	ist für $49^0\ 0'\ 0''$ 7,9660331
	„ $6'$ — 24
Log. y = 5,2431957	„ $50''$ — 3,3
Log. N = 7,9660303.4	„ $4,''04$ — 0,28
Log. y'' = 3,2092260.4	Log. N = 7,9660303.4

Log. y''^2 = 6,4184520.8
Log. Tg. N = 0,0625981
Log. $\frac{1}{2}$ sin 1'' = 4,3845449 N = $49^0\ 6'\ 54,''04$

0,8655950.8 = — $7,''338$ — 7,34

folglich Breite v. St. Michael = $49^0\ 6'\ 46,''7$

Log. y'' = 3,2092260.4
Log. Cos. N = 9,8159380.4 $26^0\ 42'\ 51''$

3,3932880.0 = $2473,''363$ = 0 41 13,63

Log. y''^2 = 6,4184520.8 27 24 4,63
Log. Tg. N^2 = 0,1251962 — 0,07
Log. $\frac{1}{3}$ sin 1'' = 8,8940286 Länge $27^0\ 24'\ 4,''56$

8,8309648.8 = — $0,''06775$

§. 123.

Zweite Ableitung der Formeln für geographische Bestimmungen [1] ohne die Tabellen §. 121.

Ausser den oben von Professor v. Bohnenberger aufgeführten Formeln für geographische Ortsbestimmung hat derselbe auch folgende vier Formeln in der monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde VI. S. 24 und 25 und X. S. 249 bekannt gemacht:

$$1)\ \beta' = B \pm M\left(1 - \frac{e^2}{4}\right) \pm \frac{\frac{3}{4}\, e^2 \cos\,[2\,B \pm M]\, \sin M}{\sin 1''}$$

$$2)\ \psi = p - p\,\frac{e^2}{4}\sin^2\beta' - \tfrac{3}{8}\, e^2\,\frac{\sin^2\beta' \sin 2\,p}{\sin 1''}$$

$$3)\ \sin\beta = \sin\beta' \cos\psi$$

$$4)\ \mp\,\varphi = \text{arc}\left(\text{Tg} = \frac{\text{tg}\,\psi}{\cos\beta'}\right) - \frac{e^2}{2}\,\psi\cos\beta'$$

für Breite und Länge.

und Oriani hat in der monatlichen Corr. X. S. 249 für die Convergenz der Meridiane die Formel gegeben:

[1] Nach Decker.

5) $\operatorname{Cos} C = \frac{\cos\beta'}{\cos\beta}\,[1 + \tfrac{1}{2}\, e^2 \sin(\beta + \beta') \sin(\beta - \beta')]$ wornach auch

6) das Azimuth $\alpha = 180 + 90 + C$.

Werden mit den Formeln 3, 4 und 5 die gehörigen Veränderungen vorgenommen, so kommt man zuletzt auf einfache und leicht zu berechnende Formeln, es dürfte daher von Interesse seyn, auch diese in ihrer Ableitung zu geben.

Bezeichnet B′ die bekannte und B die gesuchte geographische Breite, so findet man aus 3

$$1)\ B = B' \pm M\left[1 - \frac{e^2}{4}(1 - 3\cos 2B')\right] \mp \frac{m\, p^2 \sin^2 1''}{2\cos^4 B'} \pm \frac{p^2 \sin 1''}{2}$$

$$\operatorname{Tg.} B'(1 - 2\, e^2 \sin^2 B') \mp \frac{3\, e^2\, m^2 \sin 1''}{4} \sin 2B'$$

und aus 4

$$2)\ L = L' + \frac{p}{\cos B'}\left[1 - \frac{e^2}{2}(1 + \sin^2 B')\right] + \frac{p\, m \sin B'}{\cos^2 B'}[1 - e^2(1 + \sin^2 B')]$$

$$+ \frac{p\, m^2 (1 + \sin^2 B')}{2\cos^3 B'} - \frac{p^3 \sin^2 B'}{3\cos^3 B'},$$

