler Z des Resultats X zwischen zwei andere willkührliche Grenzen falle, so findet man die Wahrscheinlichkeit w, dass diese Grösse Z zwischen den Grenzen $\pm \frac{r}{\sqrt{P}}$ liege, wo r irgend eine willkührliche Grösse, und wie zuvor $P = \frac{N^2}{2 \Sigma e^2}$ ist $w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int m^{-r^2} dr$ wo $m = 2{,}7182818$ die Basis der natürlichen Logarithmen ist, und wo das Integral von $r = o$ bis $r = \infty$ genommen wird. Man findet aber für dieses Integral, wenn $r < 1$ ist

$$\int m^{-r^2} dr = r - \frac{r^3}{3} + \frac{1}{1.2} \frac{r^5}{5} - \frac{1}{1.2.3} \frac{r^7}{7} + \frac{1}{1.2.3.4} \frac{r^9}{9} - \ldots$$

oder

$$\int m^{-r^2} dr = \frac{r}{m^{r^2}} \left[1 + \frac{2r^2}{1.3} + \frac{(2r^2)^2}{1.3.5.} + \frac{(2r^2)^3}{1.3.5.7.} + \ldots\right]$$

und wenn $r > 1$ ist

$$\int m^{-r^2} dr = {}^1/_2 \sqrt{\pi} - \frac{1}{2 r m^{r^2}} \left[1 - \frac{1}{2r^2} + \frac{1.3}{(2r^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2r^2)^3} + \frac{1.3.5.7}{(2r^2)^4} - \ldots\right]$$

Entwickelt man diese Ausdrücke für einige Werthe von r, so gibt die vorhergehende Gleichung $w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int m^{-r^2} dr$ folgende kleine Tafel.

r.	w.	$\frac{w}{1-w.}$
0,4769363	0,5	1,0000000
0,5951161	0,6	1,5000000
0,7328691	0,7	2,3333333
0,9061939	0,8	4,0000000
1,0000000	0,8427008	5,3572874
1,1630872	0,9	9,0
1,8213864	0,99	99,0
2,3276754	0,999	999,0
2,7510654	0,9999	9999,0
∞	1,0000000	∞

Diese Tafel zeigt z. B. dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler Z zwischen den Grenzen $\pm \frac{1}{\sqrt{P}}$ liege, gleich $w = 0,8427008$, und dass also auch die Wahrscheinlichkeit des Gegentheiles, dass Z nicht zwischen diesen Grenzen liege, gleich $1-w = 0,1572992$ ist, weil jede Wahrscheinlichkeit, dass irgend ein Fall eintrete, und die, dass er nicht eintrete, zusammen gleich der Wahrheit d. h. gleich 1 ist.

Man kann daher die Grösse w gegen 1—w d. h. man kann die Grösse $\frac{w}{1-w} = 5,3572874$ gegen die Einheit wetten, dass der Fehler Z zwischen den Grenzen $\pm \frac{1}{\sqrt{P}}$ enthalten, oder mit andern Worten, dass der Fehler Z kleiner als $\frac{1}{\sqrt{P}}$ ist.

Ebenso kann man 9999 gegen 1 oder nahe 10000 gegen 1 wetten, dass der Fehler Z kleiner als $\frac{2,7510654}{\sqrt{P}}$ ist, aber man kann nur 4 gegen 1 wetten, dass der Fehler Z kleiner als $\frac{0,9061939}{\sqrt{P}}$ ist.

Beispiel

um den Gebrauch der aufgestellten Ausdrücke deutlich zu machen.

Zehn Beobachtungen des Meridiankreises haben folgende Polhöhen der Wiener Sternwarte gegeben:

$$
\begin{aligned}
x &= 48^0\ 12'\ 35'',2 \\
x_1 &= \text{,,}\ \ \text{,,}\ \ 34,6 \\
x_2 &= \text{,,}\ \ \text{,,}\ \ 35,4 \\
x_3 &= \text{,,}\ \ \text{,,}\ \ 35,0 \\
x_4 &= \text{,,}\ \ \text{,,}\ \ 34,2 \\
x_5 &= \text{,,}\ \ \text{,,}\ \ 34,7 \\
x_6 &= \text{,,}\ \ \text{,,}\ \ 35,4 \\
x_7 &= \text{,,}\ \ \text{,,}\ \ 34,8 \\
x_8 &= \text{,,}\ \ \text{,,}\ \ 35,6 \\
x_9 &= \text{,,}\ \ \text{,,}\ \ 35,2
\end{aligned}
$$

Arithm. Mittel $X = 48^0\ 12'\ 35'',01 = \frac{\Sigma x}{N}$, wo $N = 10$ ist.

