Rappenau, Salinenthürmchen, Knopf . .	91,18	badische	Ruthen.
„ Boden vor dem Haus . .	83,33	„	„
Fürfeld Sign. Seiffertsberg, Boden . .	86,95	„	„
Katzenbuckel, Rand des Thurms . . .	215,55	„	„
„ Instrumenten-Stein . .	215,51	„	„
„ Boden, oben	215,08	„	„
„ Thürschwelle des Eingangs	209,40	„	„
Vogelherdt, Sign., Boden	119,59	„	„
Heilbronn, Warte, Knopf	110,57	„	„
„ „ oberer Boden . . .	108,85	„	„
„ „ Boden, unten . . .	104,62	„	„
„ ♁ Kopf der Figur des K. Th. .	74,06	„	„
Waldenburg, Schlossthurm, Rand der Gallerie	177,81	„	„
„ Boden unter dem Thurm .	169,17	„	„
Hornisgründ, Rand des Thurms	391,2	„	„
„ Boden am Thurm	388,5	„	„

Die ersten Zenith-Distanzenmessungen wurden für Württemberg auf dem Hornisgründ vom Strasburger Münster ausgeführt und von diesem Punkte ausgehend das Höhennetz den Hauptpunkten der Triangulirung nach über das ganze Land verbreitet, und mit den badischen Höhepunkten verbunden.

§. 127.

Entwicklung der Formel für trigonometrische Höhenbestimmung.

Die absolute Höhe eines Punktes auf der Erdoberfläche ist seine Entfernung vom Mittelpunkte der Erde. Diese Höhenzahlen aber abzukürzen, hat man die Oberfläche des Meeres als Nullpunkt, statt des Mittelpunkts der Erde, für die Erhebungen der Erdoberfläche angenommen.

Der Refractionscoefficient, welcher auf die trigonometrische Höhenbestimmung hauptsächlich einwirkt, hat die Gelehrten viel beschäftigt und sie sind zu dem Resultate gekommen, dass die Strahlenbrechung des Morgens und des Abends am grössten und den Tag über nach Massgabe der Wärme und Trockenheit der Luft sich geringer zeige.

Nach Zach ist der Refractionscoefficient am Aequator $= 0{,}038$; in Italien $= 0{,}052$; in Frankreich $= 0{,}096$; in Oesterreich $= 0{,}063$; in

Lappland = 0,065; in England = 0,072; in der Schweiz = 0,070—0,090; und v. Bohnenberger gibt für die mittlere Höhe von Württemberg denselben = 0,0725 C. an, denn er fand die Refraction, bei einer Temperatur von $11^0,5$ R. und bei einem Barometerstand von

$$\begin{aligned} 28'' &= 0{,}0758 \text{ C.} \\ 27'' &= 0{,}0715 \text{ C.} \\ 26'' &= 0{,}0674 \text{ C.} \\ 25'' &= 0{,}0636 \text{ C.} \\ 24'' &= 0{,}0599 \text{ C.} \end{aligned}$$

wo C. den Mittelpunktswinkel im Centrum der Erde bezeichnet, welcher durch den Bogen oder die Distanz zwischen dem Beobachtungsort und dem Visirpunkt gemessen wird.

Professor v. Bohnenberger hat für die Höhenbestimmungen aus Vertical-Winkelmessungen die Formel

$H = \pm$ d Tang. e $+ p d^2 \pm p' d^2$ Tang. $e^2 \pm \ldots$ bestimmt, und ihre Ableitung ist folgende:

Wenn A der Standpunkt, B der Visirpunkt,
H der Höhenunterschied von A und B,
d die horizontale Distanz zwischen A und B,
R der Halbmesser der Erde,
$\pm$ e der gemessene Höhen- oder Tiefenwinkel,
c der Winkel am Mittelpunkt der Erde, für die Distanz d,
r der Refractionswinkel,
u der Winkel zwischen dem wahren und scheinbaren Horizont,
h der corrigirte Winkel e, d. i. $h = e + u - r$,
z der Complementswinkel der Zenithdistanz;

