In diesem Dreieck hätte also die Summe der 3 Winkel $180^0\ 0'\ 6'',4194$ ausmachen sollen.

Sind in einem Dreieck nur zwei Winkel beobachtet, A und B z. B. so berechne man den sphärischen Excess, und man wird haben:

$$A + B + C = 180^0 + E \text{ mithin } C = 180^0 - A - B + E$$

Die 3 Winkel des sphärischen Dreiecks werden also seyn:

$$A$$
$$B$$
$$180 - A - B + E.$$

Und man wird bei der Berechnung der Seiten dieses Dreiecks nach den Regeln der geradlinigten Trigonometrie folgende Winkel gebrauchen:

$$A' = A - \tfrac{1}{3} E$$
$$B' = B - \tfrac{1}{3} E$$
$$C' = 180^0 - A - B + \tfrac{2}{3} E = 180 - A' - B'.$$

und in diesem Fall ist es nothwendig, den sphärischen Excess zu berechnen, wenn das Dreieck als ein sphärisches betrachtet werden soll. Jedoch wird man diese verminderten Winkel in jedem Fall nur zur Berechnung der Länge der Seiten der Dreiecke, nicht aber bei dem Anreihen der Dreiecke an einander anzuwenden haben, und man sieht leicht, dass diese verminderten Winkel rund um einen Punkt herum nicht 360^0 ausmachen würden, was hingegen bei den Winkeln sphärischer Dreiecke rund um einen Punkt herum stattfinden muss, wenn sie genau beobachtet, oder gehörig verbessert sind.

§. 62.

Auflösung der sphärischen Dreiecke nach Legendre und Soldner.

a) Reduction von Log. sin a in Log. a und umgekehrt. (v. B.)

Da die unmittelbare Auflösung der sphärischen Dreiecke für die bei Erdmessungen vorkommenden Fälle ebenso leicht, als die der geradlinigten ist, so scheint diese Berechnungsart der auf Legendre's Satz sich gründenden (genäherten) Auflösung vorzuziehen zu seyn. Allein da man die Seiten in Graden, Minuten und Sekunden erhält, so muss man mittelst des bekannten Erdhalbmessers hieraus erst die Längen der Seiten in einem bekannten Längenmass ausgedrückt finden, und die den Sinus entsprechenden Winkel bis auf $\tfrac{1}{1000}$ Sekunde genau berechnen, weil eine Sekunde schon 108,074 württ. Fuss ausmacht. Diess erfordert ein mühsames Berechnen der Proportionaltheile, welches überdiess nur alsdann die nöthige Genauigkeit gewährt, wenn die Logarithmen der Sinus der zwei ersten Grade von Sekunde zu Sekunde in den Tafeln vorkommen. Man kann aber dieser Unbequemlichkeit auf folgende Art abhelfen:

Es ist [nach Anal. §. 34. pag. 67.]

$$a = \sin a + \tfrac{1}{2}\,\frac{\sin a^3}{3} + \frac{1\,.\,3\,\sin a^5}{2\,.\,4\,.\,5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,\sin a^7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,7} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,\sin a^9}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,9} + \ldots$$

also $$\frac{a}{\sin a} = 1 + \tfrac{1}{2}\,\frac{\sin a^2}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,.\,\frac{\sin a^4}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,.\,\frac{\sin a^6}{7} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\,.\,\frac{\sin a^8}{9} + \ldots$$

und [nach Anal. §. 28 pag. 56 Nro. 1.] wenn man statt u die auf 1 folgenden Glieder $\tfrac{1}{2}\,\frac{\sin a^2}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,.\,\frac{\sin a^4}{5} + \ldots$ setzt,

$$^{1}\,\mathrm{Log.}\,\frac{a}{\sin a} = \frac{1}{A}\left(\tfrac{1}{2}\,\frac{\sin a^2}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{\sin a^4}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,.\,\frac{\sin a^6}{7} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\,.\,\frac{\sin a^8}{9} + \ldots\right)$$

$$- \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{1}{A}\left(\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{\sin a^2}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,.\,\frac{\sin a^4}{5} + \ldots\right)^2$$

$$+ \tfrac{1}{3}\,.\,\frac{1}{A}\left(\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{\sin a^2}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,.\,\frac{\sin a^4}{5} + \ldots\right)^3$$

$$- \tfrac{1}{4}\,.\,\frac{1}{A}\left(\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{\sin a^2}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,.\,\frac{\sin a^4}{5} + \ldots\right)^4$$

$$+ \ldots$$

Entwickelt man die angezeigten Potenzen und nimmt die ähnlichen Glieder zusammen, so findet man:

$$\mathrm{Log.}\,\frac{a}{\sin a} = \frac{1}{A}\left(\tfrac{1}{6}\sin a^2 + \frac{11}{180}\sin a^4 + \frac{191}{5670}\sin a^6 + \frac{2497}{113400}\sin a^8 + \ldots\right)$$

