Wien, dessen Breite $= 48^0\ 12'\ 34''$ und Länge $= 34^0\ 2'\ 15''$ angenommen ist. Abplattung $= \frac{1}{314}$.

Aequat. Radius a	= 3362328 Wiener Klafter,	Log. a = 6,5266402
Erdaxe b	= 3351950,8 „ „	Log. b = 6,5252977
Log. e^2	= 7,7898143	

6) Für die württembergische Vermessung ist die Abplattung der Erde, nach Bohnenberger $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{312,7} = c = \frac{D\ \ d}{3\ d \sin \varphi^2}$, wo der in Peru unter dem Aequator gemessene Grad $= 56753$ Toisen $= d$, und der zwischen 45^0 und 50^0 der Breite zu 57037—57087 Toisen sich für die mittlere Landesbreite berechnete Breitegrad $= 57058,61$ Tois. $= D$ und $\varphi = 48^0\ 31'\ 12'',4$ in Rechnung kommt.

$$\begin{array}{r} \text{Log. } D - d = 2,4851676 \\ \text{Log. } 3\ d \sin \varphi^2 = 4,9802946 \\ \hline 7,5048730 \\ \hline 2,4951270 = 312,7 \quad \text{folgl. } c = \frac{1}{312,7} \end{array}$$

7) Württemberg liegt zwischen $47^0\ 35'$ und $49^0\ 35'$ nördlicher Breite, und zwischen $25^0\ 52'$ und $28^0\ 9'\ 30''$ östlicher Länge. Für die mittlere Breite sind 1000 württemb. Fuss $= 9'',274$, oder 1 Breitensekunde $= 107,83$ württembergische Fuss. Für die geogr. Länge ist in der Breite $47^0\ 35'$ eine Längensekunde $= 72,937$ württ. Fuss.

„	48^0 —	„ „	= 72,354 „ „
„	$48^0\ 31'\ 12''$	„ „	= 71,622 „ „
„	49^0	„ „	= 70,941 „ „
„	$49^0\ 35'$ —	„ „	= 70,106 „ „

§. 117.

Entwickelung der Formeln für geographische Bestimmung von Bohnenberger.[1]

Ex coordinatis sphaericis facillime longitudines atque latitudines geographicae derivari poterunt, si initii coordinatarum situs geographicus datus sit. Cum autem coordinatae sphaericae ex hypothesi duos circiter gradus non excedant, formulas §. 45 ad calculum commodiores reddere licebit. Ac primum quidem eum considerabimus casum, quo punctum, cujus situs geographicus quaeritur, jacet in meridiano puncti dati. Denotante r radium curvaturae meridiani sub latitudine φ, formula (9 §. 40.) in seriem evoluta dabit.

1) $r = A - B \cos 2\varphi + C \cos 4\varphi - D \cos 6\varphi$ etc.

positis $A = a\,(1 - e^2)\,(1 + {}^3\!/_4\, e^2 + {}^{45}\!/_{64}\, e^4 + {}^{175}\!/_{256}\, e^6 + \ldots)$,

$B = a\,(1 - e^2)\,({}^3\!/_4\, e^2 + {}^{15}\!/_{16}\, e^4 + {}^{525}\!/_{512}\, e^6 + \ldots)$,

$C = a\,(1 - e^2)\,({}^{15}\!/_{64}\, e^4 + {}^{105}\!/_{256}\, e^6 + \ldots)$,

$D = a\,(1 - e^2)\,({}^{35}\!/_{512}\, e^6 + \ldots)$,

[1] Auszug aus der §. 38 bezeichneten Dissertation.

Posito autem arcu meridiani $= s$, habemus $ds = r\,d\varphi$ et integrando arcumque ab aequatore computando

2) $s = A\varphi - \frac{1}{2} B \sin 2\varphi + \frac{1}{4} C \sin 4\varphi - \frac{1}{6} D \sin 6\varphi$ etc.

Sit s' arcus latitudini φ' respondens, facile obtinebimus

3) $s - s' = A(\varphi - \varphi') - B \sin(\varphi - \varphi') \cos(\varphi + \varphi') + \frac{1}{2} C \sin 2(\varphi - \varphi') \cos 2(\varphi + \varphi') + \frac{1}{3} D \sin 3(\varphi - \varphi') \cos 3(\varphi + \varphi')$ etc.