Ist die halbe kleine Erdaxe = 3261208,3 Toisen, und deren Log. für württemberg. Fuss, Log. b = 7,3461912 nebst der Excentricität e und Log. $e^2 = 7{,}8052071 - 10$ gegeben, so bezeichnet auch $\frac{b\,\pi}{180^0} = g$ die Länge eines Grades einer Kugel, von der b Halbmesser ist, und bezeichnet man ferner durch O die in württemberg. Fussen ausgedrückte Ordinate eines Punktes, so wie durch A die Abscisse desselben, so ist alsdann O in Gradlängen $= \frac{O}{g}$; und will man O in Sekunden ausdrücken, so muss auf beiden Seiten mit 3600 multiplicirt werden, folglich O (in Längengraden) $3600 = \frac{O\ 3600}{g}$, oder wenn man O in Sekunden = m ausdrückt, so ist $m = O\left(\frac{3600}{g}\right)$ und ebenso $p = A\left(\frac{3600}{g}\right)$.

Werden diese Werthe von m und p in obige zwei Gleichungen gesetzt, so folgt:

$$L = L' + \frac{1}{\cos B'} \cdot \frac{3600}{g}\left[1 - \frac{e^2}{2}(1 + \sin^2 B')\right] - O^3 \left(\frac{3600}{g}\right)^3 \cdot \frac{\sin^2 B'}{3\cos^3 B'}$$

$$\sin^2 1'' + OA \frac{\sin B'}{\cos^2 B'} \left(\frac{3600}{g}\right)^2 [1 - e^2(1 + \sin^2 B')] \sin 1'' + OA^2 \left(\frac{3600}{g}\right)^3 . \frac{(1 + \sin^2 B')}{2 \cos^3 B'} . \sin^2 1''.$$

$$B = B' + A\left(\frac{3600}{g}\right)\left[1 - \frac{e^2}{4}(1 - 3 \cos 2 B')\right] - AO^2\left(\frac{3600}{g}\right)^3 . \frac{\sin^2 1''}{2 \cos^2 B'}$$
$$- O^2\left(\frac{3600}{g}\right)^2 . \frac{\sin 1''}{2} . \text{Tg. } B' (1 - 2 e^2 . \sin^2 B') - A^2 \left(\frac{3600}{g}\right)^2 . \frac{3 e^2 \sin 1''}{4} \sin 2 B'.$$

Werden endlich die constanten Grössen dieser Gleichungen bestimmt, und gesetzt:

I. bei der Längenbestimmung:

$$a = \frac{1}{\cos B'} . \frac{3600}{g}\left[1 - \frac{e^2}{2}(1 + \sin^2 B')\right]$$

$$b = \left(\frac{3600}{g}\right)^3 . \frac{\sin^2 B'}{3 \cos^3 B'} . \sin^2 1''$$

$$c = \frac{\sin B'}{\cos^2 B'} \left(\frac{3600}{g}\right)^2 . [1 - e^2 (1 + \sin^2 B')] \sin 1''$$

$$d = \left(\frac{3600}{g}\right)^3 . \frac{(1 + \sin^2 B')}{2 \cos^3 B'} . \sin^2 1''.$$

II. bei der Breitenbestimmung:

$$e = \left(\frac{3600}{g}\right) . \left[1 - \frac{e^2}{4}(1 - 3 \cos 2 B')\right]$$

$$f = \left(\frac{3600}{g}\right)^3 . \frac{\sin^2 1''}{2 \cos^2 B'}$$

$$g = \left(\frac{3600}{g}\right)^2 \frac{\sin 1''}{2} . \text{Tag. } B' (1 - 2 e^2 \sin^2 B')$$

$$h = \left(\frac{3600}{g}\right)^2 . \frac{3 e^2 \sin 1''}{4} . \sin 2 B'.$$

so ist

1) für $+ x$ und $+ y$ $\begin{cases} L = L' + aO - bO^3 + cOA + dOA^2 \\ B = B' + eA - fAO^2 - gO^2 - hA^2 \end{cases}$