Da für die gemeinen Logarithmen $\frac{1}{A}$ oder der Modulus $M = 0{,}4342944819$ (Anal. §. 29 pag. 58) ist, so findet man

$$\mathrm{Log.\ vulg.}\,\frac{a}{\sin a} = 0{,}07238241365.\ \sin a^2 = \mathrm{Const.}\ \sin a^2 + C'\sin a^4 + C''\sin a^6 + C'''\sin a^8 + \ldots$$

[1] Man findet auf ähnliche Art

$$\mathrm{Log.}\,\frac{a}{\mathrm{Tang.}\ a} = -\frac{1}{A}\left(\frac{1}{3}\,\mathrm{Tang.}\ a^2 - \frac{13}{90}\,\mathrm{Tang.}\ a^4 + \frac{251}{2835}\,\mathrm{Tang.}\ a^6 - \ldots\right)$$

$$+ 0{,}02654021834.\ \sin a^4$$
$$+ 0{,}01462965539.\ \sin a^6$$
$$+ 0{,}00965290407.\ \sin a^8$$
$$+ \text{etc.}$$

und es sind die Constanten:

$$\text{Log. } C = 8{,}8596330.6-10$$
$$\text{Log. } C' = 8{,}4239044.9-10$$
$$\text{Log. } C'' = 8{,}1652346.2-10$$
$$\text{Log. } C''' = 7{,}9805898.0-10.$$

Setzt man noch den Werth dieser Reihe, d. i. Log. $\left(\frac{a}{\sin a}\right) = m$, so folgt

$$\text{Log. } a = \text{Log. } \sin a + m.$$

Es sey z. B. $a = 2^0$, so ist

$$\text{Log. } \sin a^2 = 2 \text{ Log. } \sin a = 7{,}0856384-10$$
$$\text{Log. } C = 8{,}8596330.6-10$$
$$5{,}9452714.6-10; = 0{,}0000881.6$$
$$\text{Log. } \sin a^4 = 4{,}1712768-10$$
$$\text{Log. } C' = 8{,}4239044.9-10$$
$$2{,}5951812.9-10; = 0{,}0000000.39$$

Demnach $m = 0{,}0000881.6 + 0{,}0000000.39 = 0{,}0000882.$

Dieses Beispiel zeigt, dass so lange a nicht über 2^0 beträgt, das erste Glied der Reihe hinreichend ist, und man setzen kann:

$m = 0{,}0723824 \sin a^2$ mithin Log. $a =$ Log. $\sin a + 0{,}0723824 \sin a^2$.

$$\text{Wenn also Log. } \sin a = 8{,}5428192-10$$
$$\text{so addirt man } m = 0{,}0000882$$
$$\text{und man hat Log. } a = 8{,}5429074-10 \text{ und } a = 0{,}03490659,$$

welches bis auf die achte Decimalstelle genau die Länge eines Bogens von 2^0 für den Halbmesser $= 1$ ist, dessen sinus man oben angenommen hat.

Verlangt man die Länge des Bogens eines Kreises von dem Halbmesser R aus seinem Sinus, wenn letzterer, wie gewöhnlich, durch seinen Logarithmen aus den trigonometrischen Tafeln gegeben ist, so hat man:

$$\text{Log. } a = \text{Log. } \sin a + \text{Log. } R + m.$$

In Beziehung auf obiges Beispiel und auf den Perpendikels-Curven-Radius §. 60 dessen Log. für württ. Fuss, und für den württ. Vermessungs-Horizont $= r' = 7{,}3483804$ und Log. $\sin 2^0$ nach der Tafel $= 8{,}5428192-10$ so hat man

$$\begin{aligned} \text{Log. sin a} &= 8{,}5428192-10 \\ \text{Log. m} &= \phantom{8{,}54}882 \\ \text{Log. r}' &= 7{,}3483804 \\ \hline \text{Log. a} &= 5{,}8912878 \end{aligned}$$

und a = 778552,35 württ. Fuss für 2^0 Länge in der Breite $\varphi = 48^0\ 31'$, folglich den Bogen von $1^0 = 386276$ württ. Fuss.