so ist d : H = sin z : sin h und

$$\text{I)}\ H = \frac{d \sin h}{\sin z}$$

Es ist aber aus Beobachtungen bekannt $u = \frac{c}{2}$ und

$h = e + u - r$ folglich

$h = e + \frac{c}{2} - r$ und $z = 90^0 \mp (e + c - r)$ also

$$\text{II)}\ H = \frac{d \sin (e + \frac{c}{2} - r)}{\sin (90 - (e + c - r)} = \frac{d \sin (e + \frac{c}{2} - r)}{\cos (e + c - r)}$$

weil aber, nach der Erfahrung, r ein aliquoter Theil von c ist, so sey $r = m c$ und daher:

$$\text{III.)}\ H = \frac{d \sin (e + \frac{1}{2} c - m c)}{\cos (e + c - m c)} = \frac{d \sin [e + (\frac{1}{2} - m) c]}{\cos [e + (1 - m) c]}$$

Für R ist der Umfang der Erde $= 2 R \pi$; also

$$2 R \pi : d = 360^0 : c^0 \text{ oder}$$

$$R \pi : d = 180^0 : c^0$$

Setzt man aber statt 180^0, 648000 Sekunden, so bekommt man auch c in Sekunden und es ist: $R \pi : d = 648000'' : c''$

$$\text{folglich } c'' = \frac{648000\, d}{\pi R}$$

Dieser Ausdruck für c'' enthält drei constante Grössen, die in eine verwandelt werden können; nach Bohnenberger ist $\text{Log. } R = 7{,}3482593$ und $\pi = 3{,}14159265\ldots$ daher:

$$\text{Log. } R = 7{,}3482593 \qquad \text{Log. } 648000 = 5{,}8115750$$

$$\text{Log. } \pi = 0{,}4971499 \qquad \text{Log. } (\pi R) = 7{,}8454092$$

$$\text{Log. } (\pi R) = 7{,}8454092 \text{ und Log. } \left(\frac{648000}{\pi R}\right) = 7{,}9661658 - 10.$$

$$\text{IV.)}\ \text{Log. } c'' = \text{Log. } d + 7{,}9661658 - 10.$$

Da aber, wie oben angegeben, der Refractionscoefficient von Bohnenberger zu $m = 0{,}0725\, c$ bestimmt worden ist, so kann dieser Werth in die Formel III. berechnet werden und man hat:

$\frac{1}{2} - m = 0{,}5 - 0{,}0725 = 0{,}4275$; $1 - m = 1 - 0{,}0725 = 0{,}9275$ und

hiernach $\text{V.)}\ H = \dfrac{d \sin (e + 0{,}4275\, c)}{\cos (e + 0{,}9275\, c)}$; es ist aber

$$\text{Log. } 0{,}4275 = 9{,}6309361 - 10$$

$$\text{nach IV. Log. } c'' = \text{Log. } d + 7{,}9661658 - 10$$

$$\text{daher Log. } 0{,}4275\, c = \text{Log. } d + 7{,}5971019 - 10.$$

$$\text{Log. } 0{,}9275 = 9{,}9673139 - 10$$

$$\text{Log. } c'' = \text{Log. } d + 7{,}9661658 - 10$$

$$\text{und Log. } 0{,}9275\, c = \text{Log. } d + 7{,}9334797 - 10.$$

Setzt man nun in V. $0{,}4275\, c = n$ und $0{,}9275\, c = n'$ sowie $\text{Log. } n = \text{Log. } d + 7{,}5971019 - 10$ und $\text{Log. } n' = \text{Log. } d + 7{,}9334797 - 10$ so wird aus V.

$\text{VI.)}\ H = \dfrac{d \sin (e + n)}{\cos (e + n')}$ und hieraus lässt sich H ganz genau finden, indem der Log. von der Anzahl Sekunden gefunden, welche zu dem gemessenen Winkel $\pm$ e addirt, den Winkel des Zählers und Nenners in VI. geben.