2) für $+ x$ und $- y$ $\begin{cases} L = L' - aO + bO^3 - cOA - dOA^2 \\ B = B' + eA - fAO^2 - gO^2 - hA^2 \end{cases}$

3) für $- x$ und $- y$ $\begin{cases} L = L' - aO + bO^3 + cOA - dOA^2 \\ B = B' - eA + fAO^2 - gO^2 - hA^2 \end{cases}$

4) für $- x$ und $+ y$ $\begin{cases} L = L' + aO - bO^3 - cOA + dOA^2 \\ B = B' - eA + fAO^2 - gO^2 - hA^2 \end{cases}$

und die Consonanten berechnen sich:

Log. a = 8,1449420—10 Log. e = 7,9672850—10

Log. b = 3,0845010—20 Log. f = 3,3325781—20

Log. c = 0,8500158—10 Log. g = 0,3713348—10

Log. d = 3,7049215—20 Log. h = 8,2990306—20.

Wird auch Formel 5 für die Meridian-Convergenz und das Azimuth α auf ihre einfachste Gestalt gebracht, so ist nach dem vorhergehenden

$$C = O\,\mathrm{Tg.}\,B'\left[1 - \frac{e^2}{2}(1 + \sin^2 B')\right] - \frac{O^3\,\mathrm{Tg.}\,B'\,(1 + \sin^2 B')}{6\cos^2 B'} + \frac{OA^2 \sin B'}{\cos^3 B'}$$

$$+ \frac{O\,A}{\cos^2 B'}\,[1 - e^2 \sin^2 B'\,(3 - \sin^2 B')]$$

oder

$$C = O\left(\frac{3600}{g}\right).\,\mathrm{Tg.}\,B'\left[1 - \frac{e^2}{2}(1 + \sin^2 B')\right] + O\,A\left(\frac{3600}{g}\right)^2.\sin 1''$$

$$\left[\frac{1 - e^2.\sin^2 B'\,(3 - \sin^2 B')}{\cos^2 B'}\right] + O\,A^2\left(\frac{3600}{g}\right)^3.\sin^2 1''\,\frac{\sin B'}{\cos^3 B'} - O^3$$

$$\left(\frac{3600}{g}\right)^3 \sin^2 1''\,\frac{(1 + \sin^2 B')}{6\cos^2 B'}.\,\mathrm{Tg.}\,B'.$$

Und setzt man wieder für die Bestimmung der Constanten:

$$i = \left(\frac{3600}{g}\right)\mathrm{Tg.}\,B'\left[1 - \frac{e^2}{2}(1 + \sin^2 B')\right]$$

$$k = \left(\frac{3600}{g}\right)^3.\,\mathrm{Tg.}\,B'\left(\frac{1 + \sin^2 B'}{6\cos^2 B'}\right).\sin^2 1''$$

$$l = \left(\frac{3600}{g}\right)^2.\sin 1''.\left[\frac{1 - e^2 \sin^2 B'\,(3 - \sin^2 B')}{\cos^2 B'}\right]$$

$$m = \left(\frac{3600}{g}\right)^3 \sin^2 1''.\,\frac{\sin B'}{\cos^3 B'}$$

so hat man den Winkel C in Sekunden

$$C = i O - k O^3 + l O A + m O A^2$$

und es ist: Log. i = 8,0195098—10

Log. k = 3,1023682—20

Log. l = 0,9758969—10

Log. m = 3,6870543—20.

In folgender Tabelle sind die in diesem Paragraphen gefundenen Formeln angewendet.

Tabelle

zur geographischen Länge, Breite und Meridians-Convergenzbestimmung, aus württembergischen Landesvermessungs-Coordinaten, gegründet auf:

Tübingen, Länge = L′ = 26° 42′ 51″ und Breite = B′ = 48° 31′ 12″4.