In Beziehung auf den Krümmungshalbmesser des elliptischen Meridians für die Breite $\varphi' = 48^0\ 31'$ welcher nach §. 60 = r dessen Log. für württ. Fuss = 7,3471574 ist, hat man für 2^0 der Breite

$$\begin{aligned} \text{Log. sin a} &= 8{,}5428192-10 \\ \text{Log. m} &= \phantom{8{,}54}882 \\ \text{Log. r} &= 7{,}3471574 \\ \hline \text{Log. a} &= 5{,}8900648 \end{aligned}$$

und a = 776363 württ. Fuss, was für einen Bogen von 1^0 = 388181 württ. Fuss beträgt.

Umgekehrt, wenn a und R gegeben sind, und Log. sin a gesucht wird, ist Log. sin a = Log. a — Log. R — m.

Da a in Vergleichung mit R als klein angenommen wird, so ist nahe Log. sin a = Log. a — Log. R und man kann mittelst dieses beiläufigen Werthes von Log. sin a hinreichend genau die Zahl m berechnen.

Beispiel.

$$\begin{aligned} \text{Log. a} &= 5{,}8912878 & \text{Log. a}^2 &= 11{,}7821070 \\ \text{Log. r}' &= 7{,}3483804 & \text{Log. r}'^2 &= 14{,}6967608 \\ \hline \end{aligned}$$

genäherter Werth von $\text{Log.}\ \frac{a}{r'} = 8{,}5429074-10$ $\text{Log.}\ \frac{a^2}{r'^2} = 7{,}0853462-10$

$$\text{Log.}\left(\frac{a}{r'}\right)^2 = 7{,}0858148-10$$

$$\begin{aligned} \text{Log. C} &= 8{,}8596330.6-10 \\ \hline \text{Log. m} &= 5{,}9454478.6-10 \end{aligned}$$

und m = 0,0000881.95 oder = 0,0000882.

Diess von $\text{Log.}\ \frac{a}{r'}$ abgezogen gibt Log. sin a = 8,5428192—10 genau wie es seyn soll.

Diese letztere Aufgabe kommt jedoch bei Erdmessungen nur alsdann vor, wenn eine Seite eines Dreiecks unmittelbar gemessen worden ist.

In den übrigen Fällen gibt die Auflösnng der Dreiecke mittelst der sphärischen Trigonometrie unmittelbar die Logarithmen der Sinus der Seiten, zu welchen man noch Log. + m zu addiren hat, um Log. a im Längenmass zu erhalten.

Zu Abkürzung der Rechnung bringt man die Zahlen m in eine kleine Hülfstabelle (wie §. 48), aus welcher man für gegebene Log. sin a die zugehörigen Werthe von m findet. Oder man addirt zu den Werthen von m sogleich Log. r′ (wie in §. 50), so ist, wenn man m + Log. r′ = m′ setzt

$$\text{Log. } a = \text{Log. sin } a + m'$$

wo man m′ unmittelbar aus der Hülfstabelle mittelst der gegebenen Log. sin a findet.

Diese Tafel darf sich, wenn von Erdmessungen die Rede ist, nicht über Log. sin 1^0 erstrecken, und kann daher auf eine Octavseite gebracht werden, indem man für diejenigen Werthe von Log. sin a welche in der Tafel nicht vorkommen, die Werthe von n′ durch Proportionaltheile findet.

b) Beispiele der Berechnung.

Bei der Bayerischen Vermessung wurden die sphärischen Dreiecke nach dieser letztern Methode berechnet.

Beispiel. Die Winkel eines sphärischen Dreiecks seyen:

$A = 48^0\ 23'\ 24''$	so ist 1) nach Legendre $^{42}/_3 = 14''$ und	$A' = 48^0\ 23'\ 10''$
$B = 96\ \ 17\ \ 34$		$B' = 96\ \ 17\ \ 20$
$C = 35\ \ 19\ \ 44$		$C' = 35\ \ 19\ \ 30$
$180\ \ 0\ \ 42$		$180\ \ 0\ \ 0$

und c = 389066,2 Fuss.

Log. c	= 5,5900235
Log. sin C′	= 9,7620884—10
	5,8279351
Log. sin A′	= 9,8736909—10
Log. sin B′	= 9,9973786—10
Log. a	= 5,7016260; a = 503067,2
Log. b	= 5,8253137; b = 668826,8

2) Berechnung nach der Bayerischen Methode von Soldner.

Für den sphärischen Excess hat man:

Die beobachteten Winkel sind also ein wenig zu gross.

