$$\begin{aligned}
&\text{Log. } c &&= 5{,}5900235\\
&\text{Log. } r' &&= 7.3483804\\
\hline
&\text{Log. } \frac{c}{r'} &&= 8{,}2416431-10\\
\hline
&\text{Log. } \left(\frac{r'}{c}\right)^2 &&= 6{,}4832862-10\\
&\text{Log. const.} &&= 8{,}8596331\\
\hline
&\text{Log. } \left(\frac{c}{r'}\right)^2 + c &&= 5{,}3429193-10 = \text{Log. } m\\
&\qquad m &&= 0{,}0000220.25\\
\hline
&\text{Log. } \frac{c}{r'} - m &&= 8{,}2416210.8 = \text{Log. sin } c
\end{aligned}$$

Bemerkung. Hier ist c als unmittelbar gegeben angenommen, wie bei einer Basis.

Berechnung der Werthe von m′ welche sonst aus der Hülfstafel genommen werden.

$$\begin{aligned}
&\text{Log. const.} &&= 8{,}8596331-10\\
&2.\ \text{Log. sin } a &&= 6{,}7064175.8-10\\
&2.\ \text{Log. sin } b &&= 6{,}9537364.8-10\\
\hline
& && \left.\begin{matrix}5{,}5660506.8-10\\ 5{,}8133695.8-10\end{matrix}\right\} \text{also Werthe}\\
\hline
&\text{v. } m && \left\{\begin{matrix}0.0000368.17\\ 0{,}0000650.68\end{matrix}\right.\\
\hline
&\text{Log. } r' &&= 7{,}3483804\\
\hline
&m + \text{Log. } r' &&= 7{,}3484172.17 = m'\\
& &&= 7{,}3484454.68 = m'.
\end{aligned}$$

Auflösung des sphärischen Dreiecks mittelst der verbesserten Winkel.

$$\begin{aligned}
&\text{Log. sin } c &&= 8{,}2416210.8\\
&\text{Log. sin } C' &&= 9{,}7621283.4\\
\hline
& && \ 8{,}4794927.4\\
\hline
&\text{Log. sin } A' &&= 9{,}8737160.5\\
&\text{Log. sin } B' &&= 9{,}9973755\\
\hline
&\text{Log. sin } a &&= 8{,}3532087.9\\
&\text{Log. sin } b &&= 8{,}4768682.4\\
&\qquad m' &&= 7{,}3484172.2\\
&\qquad m' &&= 7{,}3484454.7\\
\hline
&\text{Log. } a &&= 5{,}7016260.1;\ a = 503067{,}2\\
&\text{Log. } b &&= 5{,}8253137.1;\ b = 668826{,}8
\end{aligned}$$

genau so, wie diese Seiten oben nach der Legendre'schen Methode gefunden worden sind, und zwar bei einem sehr grossen Dreieck, dergleichen bei Erdmessungen nicht leicht vorkommen.

§. 63.

Theorie der sphärischen Coordinatenbestimmung. (v. B.)

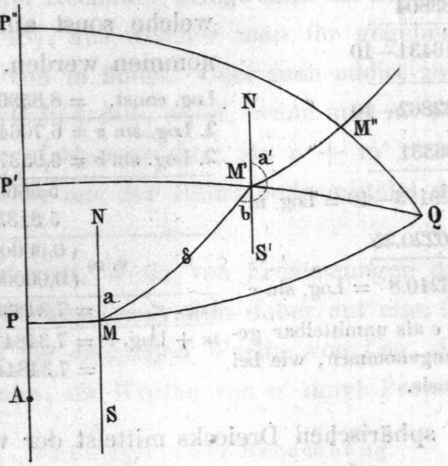
Es sey $AP = x$; $PM = y$; $AP' = x'$; $P'M' = y'$; $MM' = \delta$; $\llcorner\, NMM' = a$; $\llcorner\, N'M'M = a'$;