Dieser Werth von X ist also der wahrscheinlichste Werth der Polhöhe jenes Beobachtungsortes, wie er aus diesen zehn Beobachtungen folgt.

I. Es sind aber die Differenzen dieses Resultates X von den einzelnen Beobachtungen

$$X - x = e = 35{,}01 - 35{,}2 \text{ oder}$$

$$\begin{array}{llll}
e = -0{,}19 & \text{und } e^2 & = 0{,}0361 \\
e_1 = 0{,}41 & \text{„ } e^2_1 & = 0{,}1861 \\
e_2 = -0{,}39 & \text{„ } e^2_2 & = 0{,}1521 \\
e_3 = 0{,}01 & \text{„ } e^2_3 & = 0{,}0001 \\
e_4 = 0{,}81 & \text{„ } e^2_4 & = 0{,}6561 \\
e_5 = 0{,}31 & \text{„ } e^2_5 & = 0{,}0961 \\
e_6 = -0{,}39 & \text{„ } e^2_6 & = 0{,}1521 \\
e_7 = 0{,}21 & \text{„ } e^2_7 & = 0{,}0441 \\
e_8 = -0{,}59 & \text{„ } e^2_8 & = 0{,}3481 \\
e_9 = -0{,}19 & \text{„ } e^2_9 & = 0{,}0361 \\
\hline
 & \Sigma e^2 & = 1{,}7070
\end{array}$$

Dieses vorausgesetzt ist das Gewicht P der vorhergehenden Bestimmung von X

$$P = \frac{N^2}{2\,\Sigma e^2} = 29{,}291.$$

Der mittlere zu befürchtende Fehler Z dieses Resultates X ist:

$$Z = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}} = \pm\, 0'',0521.$$

Der wahrscheinliche Fehler V dieses Resultates ist:

$$V = \frac{0{,}47694}{\sqrt{P}} = \pm\, 0{,}0881.$$

Endlich ist der wahrscheinliche Fehler v jeder einzelnen Beobachtung

$$v = 0{,}47694 \sqrt{\frac{N}{P}} = \pm\, 0{,}2787$$

und die wahrscheinliche Grenze $v + \Delta v$ dieses letzten Fehlers ist

$$v \pm \Delta v = v\left(1 \pm \frac{0{,}47694}{\sqrt{N}}\right)$$

das heisst:

$$0{,}2787 \pm 0{,}0420 = \begin{matrix} 0{,}3207 \\ 0{,}2367 \end{matrix}.$$

Man kann daher sagen, dass mit dem gebrauchten Instrumente, unter übrigens gleichen Umständen, jede einzelne Beobachtung dieser Art dem wahrscheinlichen Fehler 0″,28 unterworfen ist, und dass dieser Fehler in der Ordnung nicht grösser als 0″,32 und nicht kleiner als 0″,24 seyn wird, und dieser Schluss wird desto genauer seyn, je grösser die ihm zu Grunde gelegte Anzahl von Beobachtungen gewesen ist.

§. 147.

Um nun die Genauigkeit zu bestimmen, mit welcher man mittelst des zwölfzölligen Reichenbach'schen Theodoliths Horizontalwinkel beobachten kann, so wollen wir diese aus dem oben §. 37 angegebenen Winkel auf dem Tübinger Observatorium, Weilerburg-Mözingen, suchen.