	Beobachtete Winkel	Verbesserte Winkel.
Log. a = 5,7016260	$A = 48^0\ 23'\ 24''$	A′ = 48 23 23,45
Log. b = 5,8253137	B = 96 17 34	B′ = 96 17 33,45
Log. sin C = 9,7620884	C = 35 19 44	C′ = 35 19 43,45
Log. const. = 0,3166343	180 0 42	180 0 40,35
Log. E = 1,6056624	sollte seyn 40,34	
E = 40″, 333	Summe der Fehler 1″,66	⅓ hiervon = 0″,55

$$\begin{array}{ll}
\text{Log. c} & = 5{,}5900235 \\
\text{Log. r}' & = 7.3483804 \\
\hline
\text{Log. } \frac{c}{r'} & = 8{,}2416431-10 \\
\hline
\text{Log. } \left(\frac{r'}{c}\right)^2 & = 6{,}4832862-10 \\
\text{Log. const.} & = 8{,}8596331 \\
\hline
\text{Log. } \left(\frac{c}{r'}\right)^2 + c & = 5{,}3429193-10 = \text{Log. m} \\
\text{m} & = 0{,}0000220.25 \\
\hline
\text{Log. } \frac{c}{r'} - m & = 8{,}2416210.8 \ = \text{Log. sin c}
\end{array}$$

Bemerkung. Hier ist c als unmittelbar gegeben angenommen, wie bei einer Basis.

Berechnung der Werthe von m′ welche sonst aus der Hülfstafel genommen werden.

$$\begin{array}{ll}
\text{Log. const.} & = 8{,}8596331-10 \\
\hline
\text{2. Log. sin a} & = 6{,}7064175.8-10 \\
\text{2. Log. sin b} & = 6{,}9537364.8-10 \\
\hline
 & \left.\begin{array}{l} 5{,}5660506.8-10 \\ 5{,}8133695.8-10 \end{array}\right\} \text{also Werthe} \\
\hline
\text{v. m} & \left\{\begin{array}{l} 0.0000368.17 \\ 0{,}0000650.68 \end{array}\right. \\
\hline
\text{Log. r}' & = 7{,}3483804 \\
\hline
\text{m} + \text{Log. r}' & = 7{,}3484172.17 = \text{m}' \\
 & = 7{,}3484454.68 = \text{m}'.
\end{array}$$

Auflösung des sphärischen Dreiecks mittelst der verbesserten Winkel.

$$\begin{array}{ll}
\text{Log. sin c} & = 8{,}2416210.8 \\
\text{Log. sin C}' & = 9{,}7621283.4 \\
\hline
 & 8{,}4794927.4 \\
\hline
\text{Log. sin A}' & = 9{,}8737160.5 \\
\text{Log. sin B}' & = 9{,}9973755 \\
\hline
\text{Log. sin a} & = 8{,}3532087.9 \\
\text{Log. sin b} & = 8{,}4768682.4 \\
\text{m}' & = 7{,}3484172.2 \\
\text{m}' & = 7{,}3484454.7 \\
\hline
\text{Log. a} & = 5{,}7016260.1;\ a = 503067{,}2 \\
\text{Log. b} & = 5{,}8253137.1;\ b = 668826{,}8
\end{array}$$

genau so, wie diese Seiten oben nach der Legendre'schen Methode gefunden worden sind, und zwar bei einem sehr grossen Dreieck, dergleichen bei Erdmessungen nicht leicht vorkommen.

§. 63.

Theorie der sphärischen Coordinatenbestimmung. (v. B.)

Es sey $AP = x$; $PM = y$; $AP' = x'$; $P'M' = y'$; $MM' = \delta$; $\llcorner\, NMM' = a$; $\llcorner\, N'M'M = a'$;

$$1)\ \left.\begin{array}{c}\text{Tang. MQM}' \\ \text{oder} \\ \text{Tang. PP}'\end{array}\right\} = \frac{\sin MM' \sin QMM'}{\cos MM' \sin QM - \sin MM' \cos QM \cos QMM'}$$

$$= \frac{\sin \delta \cos a}{\cos \delta \text{ cotg. } y - \sin \delta \sin y \sin a}.$$

$$\text{Tang. } (x' - x) = \frac{\text{Tang. } \delta \cos a}{\text{cotg. } (1 - \text{Tg. } \delta) \text{ Tg. } y \sin a} = \frac{\text{Tg. } \delta \cos a \sqrt{1 + \text{Tg. } y^2}}{1 - \text{Tg. } \delta \text{ Tg. } y \sin a}$$