$$1)\ \left.\begin{matrix}\text{Tang. } MQM'\\ \text{oder}\\ \text{Tang. } PP'\end{matrix}\right\} = \frac{\sin MM' \sin QMM'}{\cos MM' \sin QM - \sin MM' \cos QM \cos QMM'}$$

$$= \frac{\sin \delta \cos a}{\cos \delta \text{ cotg. } y - \sin \delta \sin y \sin a}.$$

$$\text{Tang. } (x' - x) = \frac{\text{Tang. } \delta \cos a}{\text{cotg. } (1 - \text{Tg. } \delta) \text{ Tg. } y \sin a} = \frac{\text{Tg. } \delta \cos a \sqrt{1 + \text{Tg. } y^2}}{1 - \text{Tg. } \delta \text{ Tg. } y \sin a}$$

Fig. 25.



$$\left.\begin{array}{l}2)\ \cos QM' \\ \quad\text{oder} \\ \quad\sin y'\end{array}\right\} = \cos QM \cos MM' + \sin QM \sin MM' \cos M'MQ$$

$$= \sin y \cos \delta + \cos y \sin \delta \sin a.$$

$$\text{Cotg. } QM'M = \frac{\cos QM \sin MM' - \sin QM \cos MM' \cos QMM'}{\sin QM \sin QMM'}$$

$$= \frac{\text{Cotg. } QM \sin MM'}{\sin QMM'} - \cos MM' \text{ Cotg. } QMM'$$

$$\left.\begin{array}{l}3)\ \text{Tang. } S'M'M \\ \quad\text{oder} \\ \quad\text{Tang. } b\end{array}\right\} = \cos MM' \text{ Tang. } a - \frac{\text{Tg. } PM \sin MM'}{\cos a} = \cos \delta \text{ Tg. } a - \frac{\text{Tang. } y \cos \delta}{\cos a}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Tang. } a - \text{Tang. } b \\ \text{oder} \\ \dfrac{\sin (a - b)}{\cos a \cos b}\end{array}\right\} = 2 \sin {}^1\!/_2\, \delta^2 \text{ Tang. } a + \frac{\sin \delta \text{ Tang. } y}{\cos a}$$

$$\text{Sin } (a - b) = (\sin \delta \text{ Tang. } y + 2 \sin {}^1\!/_2\, \delta^2 \sin a) \cos b$$

$$\text{und } \cos b = \cos a - (a - b)$$

$$= \cos a \cos (a - b) + \sin a . \sin (a - b)$$

$$= (\sin \delta \text{ Tang. } y + 2 \sin {}^1\!/_2\, \delta^2 \sin a) (\cos a \cos (a - b)$$

$$+ \sin a \sin (a - b))$$

$$\text{Tang. } (a - b) = (\sin \delta \text{ Tang. } y + 2 \sin {}^1\!/_2\, \delta^2 \sin a) (\cos a + \sin a \text{ Tg. } [a - b].)$$

$$4)\ \text{Tang.}\,(a-b) = \frac{(\sin\delta\ \text{Tang.}\ y + 2\sin{}^1\!/_2\,\delta^2 \sin a)\cos a}{1-(\sin\delta\ \text{Tang}\ y + 2\sin{}^1\!/_2\,\delta^2\sin a)\sin a}$$

$$= \frac{2\sin{}^1\!/_2\,\delta\,(\cos{}^1\!/_2\,\delta\ \text{Tang.}\ y + \sin{}^1\!/_2\,\delta \sin a)\cos a}{1-2\sin{}^1\!/_2\,\delta\,(\cos{}^1\!/_2\,\delta\ \text{Tang.}\ y + \sin{}^1\!/_2\,\delta\sin a)\sin a}$$