Es ist $x = 44^0\ 17'\ 46''$	$X - x = e = +0{,}77$	und $e^2 = 0{,}5929$
$x_1 = -\ -\ 47$	$X - x' = e_1 = -0{,}23$	$e^2_1 = 0{,}0529$
$x_2 = -\ -\ 46{,}3$	etc. $e_2 = +0{,}47$	$e^2_2 = 0{,}2209$
$x_3 = -\ -\ 46{,}2$	$e_3 = +0{,}57$	$e^2_3 = 0{,}3249$
$x_4 = -\ -\ 47{,}1$	$e_4 = -0{,}33$	$e^2_4 = 0{,}1089$
$x_5 = -\ -\ 47{,}3$	$e_5 = -0{,}53$	$e^2_5 = 0{,}2809$
$x_6 = -\ -\ 47{,}1$	$e_6 = -0{,}33$	$e^2_6 = 0{,}1089$
$x_7 = -\ -\ 47{,}0$	$e_7 = -0{,}23$	$e^2_7 = 0{,}0529$
$x_8 = -\ -\ 47{,}1$	$e_8 = -0{,}33$	$e^2_8 = 0{,}1089$
$x_9 = -\ -\ 46{,}6$	$e_9 = +0{,}17$	$e^2_9 = 0{,}0289$
Arithm. Mittel		$\Sigma\, e^2 = 1{,}8810$
		$2\,\Sigma\, e^2 = 3{,}7620$

$$X = 44\ 17\ 46{,}77 = \frac{\Sigma x}{N}$$

$$P = \frac{N^2}{2\,\Sigma e^2}.\quad \begin{aligned} \text{Log. } N^2 &= 2{,}0000000 \\ \text{Log. } 3{,}762 &= 0{,}5754188 \\ \hline \text{Log. } P &= 1{,}4245812 \\ P &= 26{,}582 \end{aligned}$$

$$z = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}} \quad \begin{aligned} \text{Log. } P &= 1{,}4245812 \\ \text{Log. } \pi &= 0{,}4971499 \\ \hline &\ 1{,}9217311 \\ \hline &\ 0{,}9608655 \\ \text{Log. } 2 &= 0{,}3010300 \\ \hline &\ 1{,}2618955 \\ \hline \text{Log. } z &= 8{,}7381045 \end{aligned}$$

Folglich der mittlere zu befürchtende Fehler des Resultates X, $Z = 0{,}05471$ und der wahrscheinliche Fehler dieses Resultates $V = \dfrac{0{,}4769363}{\sqrt{P}} =$

$$\begin{aligned} \text{Log. } &\ 9{,}6784603 \\ \text{Log. } \sqrt{P} &= 0{,}7122906 \\ \hline \text{Log. } V &= 8{,}9661697 \\ \text{und } V &= \pm\, 0{,}0925 \end{aligned}$$

Endlich ist der wahrscheinliche Fehler v jeder einzelnen Beobachtung

$$v = 0{,}4769363 \sqrt{\frac{N}{P}} \quad \begin{aligned} \text{Log. } 10 &= 1{,}0000000 \\ \text{Log. } P &= 1{,}4245812 \\ \hline \text{Log. } \frac{N}{P} &= 9{,}5754188 \\ \text{Log. } \sqrt{\frac{N}{P}} &= 9{,}7877094 \\ \text{Log. } 0{,}47\ldots &= 9{,}6784603 \\ \hline \text{Log. } v &= 9{,}4661697 \text{ und } v = 0{,}29253 \end{aligned}$$

und die wahrscheinliche Grenze $v + \Delta\, v$ dieses letzten Fehlers ist

$$v + \Delta\, v = v\left(1 \pm \frac{0{,}4769363}{\sqrt{N}}\right) \quad \begin{aligned} \text{Log. } 0{,}4769363 &= 9{,}6784603 \\ \text{Log. } \sqrt{N} = \text{Log. } \sqrt{10} &= 0{,}5000000 \\ \hline &\ 9{,}1784603 \\ \text{Log. } v &= 9{,}4661697 \\ \hline \text{Log. } \Delta\, v &= 8{,}6446300 \\ \Delta\, v &= 0{,}044119 \end{aligned}$$

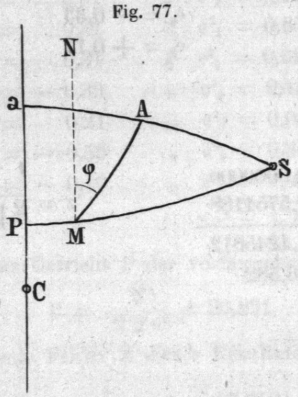
d. h. $0{,}29253 \pm 0{,}044119 = \begin{cases} 0{,}33665 \\ 0{,}2481 \end{cases}$

Es kann also jede einzelne Beobachtung mit diesem Instrumente noch dem wahrscheinlichen Fehler 0″,292 unterworfen seyn, aber er wird nicht grösser als 0″,336 und nicht kleiner als 0″,248 seyn.