Formeln:

Quadr. NO $L = L' + aO - bO^3 + cOA + dOA^2 \quad B = B' + eA - fAO^2 - gO^2 - hA^2$

Quadr. NW $L = L' - aO + bO^3 - cOA - dOA^2 \quad B = B' + eA - fAO^2 - gO^2 - hA^2$

Quadr. SW $L = L' - aO + bO^3 + cOA - dOA^2 \quad B = B' - eA + fAO^2 - gO^2 - hA^2$

Quadr. SO $L = L' + aO - bO^3 - cOA + dOA^2 \quad B = B' - eA + fAO^2 - gO^2 - hA^2$

NO. Punkt: Stuttgart, Stiftsthurm.

Ordinate = O = + 32552,36 Abscisse = A = + 99715,04

Log. O = 4,5125825 Log. A = 4,9987607

Log. O^2 = 9,0251650 Log. A^2 = 9,9975214

Log. O^3 = 13,5377475

Länge = L.	Sec.	Breite = B.	Sec.
Log. a = 8,1449420 — 10		Log. e = 7,9672850 — 10	
Log. O = 4,5125825		Log. A = 4,9987607	
Log. I = 2,6575245	= + 454,490	Log. V = 2,9660457	= + 924,795
Log. b = 3,0845010 — 20		Log. f = 3,3325781 — 20	
Log. O^3 = 13,5377475		Log. A = 4,9987607	
		Log. O^2 = 9,0251650	
Log. II = 6,6222485	= — 0,000	Log. VI = 7,3565038	= — 0,002
Log. c = 0,8500158 — 10		Log. g = 0,3713348 — 10	
Log. O = 4,5125825		Log. O^2 = 9,0251650	
Log. A = 4,9987607			
Log. III = 0,3613590	= + 2,298	Log. VII = 9,3964998	= — 0,249
Log. d = 3,7049215 — 20		Log. h = 8,2990306 — 20	
Log. O = 4,5125825		Log. A^2 = 9,9975214	
Log. A^2 = 9,9975214			
Log. IV = 8,2150254	= + 0,016	Lg. VIII = 8,2965520	= — 0,0197
+		+	—
I = 454,490		V = 924,795	
II =		VI =	0,002
III = 2,298		VII =	0,249
IV = 0,016		VIII =	0,0197
S. Sec. = + 456,804		S. Sec. = + 924,795	— = 0,271
= — 0		= — 0,271	
Res. Sec. = 456,804		Res. Sec. = 924,524	
Res. 0° 7′ 36″,804		Res. 0° 15′ 24″,524	
L′ = 26 42 51		B′ = 48 31 12,4	
L = 26 50 27,804		B = 48 46 36,92	

$$C = iO - kO^3 + lOA + mOA^2. \quad \text{Azimuth}: A = 180^0 + 90^0 + C.$$

Convergenz = C.			Convergenz = C.		
		Sec.			Sec.
Log. i	= 8,0195098 — 10		Log. m	= 3,6870543 — 20	
Log. O	= 4,5125825		Log. O	= 4,5125825	
			Log. A^2	= 9,9975214	
Log. IX	= 2,5320923	= + 340,480	Log. XII	= 8,1971582	= + 0,015
Log. k	= 3,1023682 — 20			+	—
Log. O^3	= 13,5377475		IX	= 340,480	
Log. X	= 6,6401157	= — 0,000	X	=	
Log. l	= 0,9759869 — 10		XI	= 3,071	
Log. O	= 4,5125825		XII	= 0,015	
Log. A	= 4,9987607		S. Sec.	= + 343,566	
				= — 0	
Log. XI	= 0,4873301	= + 3,071	Res. Sec.	= 343,566	
			Res. C	= 0° 5′ 43″57	

Tabelle

zur geographischen Länge, Breite und Meridians-Convergenzbestimmung, aus württembergischen Landesvermessungs-Coordinaten, gegründet auf:

Tübingen, Länge = L′ = 26° 42′ 51″ und Breite = B′ = 48° 31′ 12″,4.