$$\sin y' = \sin y\cos\delta + \cos y\sin\delta\sin a$$
$$= (y - {}^1\!/_6\,y^3)(1-{}^1\!/_2\,\delta^2) + (1-{}^1\!/_2\,y^2)(\delta - {}^1\!/_6\,\delta^3)\sin a$$
$$= y - {}^1\!/_2\,\delta^2 y - {}^1\!/_6\,y^3 + \delta\sin a - {}^1\!/_2\,\delta\,y^2\sin a - {}^1\!/_6\,\delta^3\sin a$$
$$y' = \sin y' + {}^1\!/_6\sin y'^3 = y + \delta\sin a - {}^1\!/_6\,y^3 - {}^1\!/_6\,\delta^3\sin a - {}^1\!/_2\,\delta^2 y - {}^1\!/_2\,\delta\,y^2\sin a + {}^1\!/_6\,y^3 + {}^1\!/_6\,\delta^3\sin a^3 + {}^1\!/_2\,\delta^2\sin a^2 + {}^1\!/_2\,y^2\,\delta\sin a$$
$$= y + \delta\sin a - {}^1\!/_6\,\delta^3\sin a\cos a^2 - {}^1\!/_2\,\delta^2\,y\cos a^2$$

$$\text{I)}\ y' = y + \delta\sin a - {}^1\!/_6\,\delta\sin a\,\delta^2\cos a^2 - {}^1\!/_2\,y\,\delta^2\cos a^2$$

$$\text{Tang. PP}' = \frac{\text{Tg.}\,\delta\cos a\sqrt{1+\text{Tg.}\,y^2}}{1-\text{Tg.}\,\delta\ \text{Tg.}\,y\sin a} = \frac{(\delta + {}^1\!/_3\,\delta^3)\cos a\,(1+{}^1\!/_2\,y^2)}{1-y\,\delta\sin a}$$
$$= (\delta\cos a + {}^1\!/_3\,\delta^3\cos a + {}^1\!/_2\,y^2\,\delta\cos a)(1+y\,\delta\sin a)$$
$$= \delta\cos a + {}^1\!/_3\,\delta^3\cos a + {}^1\!/_2\,y^2\,\delta\cos a + y\,\delta^2\sin a\cos a$$
$$\text{PP}' = \text{Tang. PP}' - {}^1\!/_3\ \text{Tang. PP}'^3$$
$$= \delta\cos a + {}^1\!/_3\,\delta^3\cos a + {}^1\!/_2\,y^2\,\delta\cos a + y\,\delta^2\sin a\cos a - {}^1\!/_3\,\delta^3\cos a^3$$
$$= \delta\cos a + {}^1\!/_3\,\delta^3\cos a\sin a^2 + {}^1\!/_2\,y^2\,\delta\cos a + y\,\delta^2\sin a\cos a$$

$$\text{II)}\ x' = x + \delta\cos a + {}^1\!/_3\,\delta\cos a\,\delta^2\sin a^2 + {}^1\!/_2\,\delta\cos a\,y^2 + y\,\delta\sin a\,\delta\cos a$$

$$\text{Tg.}\,(a-b) = \frac{(\sin\delta\ \text{Tg.}\ y + 2\sin{}^1\!/_2\,\delta^2\sin a)\cos a}{1-(\sin\delta\ \text{Tg.}\ y + 2\sin{}^1\!/_2\,\delta^2\sin a)\sin a}$$
$$= \frac{(y\,\delta + {}^1\!/_2\,\delta^2\sin a)\cos a}{1-(y\,\delta + {}^1\!/_2\,\delta^2\sin a)\sin a}$$

$= (y\,\delta + {}^1\!/_2\,\delta^2\sin a)\cos a$ bis zur grössten Ordinate inclusive.

$$a - b = y\,\delta\cos a + {}^1\!/_2\,\delta^2\sin a\cos a$$
$$a = b + y\,\delta\cos a + {}^1\!/_2\,\delta^2\sin a\cos a$$
$$180^0 + a = 180^0 + b + y\,\delta\cos a + {}^1\!/_2\,\delta^2\sin a\cos a$$

$$\text{III)}\ \left.\begin{matrix}180 + b\\ a'\end{matrix}\right\} = 180 + a - y\,\delta\cos a - {}^1\!/_2\,\delta\sin a\,\delta\cos a$$ wo der convexe Winkel $N'M'M = a'$