§. 148.

Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Bestimmung des Signals Lerchenberg mittelst der sechs Punkte: Solitude, Hohenneuffen, Deckenpfronn, Achalm, Kornbühl und Oberjettingen, nach Bohnenberger.

Fig. 77.



Berechnung der Richtungswinkel aus sphärischen Coordinaten.

$$C a = a;\ a A = b;\ C P = x;\ P M = y;\ N M A = 90^0 - A M S = \varphi$$

$$\text{Tang. } \varphi = \frac{\sin (b - y)}{\cos b \sin (a - x)} + \sin y \,.\, \text{Tang.} \left(\frac{a - x}{2}\right) \text{ genau.}$$

Es sey $\text{Tang. } w = \frac{\sin (b - y)}{\cos b \sin (a - x)}$; so ist $\text{Tang. } \varphi = \text{Tang. } w + \sin y \,.\, \text{Tang.} \left(\frac{a - x}{2}\right)$,

$$\frac{\sin (\varphi - w)}{\cos \varphi \,.\, \cos w} = \sin y \,.\, \text{Tang.} \left(\frac{a - x}{2}\right)$$

$$\sin (\varphi - w) = \sin y \,.\, \text{Tang.} \left(\frac{a - x}{2}\right) \cos w \cos (w + \varphi - w) = \sin y \,.\, \text{Tang.} \left(\frac{a - x}{2}\right)$$

$$\cos w^2 \cos (\varphi - w) - \sin y \,.\, \text{Tang.} \left(\frac{a - x}{2}\right) \cos w \,.\, \sin w \,.\, \sin (\varphi - w)$$

$$\text{Tang. } (\varphi - w) = \sin y \,.\, \cos w^2 \,.\, \text{Tang.} \left(\frac{a - x}{2}\right) - \sin y \,.\, \text{Tang.} \left(\frac{a - x}{2}\right) \cos w \,.\, \sin w \,.\, \text{Tang. } (\varphi - w)$$

$$\text{Tang. } (\varphi - w) = \frac{\sin y \,.\, \text{Tang.} \left(\frac{a - x}{2}\right) \cos w^2}{1 + \sin y \,.\, \text{Tang.} \left(\frac{a - x}{2}\right) \cos w \,.\, \sin w}$$

$$\varphi - w = \sin y \,.\, \text{Tang.} \left(\frac{a - x}{2}\right) \cos w^2 - \sin y^2 \,.\, \text{Tang.} \left(\frac{a - x}{2}\right)^2 \cos w^3 \,.\, \sin w - \tfrac{1}{3} \sin y^3 \,\text{Tang.} \left(\frac{a - x}{2}\right)^3 \cos w^3 \cos 3 w$$

$$\varphi = w + \frac{\sin y \,.\, \text{Tang. } {}^1\!/_2\, (a - x) \,.\, \cos w^2}{\sin 1''} - \frac{\sin y^2 \,.\, \text{Tang. } {}^1\!/_2\, (a - x)^2 \,.\, \cos w^3 \,.\, \sin w}{\sin 1''} - {}^1\!/_3 \sin y^3 \,.\, \text{Tang. } {}^1\!/_2\, (a - x)^3 \,.\, \cos w^3 \,.\, \cos 3 w \text{ etc.}$$

φ nahe $= w + \frac{\sin y}{2\varrho \sin 1''}(a - x)\cos w^2$ — etc., wo der Fehler für $a - x = 1^0$ und $y = 5^0$ höchstens auf 0",04 steigt.

Lerchenberg

durch die drei Punkte Deckenpfronn, Kornbühl, Oberjettingen.

					Ord. in Secunden	Compl. Log. cos b
Solitude	a	= + 103692,58	b	= + 8596,98	1 19",5	0,0000000
Hohenneuffen	a'	= + 14133,11	b'	= + 88102,33	13 34,8	0,0000033.5
Deckenpfronn	a"	= + 41467,06	b"	= — 58260,23	8 58,8	0,0000015
Achalm	a"'	= — 9889,15	b"'	= + 49864,86	7 21,2	0,0000010
Kornbühl	a^{IV}	= — 64126,62	b^{IV}	= + 12218,51	1 53,0	0
Oberjettingen	a^{V}	= + 22045,22	b^{V}	= — 71186,60	10 58,4	0,0000022
Lerchenberg	x	= + 55792,55	y	= — 66478,27	10 14,8128	0,0000019.5