Um nun ferner aus Formel VI. die Approximativformel von Bohnenberger zu finden, zersetze man die Ausdrücke im Zähler und Nenner derselben, nach Sätzen der Trigonometrie wo $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ und $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$; so hat man:

$$\text{VII.)}\quad H = \frac{d\,(\sin e \cos n + \cos e \sin n)}{\cos e \cos n' - \sin e \sin n'}.$$

Da aber die Winkel n und n′ jedenfalls sehr klein sind und man also statt des Sinus eines sehr kleinen Winkels am Mittelpunkt der Erde den Bogen desselben auf der Erdoberfläche setzen kann, so wie auch statt des Cosinus den Sinus totus, so bekommt man

$$\text{VIII.)}\quad H = \frac{d\,(\sin e \sin \text{tot} + \cos e \,\text{arc}\, n)}{\cos e \sin \text{tot} - \sin e \,\text{arc}\, n'} = d\left[\frac{\sin e + n \cos e}{\cos e - n' \sin e}\right]$$

Dividirt man nun in diesem letzten Ausdruck den Coefficienten von d wirklich:

$$\cos e - n' \sin e \;\Big|\; \sin e + n \cos e \;\Big|\; \frac{\sin e}{\cos e} + n + \frac{n' \sin e^2}{\cos e^2} + \frac{n n' \sin e}{\cos e} + \frac{n'^2 \sin e^3}{\cos e^3} + \ldots$$

$$\sin e - \frac{n' \sin e^2}{\cos e}$$

$$n \cos e + \frac{n' \sin e^2}{\cos e}$$

$$n \cos e - n n' \sin e$$

$$\frac{n' \sin e^2}{\cos e} + n n' \sin e$$

$$\frac{n' \sin e^2}{\cos e} - \frac{n'^2 \sin e^3}{\cos e}$$

$$n n' \sin e + \frac{n'^2 \sin e^3}{\cos e^2}$$

$$n n' \sin e - \frac{n n'^2 \sin e^2}{\cos e}$$

$$\frac{n'^2 \sin e^3}{\cos e^2} + \frac{n n'^2 \sin e^2}{\cos e}$$

so folgt

$$\text{IX.)}\quad H = d\left[\frac{\sin e}{\cos e} + n + \frac{n' \sin e^2}{\cos e^2} + \frac{n n' \sin e}{\cos e} + \frac{n'^2 \sin e^3}{\cos e^3} + \ldots\right]$$

$$\text{X.)}\quad H = d\,(\text{Tg.}\, e + n + n' \,\text{Tg.}\, e^2 + n n' \,\text{Tg.}\, e + n'^2 \,\text{Tg.}\, e^3 + \ldots)$$

daher

XI.) $H = d\,Tg.\,e + d\,n + n'd\,Tg.\,e^2 + n\,n'd\,Tg.\,e + n'^2\,d\,Tg.\,e^3 + \ldots$

Stellt man ferner die Proportion

R : d = 1 : arc c, weil Sinus, Tangente und Bogen bei kleinen Winkeln als gleichgeltend angesehen werden können, so ist

$$\text{arc}\ c = \frac{d}{R}$$

nun ist aber nach oben $n = c\ 0{,}4275$ also $n = \frac{0{,}4275\ d}{R} = d\left[\frac{0{,}4275}{R}\right]$

Ferner ist Log. 0,4275 = 9,6309361—10

Log. R = 7,3482593

2,2826778; folglich Log. n = Log. d + 2,2826768—10

ebenso ist $n' = c\ 0{,}9275$; also $n' = d\left[\frac{0{,}9275}{R}\right]$

und Log. 0,9275 = 9,9673139—10

Log. R = 7,3482593

2,6190546; folglich Log. n' = Log. d + 2,6190546—10

Substituirt man nun in die Gleichung XI. die Werthe von n und n', so ist: das 1te Glied = d Tg. e

„ 2te „ = Log. d^2 + 2,2826768—10

„ 3te „ = Log. d^2 Tg. e^2 + 2,6190546—10

„ 4te „ = Log. d^3 Tg. e + 4,9017314—20

„ 5te „ = Log. d^3 Tg. e^3 + 5,2381092—10 etc.

Bezeichnet man endlich die constanten Logarithmen in den Gliedern 2.3.4.5. mit p, p', p'', p''', so hat man die für die Berechnung taugliche Reihe und für einen Höhenwinkel:

XII.) $H = d\,Tg.\,e + p\,d^2 + p'\,d^2\,Tg.\,e^2 + p''\,d^3\,Tg.\,e + p'''\,d^3\,Tg.\,e^3 + \ldots$

für einen Tiefenwinkel aber hat sie folgende Gestalt:

$$H = -\,d\,Tg.\,e + p\,d^2 - p'd^2\,Tg.\,e^2 - p''\,d^3\,Tg.\,e - p'''\,d^3\,Tg.\,e^3 + \ldots$$

Ist e = o, d. h. erscheint der anvisirte Gegenstand in der Tangente des Stationsortes, so wird aus Formel XII.

$$H = +\,p\,d^2$$

und folglich wenn schon e = o ist, so liegt doch der anvisirte Gegenstand noch um $p\,d^2$ über dem wahren Horizont des Standpunktes.