Formeln:

Quadr. NO $L = L' + aO - bO^3 + cOA + dOA^2$ $B = B' + eA - fAO^2 - gO^2 - hA^2$

Quadr. NW $L = L' - aO + bO^3 - cOA - dOA^2$ $B = B' + eA - fAO^2 - gO^2 - hA^2$

Quadr. SW $L = L' - aO + bO^3 + cOA - dOA^2$ $B = B' - eA + fAO^2 - gO^2 - hA^2$

Quadr. SO $L = L' + aO - bO^3 - cOA + dOA^2$ $B = B' - eA + fAO^2 - gO^2 - hA^2$

SW. Punkt: Dreifaltigkeits-Capelle.

Ordinate = O = — 74963,14		Abscisse = A = — 170027,71	
Log. O =	4,8748478.3	Log. A =	5,2305197
Log. O^2 =	9,7496956.6	Log. A^2 =	10,4610394
Log. O^3 =	14,6245434.9		

Länge = L.			Breite = B.		
		Sec.			Sec.
Log. a	= 8,1449420 — 10		Log. e	= 7,9672850 — 10	
Log. O	= 4,8748478.3		Log. A	= 5,2305197	
Log. I	= 3,0197898.3	= — 1046,622	Log. V	= 3,1978047	= — 1576,902
Log. b	= 3,0845010 — 20		Log. f	= 3,3325781 — 20	
Log. O^3	= 14,6245434.9		Log. A	= 5,2305197	
			Log. O^2	= 9,7496957	
Log. II	= 7,7090445	= + 0,005	Log. VI	= 8,3127935	= + 0,020

Länge = L.	Sec	Breite = B.	Sec.
Log. c = 0,8500158 — 10		Log. g = 0,3713348 — 10	
Log. O = 4,8748478.3		Log. O^2 = 9,7496957	
Log. A = 5,2305197			
Log. III = 0,9953833	= + 9,024	Log. VII = 0,1210295	= — 1,321
Log. d = 3,7049215 — 20		Log. h = 8,2990306 — 20	
Log. O = 4,8748478		Log. A^2 = 10,4610394	
Log. A^2 = 10,4610394			
Log. IV = 9,0408087	= — 0,110	Lg. VIII = 8,7600700	= — 0,057
+	—	+	—
I =	1046,622	V =	1576,902
II = 0,005		VI = 0,021	
III = 9,024		VII =	1,321
IV =	0,110	VIII =	0,057
S. Sec. = + 9,029	= — 1046,732	S. Sec. = + 0,021	= — 1578,280
= — 1046,732		= — 1578,280	
Res. Sec. = — 1037,703		Res. Sec. = — 1578,26	
Res. — 0° 17′ 17″,7		Res. — 0° 26′ 18″,26	
L′ = 26 42 51		B′ = 48 31 12,4	
L = 26 25 33,3		B = 48 4 54,14	

$C = iO - kO^3 + lOA + mOA^2$. Azimuth: $A = 180^0 + 90^0 + C$.

Convergenz = C.	Sec.	Convergenz = C.	Sec.
Log. i = 8,0195098 — 10		Log. m = 3,6870543 — 20	
Log. O = 4,8748478		Log. O = 4,8748478	
		Log. A^2 = 10,4610394	
Log. IX = 2,8943576	= — 784,075	Log. XII = 9,0229415	= — 0,105
Log. k = 3,1023682 — 20		+	—
Log. O^3 = 14,6245435		IX =	784,075
Log. X = 7,7269117	= + 0,005	X = 0,005	
Log. l = 0,9759869 — 10		XI = 12,060	
Log. O = 4,8748473		XII =	0,105
Log. A = 5,2305197		S. Sec. = + 12,065	= — 784,180
Log. XI = 1,0813539	= + 12,060	= — 784,180	
		Res. Sec. = — 772,115	
		Res. C = 0° 12′ 52″,11	