a — x = + 47900,03	b — y = + 75075,25	Log. sin y	= 7,4743171
a' — x = — 41659,44	b' — y = + 154580,60	Comp. Log. sin 1"	= 5,3144251
a" — x = — 4325,49	b" — y = + 8218,04		2,7887422
a"' — x = — 65681,70	b"' — y = + 116343,13	Log. ϱ	= 7,3483619
a^{IV} — x = — 119919,17	b^{IV} — y = + 78696,78	(perp. Curv. Rad) für w. Fuss	
a^{V} — x = — 33747,23	b^{V} — y = + 4708,33		5,4403803
		Log. 2	0,3010300
		Log. $\frac{\sin y}{2\varrho \sin 1''}$	= 5,1393503

	Red. auf Lg. sin		Red. auf Lg. sin
Log. (a — x) = 4,6803357.7	3,3	Log. (b — y) = 4,8754967.5	8,2
Log. (a' — x) = 4,6197134.2	2,5	Log. (b' — y) = 5,1891549.9	34,8
Log. (a" — x) = 3,6360353.0	0	Log. (b" — y) = 3,9147682.2	0
Log. (a"' — x) = 4,8174444.2	1,3	Log. (b"' — y) = 5,0657407.7	19,7
Log. (^{IV} — x) = 5,0788886.0	20,9	Log. (b^{IV} — y) = 4,8959569.9	9,0
Log. (a^{V} — x) = 4,5282383.4	1,7	Log. (b^{V} — y) = 3,6728668.9	0

$$\text{Tang. } \varphi = \frac{(\sin b - y)}{\cos b \cdot \sin (a - x)} + \sin y \cdot \text{Tang. } {}^1/_2 (a - x) \text{ genau.}$$

$$\text{Tang. } w = \frac{\sin (b - y)}{\cos b \cdot \sin (a - x)} \text{ und } \varphi = w + \frac{\sin y}{2\varrho \sin 1''_*}(a - x)\cos w^2 \text{ sehr nahe.}$$

* soll $2\varrho^2 \sin 1''$ heissen, wo ϱ = Radius terrae ist.

Berechnung der vorläufigen Werthe von φ.

1) C. Log. cos b = 0,0000000
Log. sin (b — y) = 4,8754959.3
Log. sin (a — x) = 4,6803354.4 +
Log. Tang. w = 0,1951604.9;

w = 57° 27' 39",589 — 0,191
φ = 57 27 39,398

Log. $\frac{\sin y}{2\varrho \sin 1''}$ = 5,1393503
Lg. sin (a — x) = 4,6803358
Lg. cos w² = 9,4613578
= 9,2810439 = — 0,191

2) C. Log. cos b′ = 0,0000033.5
Log. sin (b′ — y) = 5,1891515.1
5,1891548.6
Log. sin (a′ — x) = 4,6197131.7 neg.
Log. Tang. w′ = 0,5694416.9; w′ = 105° 4′ 58″,283 + 0,039
5,1393503 φ′ = 105 4 58,322
4,6197134
8,8306938
8,5897573 = 0,039

3) C. Log. cos b″ = 0,0000015
Log. sin (b″ — y) = 3,9147682.2
3,9147697.2
Log. sin (a″ — x) = 3,6360353 neg.
Log. Tang. w″ = 0,2787344.2; w″ = 117° 45′ 34″,497 + 0,013
5,1393503 φ″ = 117 45 34,510
3,6360353
9,3363332
8,1127188 = 0,013

4) C. Log. cos b‴ = 0,0000010
Log. sin (b‴ — y) = 5,0657388.0
5,0657398.0
Log. sin (a‴ — x) = 4,8174442.9 neg.
Log. Tang. w‴ = 0,2482955.1; w‴ = 119° 26′ 49″,266 + 0,219
5,1393503 φ‴ = 119 26 49,485
4,8174444
9,3832620
9,3400567 = 0,219

5) C. Lg. cos b^IV = 0,0000000
Log. sin (b^IV — y) = 4,8959560.9
Log. sin (a^IV — x) = 5,0788865.1 neg.
Log. Tang. w^IV = 9,8170695.8; w^IV = 146° 43′ 30″,353 + 1,155
5,1393503 φ^IV = 146 43 31,508
5,0788886
9,8444612
0,0627001 = 1,115