Beispiele. 1) Ist d = 20 Stunden = 260000 württ. Fuss und + e = $1^0\,58'\,12''$ so ist nach Formel VI. H = 10243,46 württ. Fuss; und durch 3 Glieder der Formel XII. findet man H = 10242,48 württ. Fuss.

2) Bei einer Distanz von 10 Stunden und einer Höhe von 2500 württ. Fuss geben 3 Glieder der Formel XII die wirkliche Höhe nur um einen Zoll zu klein an. Bei derselben Distanz und 700 württ. Fuss Höhe findet man sie nur um 5 Linien zu klein.

§. 128.

Beispiele einiger Berechnungen aus dem trigonometrischen Nivellement.

1) Standp. Hornisgründ, Zenithdistanz Strasb. Münster 4 Thürmchen = $91^0\ 42'\ 50''$; — e = $1^0\ 42'\ 50''$.

Lg. d = 5,0671478
Lg. Tg. e = 8,4760600—10
3,5432078 1Gl. = — 3493,1
Lg. p = 2,2826768—10
Lg. d^2 = 10,1342956—
2,4169724 2Gl. = + 261,2
Lg. p′ = 2,6190546—10
Lg. d^2 = 10,1342956
Lg. Tg. e^2 = 6,9521200—10
9,7054702—10 3Gl. = 0,50
— 3232,4
Strasburg, Münster 4 Thürmch. = 866,57
Ocularaxe = 4099,0
über dem Thurmrand = 2,8
Hornisgründ, Rand des Thurms = 4096,2
„ Erdfl. am Thurm = 4069,2

2) Standp. Hornisgründ, Zenithdistanz Mauzenstein, Erd. = $90^0\ 58'\ 43''$, — e = $58'\ 43''$.

Lg. d = 4,9775908
Lg. Tg. e = 8,2325297
3,2101205 1) = — 1622,26
Lg. p = 2,2826768—10
Lg. d^2 = 9,9551816
2,2378584 2) = + 172,92
p′ = 2,6190546—10
Lg. d^2 = 9,9551816
Lg. Tg. e^2 = 6,4650594—10
9,0392956 3) = — 0,109
— 1449,45
4099,0
Mauzenstein Erdfl. 2649,6

3) Standp. Rossbühl, Zenithdistanz Strasb. Münster = $91^0\ 14'\ 33'',2$; — e = $1^0\ 14'\ 33'',2$.

Lg. d = 5,1160597
Lg. Tg. e = 8,3362613—10
3,4523210 1) = — 2833,5
Lg. p = 2,2826768—10
Lg. d^2 = 10,2321194
2,5147962 2) = + 327,19
Lg. p′ = 2′6190546—10
Lg. d^2 = 10,2321194
Lg. Tg. e^2 = 6,6725226
9,5236966 3) = — 0,33
— 2506,64
Strasburger Münster 4 Th. 866,57
Axe d. F. 3373,21
Intsr. 4,5
Rossbühl Erdfl. 3368,71

4) Standp. Rossbühl, Zenithdistanz Hornisgründ, Rand = $89^0\ 7'\ 3'',4$; + e = $52'\ 56'',6$.

Lg. d = 4,6463599
Lg. Tg. e = 8,1895717
2,8359316 1) = + 685,38
Lg. p = 2,2826768—10
Lg. d^2 = 9,2927198
1,5753966 2) = + 37,62
Lg. p′ = 2,6190546
Lg. d^2 = 9,2927198
Lg. Tg. e^2 = 6,3791434—10
8,2909178—10 3) = + 0,02
— 723,02
4096,2
Rossbühl, Axe des Fernrohrs = 3373,18
Instr. 4,5
Rossbühl, Erdfläche 3368,68