Setzt man nun $\delta\cos a = m$ und $\delta\sin a = n$

so ist $y = y' - n$, $y^2 = y'^2 - 2\,n\,y' + n^2$ und $m\,y^2 = m\,y' - 2\,m\,n\,y' + m\,n^2$

5) $\dfrac{m\,y^2}{2} = \dfrac{m\,y'}{2} - m\,n\,y' + {}^1\!/_2\,m\,n^2$; $m\,n\,y = m\,n\,y' - m\,n^2$ zu 5 addirt gibt

$$\frac{m\,y^2}{2} + m\,n\,y = \frac{m\,y'^2}{2} - {}^1\!/_2\,m\,n^2$$

$$\frac{m y^2}{2} + m n y + \tfrac{1}{3} m n^2 = \frac{m y'^2}{2} - \tfrac{1}{2} m n^2 + \tfrac{1}{3} m n^2$$

$$= \frac{m y'^2}{2} - \tfrac{1}{6} m n^2$$

$$\text{folglich } x' = x + m + \frac{m y'^2}{2 r'^2} - \tfrac{1}{6} \frac{m n^2}{r'^2}.$$

Endlich:

$$\text{I) } y' = y + \delta \sin a - \frac{1}{6 r'^2} \delta \sin a (\delta \cos a)^2 - \frac{1}{2 r'^2} y (\delta \cos a)^2$$

$$= y + n - \frac{y m^2}{2 r'^2} - \frac{m^2 n}{6 r'^2}.$$

$$\text{II) } x' = x + \delta \cos a + \frac{1}{3 r'^2} \delta \cos a (\delta \sin a)^2 + \frac{1}{2 r'^2} y^2 \delta \cos a$$

$$= x + m + \frac{y'^2 m}{2 r'^2} + \frac{m n^2}{3 r'^2} + \frac{y m n}{r'^2} + \frac{y \delta \sin a \delta \cos a}{r'^2}$$

$$= x + m + \frac{y'^2 m}{2 r'^2} - \frac{m n^2}{6 r'^2}.$$

$$\text{III) } a' = 180 + a - \frac{y \delta \cos a}{r'^2 \sin 1''} - \frac{1}{2 r'^2 \sin 1''} \delta \sin a \delta \cos a$$

$$= 180 + a - \frac{y m}{r'^2 \sin 1''} - \frac{m n}{2 r'^2 \sin 1''}.$$

§. 64.

Berechnung der Constanten für die Coordinatenformeln des vorhergehenden Paragraphen.

Der Halbmesser der Perpendikelscurve des Observatoriums zu Tübingen r′, welcher den Coordinatenformeln zu Grunde liegt, ist in §. 59 berechnet, und sein Logarithme für Toisen ist = 6,5155492. Dieser gibt für württ. Fuss und den Vermessungshorizont nach §. 60 Log. r′ = 7,3483804 und es berechnen sich die Constanten und deren Complemente von $\frac{1}{2 r'^2}$, $\frac{1}{6 r'^2}$, $\frac{1}{r'^2 \sin 1''}$ und $\frac{1}{2 r'^2 \sin 1''}$ folgendermassen:

1) $\frac{1}{2 r'^2}$

Log. r'^2 = 14,6967608
Log. 2 = 0,3010300

Log. $(2 r'^2)$ = 14,9977908
Cpl. Log. $(2 r'^2)$ = 5,0022092—20.

2) $\frac{1}{6 r'^2}$

Log. r'^2 = 14,6967608
Log. 6 = 0,7781512

Log. $(6 r'^2)$ = 15,4749120
Cpl. Log. $(6 r'^2)$ = 4,5250880—20.