6) C. Log. cos b^V = 0,0000022
Log. sin (b^V — y) = 3,6728668.9
Log. sin (a^V — x) = 4,5282381.7 neg.
Log. Tang. w^V = 9,1446309.2; w^V = 187° 56′ 33″,127 + 0,456
5,1393503 φ^V = 187 56 33,583
4,5282383
9,9916276
9,6592162 = 0,456

φ^{IV}	$= 146^0\ 43'\ 31'',508$	
φ	$=\ \ 57\ \ 27\ \ 39,398$	
	$89\ \ 15\ \ 52,110$	$= \varphi^{IV} - \varphi$
	$89\ \ 15\ \ 56,000$	beobachtet fünffach
	$3,890$	Diff.

φ^{V}	$= 187^0\ 56'\ 33'',583$	
φ^{IV}	$= 146\ \ 43\ \ 31,508$	
	$41\ \ 13\ \ 2,075$	$= \varphi^{IV} - \varphi^{V}$
	$41\ \ 13\ \ 2,000$	beobachtet fünffach.
	$0,075$	Diff.

φ^{IV}	$= 146^0\ 43,\ 31'',508$	
φ''	$= 117\ \ 45\ \ 34,510$	
	$28\ \ 57\ \ 56,998$	$= \varphi^{IV} - \varphi''$
	$28\ \ 57\ \ 57,2$	beobachtet fünffach
	$0,202$	Diff.

φ^{IV}	$= 146^0\ 43'\ 31'',508$	
φ'''	$= 119\ \ 26\ \ 49,485$	
	$27\ \ 16\ \ 42,023$	$= \varphi^{IV} - \varphi'''$
	$27\ \ 16\ \ 46,0$	beobachtet fünffach
	$3,977$	Diff.

φ^{IV}	$= 146^0\ 41'\ 31',,508$	
φ'	$= 105\ \ \ 4\ \ 58,322$	
	$41\ \ 38\ \ 33,186$	$= \varphi^{IV} - \varphi'$
	$41\ \ 38\ \ 44$	einfach beobachtet
	$10,814$	Diff.

Lg. (b — y) $= 4,87550$	Lg. (b — y) $= 4,87550$	Lg. (a — x) $= 4,68034$
Lg. sin φ $= 9,92584$	$5,31442$	$5,31442$
Lg. r $= 4,94966$	$10,18992$	$9,99476$
	Lg. r² $= 9,89932$	$9,89932$
	$0,29060;$	$0,09544;$
	$\alpha = +\ 1'',95$	$\beta = -\ 1'',25$

Lg. (b′ — y) $= 5,18915$	Lg. (b′ — y) $= 5,18915$	Lg. (a′ — x) $= 4,61971$
Lg. sin φ' $= 9,98477$	$5,31442$	$5,31442$
Lg. r′ $= 5,20438$	$10,50357$	$9,93413$
	$10,40876$	$10,40876$
	$1,09481;$	$9,52537;$
	$\alpha' = +\ 1'',24$	$\beta' = +\ 0'',33$

Lg. $(b'' - y) = 3{,}91477$	Lg. $(b'' - y) = 3{,}91477$	Lg. $(a'' - x) = 3{,}63604$
Lg. $\sin \varphi'' = 9{,}94690$	$5{,}31442$	$5{,}31442$
Lg. $r'' = 3{,}96787$	$9{,}22919$	$8{,}95046$
	$7{,}93574$	$7{,}93574$
	$1{,}29345;$	$1{,}01472;$
	$\alpha'' = + 19{,}65$	$\beta'' = + 10'',34$

Lg. $(b''' - y) = 5{,}06574$	Lg. $(b''' - y) = 5{,}06574$	Lg. $(a''' - x) = 4{,}81744$
Lg. $\sin \varphi''' = 9{,}93985$	$5{,}31442$	$5{,}31442$
Lg. $r''' = 5{,}12589$	$10{,}38016$	$10{,}13186$
	$10{,}25178$	$10{,}25178$
	$0{,}12838$	$9{,}88008;$
	$\alpha''' = + 1'',34$	$\beta''' = + 0'',76$