Sed ex aequatione 1 sequitur radius curvaturae ϱ meridiani sub latitudine media $\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$,

$\varrho = A - B\cos(\varphi + \varphi') + C\cos 2(\varphi + \varphi') - D\cos 3(\varphi + \varphi')$ etc.

quare habebimus

$$
\begin{aligned}
4)\ s - s' - \varrho(\varphi - \varphi') = {} & B\cos(\varphi + \varphi')\,[\varphi - \varphi' - \sin(\varphi - \varphi')] \\
& - C\cos 2(\varphi + \varphi')\,[\varphi - \varphi' - \tfrac{1}{2}\sin 2(\varphi - \varphi')] \\
& + D\cos 3(\varphi + \varphi')\,[\varphi - \varphi' - \tfrac{1}{3}\sin 3(\varphi - \varphi')] \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

Cumque sit $\varphi - \varphi' - \sin(\varphi - \varphi') = \frac{1}{6}(\varphi - \varphi')^3$ etc., primus terminus seriei quam proxime aequalis erit quantitati

$$\frac{a}{8}(1 - e^2)\, e^2\, (\varphi - \varphi')^3 \cos(\varphi + \varphi'),$$

atque pro $\varphi - \varphi' = \frac{\pi}{180}$ vix ad 0,0138 hexap. sive 0,083 ped., pro arcu dupto autem ad 0,664 ped. assurget. Hinc, quoties differentia latitudinum duos gradus non excedit, tuto ponere licebit.

5) $\varphi - \varphi' = \frac{s - s'}{\varrho \sin 1''}$, ϱ denotante radium curvaturae meridiani sub latitudine media $\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$.

§. 118.

Designantibus jam x, y coordinatas sphaericas puncti cujusdam M, atque w longitudinem (orientalem) hujus puncti inde a meridiano per initium coordinatarum ducto, cujus latitudo ponatur $= \varphi'$, ope aequationis 5 praec. §. obtinebimus latitudinem puncti meridiani, cui ordinata y insistit,

1) $\varphi'' = \varphi' + \xi$, posito $\xi = \frac{x}{\varrho \sin 1''}$, ubi ϱ denotat radium curvaturae meridiani sub latitudine $\varphi' + \frac{1}{2}\xi$.

Deinde, ob $\alpha' = 90^0$, formula §. 45 pro Cotg. w abibit in hanc

Tang. $w = \frac{\text{Tg. } u}{\cos \varphi''}$, ubi $\mu = \frac{y}{r \sin 1''}$, atque r radius curvaturae primi verticalis sub latitudine φ''.

Sed Tang. $\mu = \mu + \frac{1}{3}\mu^3 + \frac{2}{15}\mu^5 + \ldots$

atque $w = \text{Tang. } w - \frac{1}{3}\text{Tang. } w^3 + \frac{1}{5}\text{Tang. } w^5 - \text{etc.}$

$$\text{quare } w = \frac{\mu}{\cos\varphi''} - \frac{1}{3}\frac{\mu}{\cos\varphi''}\mu^2\,\text{Tg. }\varphi''^2 + \frac{\mu^5\,\text{Tg. }\varphi''^2}{5\cos\varphi''}(\tfrac{1}{3} + \text{Tg. }\varphi''^2)\text{ etc.}$$

sive, quia terminus tertius pro $\mu = 1\frac{1}{2}^0$ et sub latitudine 60^0 non excedente, ad $0'',01$ tantummodo assurgit,

$$2)\ w = \frac{\mu}{\cos\varphi''} - \frac{1}{3}\frac{\mu}{\cos\varphi''}\mu^2 \sin 1''^2\,\text{Tang. }\varphi''^2.$$

Denique, ob $\alpha' = 90^0$, formula §. 45 cos u exhibens transformabitur in hanc $\cos u = \cos\mu \sin\varphi'' = \sin\varphi'' - 2\sin\frac{1}{2}\mu^2\sin\varphi''$,

unde $2\sin\frac{1}{2}[\varphi'' - (90^0 - u)] = \dfrac{2\sin\frac{1}{2}\mu^2\sin\varphi''}{\cos\frac{1}{2}(\varphi'' + 90 - u)}$, sive quantitates tertium ordinem excedentes negligendo,

$$\varphi'' - (90^0 - u) = \tfrac{1}{2}\mu^2 \sin 1''\,\text{Tang. }\varphi''$$

Formula autem §. 45 correctionem ψ ab excentricitate pendentem exhibens, abit in $-\frac{1}{2}e^2\mu^2\sin 1''\sin\varphi\cos\varphi$ unde obtinebimus

$$3)\ \varphi = \varphi' + \xi - \tfrac{1}{2}\mu^2\sin 1''\,\text{Tang. }\varphi'' - \tfrac{1}{4}e^2\mu^2\sin 1''\sin 2\varphi.$$

§. 119.