Lg. $(a^{IV} - x) = 5{,}07889$	Lg. $(b^{IV} - y) = 4{,}89596$	Lg. $(a^{IV} - x) = 5{,}07889$
Lg. $\cos \varphi^{IV} = 9{,}92223$	$5{,}31442$	$5{,}31442$
Lg. $r^{IV} = 5{,}15666$	$10{,}21038$	$10{,}39331$
	$10{,}31332$	$10{,}31332$
	$9{,}89706;$	$0{,}07999;$
	$\alpha^{IV} = + 0'',79$	$\beta^{IV} = + 1'',20$

Lg. $(a^{V} - x) = 4{,}52824$	Lg. $(b^{V} - y) = 3{,}67287$	Lg. $(a^{V} - x) = 4{,}52824$
Lg. $\cos \varphi^{V} = 9{,}99581$	$4{,}31442$	$5{,}31442$
Lg. $r^{V} = 4{,}53243$	$8{,}98729$	$9{,}84266$
	$9{,}06496$	$9{,}06486$
	$9{,}92243;$	$0{,}77780;$
	$\alpha^{V} = - 0'',84$	$\beta^{V} = + 6'',00$

$$
\begin{aligned}
\varphi &= 57^{0}\ 27'\ 39'',40 + 1{,}95\,dx - 1{,}25\,dy\\
\varphi' &= 105\ \ 4\ \ 58{,}32 + 1{,}24\,dx + 0{,}33\,dy\\
\varphi'' &= 117\ \ 45\ \ 34{,}51 + 19{,}65\,dx + 10{,}34\,dy\\
\varphi''' &= 119\ \ 26\ \ 49{,}49 + 1{,}34\,dx + 0{,}76\,dy\\
\varphi^{IV} &= 146\ \ 43\ \ 31{,}51 + 0{,}79\,dx + 1{,}20\,dy\\
\varphi^{VI} &= 187\ \ 56\ \ 33{,}58 - 0{,}84\,dx + 6{,}00\,dy.
\end{aligned}
$$

Hieraus die Gleichungen:

$- 3'',89 - 1{,}16\,dx + 2{,}45\,dy = 0$	fünffach
$+ 0{,}07 - 1{,}63\,dx + 4{,}80\,dy = 0$	fünffach
$- 0{,}20 - 18{,}86\,dx - 9{,}14\,dy = 0$	fünffach
$- 3{,}98 - 0{,}55\,dx + 0{,}44\,dy = 0$	fünffach
$[- 10{,}81 - 0{,}45\,dx + 0{,}87\,dy = 0]$	einfach
$- 2{,}16 - 0{,}09\,dx + 0{,}17\,dy = 0$	die letzte Gleichung mit 5 dividirt

$$- 4'',5124 - 1,3456\,dx + 2,8420\,dy = 0$$ Product der ersten Gleichung durch den Coefficienten von dx

$$+ 0,1141 - 2,6569\,dx + 7,8240\,dx = 0$$ Product der zweiten Gleichung durch ihren Coeff. v. dx. etc.

$$\begin{array}{l}
- 3,7720 - 355,6996\,dx - 172,3804\,dy = 0 \\
- 2,1890 - 0,3025\,dx + 0,2420\,dy = 0 \\
- 0,1944 - 0,0081\,dx + 0,0153\,dy = 0 \\
\hline
- 10,5537 - 360,0127\,dx + 161,4571\,dy = 0
\end{array}$$

oder $10,55 + 360,01\,dx + 161,46\,dy = 0$

$$- 9'',5305 - 2,8420\,dx + 6,0025\,dy = 0$$ Product der ersten Gleichung durch ihren Coeff. v. dy

$$+ 0,3360 - 7,8240\,dx + 23,0400\,dy = 0$$ Prod. der zweiten Gleichung d. ihren Coeff. v. dy u. s. w.

$$\begin{array}{l}
- 1,8280 - 172,3804\,dx - 83,5396\,dy = 0 \\
- 1,7512 - 0,2420\,dx + 0,1936\,dy = 0 \\
- 0,3672 - 0,0153\,dx + 0,0289\,dy = 0 \\
\hline
- 13,1409 - 183,3037\,dx - 54,2746\,dy = 0
\end{array}$$

oder $13,14 + 183,30\,dx + 54,27\,dy = 0$

$$\begin{array}{l}
1933,81 + dx + 29595,62\,dy = 0 \\
4730,53 + dx + 19537,74\,dy = 0 \\
\hline
2796,72 \quad - 10057,88\,dy = 0
\end{array}$$

$$dy = \frac{2796,72}{10057,88} = + 0,278$$

$$dx = - \frac{28,227}{183,3} = - 0,154$$

Da $dx = -$	0,154	$dy = +$	0,278
und gerechnet $x = +$	55792,55	gerechnet $y = -$	66478,27
so ist verbessert $x = +$	55792,40	verbessert $y = -$	66477,99

Mittelst dieser Werthe von dx und dy finden sich die verbesserten φ, φ' etc.

$$\begin{array}{l}
\varphi = 57^0\ 27'\ 38'',75 \\
\varphi' = 105\ \ 4\ \ 58,22 \\
\varphi'' = 117\ \ 45\ \ 34,36 \\
\varphi''' = 119\ \ 26\ \ 49,49 \\
\varphi^{IV} = 146\ \ 43\ \ 31,72 \\
\varphi^{V} = 187\ \ 56\ \ 35,38
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\varphi^{IV} - \varphi = 89^0\ 15'\ 52'',97 \\
\text{beobachtet} \quad 89\ \ 15\ \ 56,00 \\
\hline
\text{Fehler} = + 3,03
\end{array}\right\}$$ Solitude — Kornbühl, fünffach.

$$\left.\begin{array}{l}
\varphi^{V} - \varphi^{IV} = 41\ \ 13\ \ 3,66 \\
\text{beobachtet} \quad 41\ \ 13\ \ 2,00 \\
\hline
\text{Fehler} = - 1,66
\end{array}\right\}$$ Kornbühl — Oberjettingen, fünffach

$$\left.\begin{array}{l}
\varphi^{IV} - \varphi'' = 28\ \ 57\ \ 57,36 \\
\text{beobachtet} \quad 28\ \ 57\ \ 57,2 \\
\hline
\text{Fehler} = - 0,16
\end{array}\right\}$$ Deckenpfronn — Kornbühl, fünffach

$\varphi^{IV} - \varphi''' = 27^0\ 16'\ 42'',23$
beobachtet 27 16 46,0
Fehler $+$ 3,77

Achalm — Kornbühl, fünffach

$\varphi^{V} - \varphi' = 41^0\ 38'\ 33'',50$
beobachtet 41 38 44
Fehler $+$ 10,5

Hohenneuffen — Kornbühl, einfach.

Mit den corrigirten Winkeln.

α =	28^0	57′	57″,36	
β =	41	13	3,66	
$\alpha + \beta$ =	70	11	1,02	
	12	41	3,89	
	82	52	39,92	
	359	59	60,80	
	277	7	20,88	
	138	33	40,44	
	— 10	34	9,26	
	127	59	31,18	
	149	7	49,70	
	112	13	0,4	
	55	5	21,4	
Oberjettingen	15	46	30,78	O′
Deckenpfronn	94	2	28,30	D
Lerchenberg	70	11	1,02	L
	180	0	0,1	

Lg. sin DO′	= 4,5069917.1
Lg. sin L	= 9,9734898.8
	4,5335018.3
Lg. sin O′	= 9,4343517.1
Lg. sin D	= 9,9989188.5
Lg. sin D L	= 3,9678535.4
Lg. sin O′ L	= 4,5324206.8
	0.1
	1.7
Lg. D L	= 3,9678535.5
Lg. O′ L	= 4,5324208.5
N D L	= 297^0 45′ 34″,4
	180
	117 45 34,4
	0,112
φ''	= 117 45 34,512

N D O′ $= 203^0\ 43'\ 6'',1$
O′ D L $=$ 94 2 28,3
N D L $=$ 296 45 34,4
Lg. D L $=$ 3,9678535.5
Lg. sin N D L $=$ 9,9468991.2 neg.
Lg. cos N D L $=$ 9,6681642.0
Lg. n $=$ 3,9147526.7
Lg. m $=$ 3,6360177.5

n =	— 8217,7447	m = + 4325,3155
Deckenpfronn =	— 58260,2332	+ 51467,060
	— 66477,9779	+ 55792,3755
	+ 0,0011	+ 0,0192
Lerchenberg, Ord.	— 66477,9768	Absc. + 55792,3947