Simili modo generalioris problematis in §. 45 propositi solutionem abbreviare licebit, quoties distantia δ puncti M, cujus situs geographicus quaeritur, a puncto dato M′ gradum unum non excedit.

Designantibus x, y coordinatas sphaericas puncti M ad meridianum puncti dati M′ relatas, atque α' azimuthum lateris δ habebimus

$$\sin y = \sin\delta\sin\alpha'$$
$$\text{Tg. } x = \text{Tg. }\delta\cos\alpha'$$

ubi Log. sin δ immediate datur ex triangulorum resolutione.

Posteriorem formulam etiam transformare licebit in hanc:

$$\sin x = \sin\delta\cos\alpha'\frac{\cos x}{\cos\delta} = \sin\delta\cos\alpha'(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}\delta^2).$$
$$= \sin\delta\cos\alpha'\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{\delta^2}{r^2}\cos\alpha'^2 + \tfrac{1}{2}\frac{\delta^2}{r^2}\right),$$
$$= \sin\delta\cos\alpha'\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{\delta^2}{r^2}\sin\alpha'^2\right),$$
$$= \sin\delta\cos\alpha' + \tfrac{1}{2}\frac{\delta^2}{r^2}\sin\alpha'\cos\alpha'\sin\alpha',$$

$$\text{sive } \sin x = \sin\delta\cos(\alpha' - \varepsilon),\ \text{posito } \varepsilon = \frac{\delta^2\sin\alpha'\cos\alpha'}{2r^2\sin 1''}$$

Ex logarithmis sin y et sin x derivantur Log. y atque Log. x ope tabulae IV. Abschnitt §. 48. Fiat $\xi = \frac{x}{\varrho \sin 1''}$, ($\varrho$ denotante radium curvaturae meridiani sub latitudine $\varphi' + \frac{1}{2}\xi$), et $\mu = \frac{y}{r \sin 1''}$, (r denotante radium curvaturae primi verticalis sub latitudine $\varphi' + \xi$), eritque ut in praec. §. latitudo quaesita

1) $\varphi = \varphi' + \xi - \frac{1}{2}\mu^2 \sin 1'' \operatorname{Tag.} (\varphi' + \xi) - \frac{1}{2} e^2 \mu^2 \sin 1'' \sin 2 (\varphi' + \xi)$,

atque differentia longitudinum punctorum M′, M.

2) $w = \frac{\mu}{\cos(\varphi' + \xi)} - \frac{1}{3} \frac{\mu}{\cos(\varphi' + \xi)} \mu^2 \sin 1''^2 \operatorname{Tg.} (\varphi' + \xi)^2$.

Denique constructionem atque denominationes §. 46 retinendo, habemus

$\operatorname{Tg.} \frac{1}{2}(m - \alpha) = \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')}{\cos \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')} \operatorname{Tg.} \frac{1}{2} w$, sive quam proxime

3) $m - \alpha' = w \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')}{\cos \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')} + \frac{1}{12} w \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')}{\cos \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')} w^2 \sin 1''^2 \cos \varphi^2$,

et ex aequatione 2. ejusdem §., loco $\frac{1}{2}\left(\frac{s'}{r'}\right)^2 \frac{\sin \alpha' \cos \alpha'}{\sin 1''}$ substituendo quantitatem ε supra inventum,

4) $\alpha = 180^0 + m + e^2 \varepsilon \operatorname{Cos} \varphi^2$, unde azimuthum α, lateris δ in loco quaesito M innotescet.

§. 120.

Adjumento formularum praec. §. longitudines atque latitudines geographicae omnium punctorum computari poterunt, quae triangulorum serie inter se conjuncta sunt, si dentur longitudo atque latitudo cujuscunque eorum atque azimuthum lateris ex hoc puncto exeuntis, patetque, meridianum per hoc punctum transeuntem tanquam meridianum primum assumi posse. Et primum quidem obtinebimus situs geographicos punctorum proxime adjacentium, atque azimutha in iisdem, ex quibus ope angulorum sequentis trianguli azimutha laterum, deinde situs geographicos terminorum eorundem derivabimus, et sic calculum per totum triangulorum systema continuare licebit, atque errores hujus calculi ex quantitatibus neglectis oriundi in quovis puncto vix ad centesimam partem unius minuti secundi assurgent, quotenus terra tanquam sphaerois rotatione ellipseos circa axem minorem genita spectetur, quia rarissime tantum latera triangulorum ad gradum unum extendere licet.

Notari etiam meretur, intra hos limites formulas nostras convenire cum iis, que ex consideratione lineae brevissimae in superficie sphaeroidica ductae derivantur.

Formulae enim §. 45 et 46 in series ita evolutae, ut omnes functiones trigonometricae, exceptis iis, quae ad latitudinem atque azimuthum puncti dati pertinent, eliminentur, conveniunt cum illis, quas cel. Oriani ex lineae brevissimae proprietatibus deduxit.

§. 121.

Calculi abbreviandi causa computata est tabula sequens, exhibens logarithmos nummerorum M, N, posito $M = \dfrac{1}{\varrho \sin 1''}$, $N = \dfrac{1}{r \sin 1''}$ ubi ϱ, r denotant radios curvaturae meridiani et primi verticalis sub latitudinibus appositis. Quodsi unus gradus meridiani et primi verticalis ponantur = G et G′, patet etiam, esse $M = \dfrac{3600}{G}$, $N = \dfrac{3600}{G'}$.

Tabelle I.

Latitudo.	Log. M.	Log. N.	Partes proportionales. Min.	Diff. 121.	Diff. 120.	Diff. 119.	Diff. 41.	Diff. 40.
47° 0′	8,8002088	8,7989126						
10	1967	9085						
20	1846	9045	1	12.1	12.0	11.9	4.1	4.0
30	1725	9005	2	24.2	24.0	23.8	8.2	8.0
40	1604	8965	3	36.3	36.0	35.7	12.3	12.0
50	1483	8924	4	48.4	48.0	47.6	16.4	16.0
48 0	1363	8884	5	60.5	60.0	59.5	20.5	20.0
10	1242	8844	6	72.7	72.0	71.4	24.6	24.0
20	1121	8803	7	84.8	84.0	83.3	28.7	28.0
30	1001	8763	8	96.9	96.0	95.2	32.8	32.0
40	0880	8723	9	109.0	108.0	107.1	36.9	36.0
50	0760	8683	10	121.1	120.0	119.0	41.0	40.0
49 0	0640	8643	Sec.					
10	0519	8603	10	2.0	2.0	2.0	0.7	0.7
20	0399	8563	20	4.0	4.0	4.0	1.4	1.3
30	0279	8523	30	6.0	6.0	6.0	2.0	2.0
40	0159	8483	40	8.1	8.0	7.9	2.7	2.7
50	0039	8443	50	10.1	10.0	9.9	3.4	3.3
50 0	8,7999920	8403	60	12.1	12.0	11.9	4.1	4.0

Diese Tabelle ist zu gebrauchen, wenn x, y wie ϱ und r in Toisen genommen werden.

Rechnet man aber mit Coordinaten aus dem Vermessungshorizont, die in Württemberger Fuss ausgedrückt sind, so hat man die Logarithmen von M und N in der vorstehenden Tabelle um Log. $\frac{864}{126,97} + 0{,}0000185{,}4$ d. i. um 0,8328312 zu verkleinern, um folgende neue Tabelle zu erhalten, durch welche dann bei den geographischen Bestimmungen im Meereshorizont operirt wird.

Tabelle II.

Breite.	Log. M.	Log. N.
47° 0′	7,9673776	7,9660814
10	3655	0773
20	3534	0733
30	3413	0693
40	3292	0653
50	3171	0612
48 0	3051	0572
10	2930	0532
20	2809	0491
30	2689	0451
40	2568	0411
50	2448	0371
49 0	2328	0331
10	2207	0291
20	2087	0251
30	1967	0211
40	1847	0171
50	1727	0131
50 0	1608	0091
10	1488	0051
20	1368	0011
30	1248	7,9659970
40	1128	9930
50	1008	9890
51 0	0888	9850

Proportional-Theile.					
1) für Minuten.					
Min.	Diff. M. 121.	Diff. M. 120.	Dift. M. 119.	Diff. N. 41.	Diff. N 40.
1	12.1	12.0	11.9	4.1	4.0
2	24.2	24.0	24.9	8.2	8.0
3	36.3	36.0	35.7	12.3	12.0
4	48.4	48.0	47.6	16.4	16.0
5	60.5	60.0	59.5	20.5	20.0
6	72.7	72.0	71.4	24.6	24.0
7	84.8	84.0	83.3	28.7	28.0
8	96.9	96.0	95.2	32.8	32.0
9	109.0	108.0	107.1	36.9	36.0
10	121.1	120.0	119.0	41.0	40.0
Sec.	2) für Secunden.				
1	0.2	0.2	0.2	0.07	0.07
2	0.4	0.4	0.4	0.14	0.13
3	0.6	0.6	0.6	0.2	0.2
4	0.81	0.8	0.79	0.27	0.27
5	1.01	1.0	0.99	0.34	0.33
6	1.21	1.20	1.19	0.41	0.4
7	1.41	1.40	1.39	0.48	0.47
8	1.61	1.60	1.59	0.55	0.53
9	1.81	1.80	1.79	0.61	0.60
10	2.02	2.0	1.98	0.68	0.66

Commodissime hi logarithmi serierum ope computantur. Habemus nempe ex (§. 40 n 9)

$$\text{Log. } \rho = \text{Log. a } (1 - e^2) - {}^3/_2 \text{ Log. } (1 - e^2 \sin \varphi^2)$$

$$= \text{Log. a} (1 - e^2) + {}^3/_2 \text{k} (e^2 \sin \varphi^2 + {}^1/_2 e^4 \sin \varphi^4 + {}^1/_3 e^6 \sin \varphi^6 \text{ etc.})$$

k denotante modulum logarithmorum vulgarium, hinc

$$\text{Lg. M} = -\text{Lg. a}(1-e^2)\sin 1'' - {}^3/_2 k\,(e^2 \sin\varphi^2 + {}^1/_2 e^4 \sin\varphi^4 + {}^1/_3 e^6 \sin\varphi^6 \text{ etc.})$$

atque simili modo

$$\text{Log. N} = -\text{Log. a}\sin 1'' - {}^1/_2 k(e^2 \sin\varphi^2 + {}^1/_2 e^4 \sin\varphi^4 + {}^1/_3 e^6 \sin\varphi^6 \text{ etc.})$$

Posito Log. a = 6,5147696; et $\frac{b}{a} = \frac{311.7}{312.7}$ obtinentur.

$$-\text{Log. a}(1-e^2)\sin 1'' = 8,8024376.9-10$$

$$-\text{Log. a}\sin 1'' = 8,7996555.3-10$$

$$\text{Log.}\frac{e^2 k}{2} = 7,1419614.5-10$$

$$\text{Log.}\frac{e^4 k}{4} = 4,6461386. -10$$

$$\text{Log.}\frac{e^6 k}{6} = 2,2752545 -10$$

pars autem variabilis Log. M tripla est partis variabilis Log. N.

§. 122.

Beispiele der geographischen Bestimmung.

Für den praktischen Gebrauch hat Professor v. Bohnenberger die oben angegebenen Formeln auf folgende gestellt:

I. die Breite $B = 48^0\,31'\,12,''4 + x'' - {}^1/_2 \sin 1''\, y''^2\, \text{Tag.}\,(48^0\,31'\,12,''4 + x'')$[1]

II. die Länge $L = 26^0\,42'\,51'' + \dfrac{y''}{\cos(48\;\;31'\,12,4 + x''} - \dfrac{{}^1/_3 \sin^2 1''\, y''\, y''^2\, \text{Tag.}\,(48^0\,31'\,12,''4 + x'')^2}{\cos(48\;\;31'\,12,''4 + x'')}$

und denselben die Erklärung beigegeben:

Man suche zuerst x″ Sekunden näherungsweise mittelst der Formel:

Log. x″ = Log. x + 7,9672689 − 10 (bei 48⁰ 30′ in der Tabelle II.)

und hernach mit der Breite 48⁰ 31′ 12,″4 + ½ x′ bestimme man aus der Tabelle den Log. M; so erhält man aus Log. x + Log. M den Log. x″ genau.

Ferner: erhält man aus der Tabelle mit der Breite 48⁰ 31′ 12,″4 + x″ den Log. N und alsdann auch Log. y″ aus Log. y + Log. N − 10.

Sind sonach x″ und y″ Sekunden gefunden, so lässt sich die weitere Berechnung nach obigen zwei Formeln leicht ausführen. Hiebei ist aber

[1] Das dritte Glied in I ist in allen 4 Quadranten negativ und das zweite Glied in II ist in { NW und SW negativ / NO und SO positiv } so wie das dritte in { NW und SW positiv. / NO und SO negativ.