und $M\,(y - \tfrac{1}{2} y^2 + \tfrac{1}{3} y^3 - \ldots) = \tfrac{3}{2} M e^2 \sin^2 \varphi' + \tfrac{6}{8} M e^4 \sin^4 \varphi' + \tfrac{61}{32} M e^6 \sin^6 \varphi' + \ldots$ folglich

$\text{Log. } r = \text{Log. } a\,(1 - e^2) + \tfrac{3}{2} M e^2 \sin^2 \varphi' + \tfrac{6}{8} M e^4 \sin^4 \varphi' + \tfrac{61}{32} M e^6 \sin^6 \varphi' + \ldots$

Log. e^2 = 7,8052071—10 = 0,0063857 und $1 - e^2$ = 0,9936143.

Log. $(1 - e^2)$	= 9,9972179—10	Log. 3	= 0,4771212
Log. a	= 6,5147696	Log. M	= 9,6377843—10
1) Log. $[a(1 - e^2)]$	= 6,5119875	Log. e^2	= 7,8052071—10
2) $\tfrac{3}{2} M e^2 \sin^2 \varphi'$	= 0,0023346	Log. $\sin^2 \varphi'$	= 9,7491358—10
3) $\tfrac{6}{8} M e^4 \sin^4 \varphi'$	= 0,0000041	D. E. Log. 2	= 9.6989700—10
Log. r	= 6,5143262 für T.		7,3682 84—10
und §. 49.			0,0023346
Log. r'	= 6,5155492.	Log. 6	= 0,7781512
		Log. M	= 9,6377843—10
		Log. e^4	= 5,6104142—10
		Log. $\sin^4 \varphi'$	= 9,4982716—10
		D.E. Log. 8	= 9,0969100—10
			4,6215313—10
			0,0000041

Diese Radien für Württemberger Fuss und den Vermessungs-Horizont 844 Par. Fuss über dem Meer, sind

Log. r = 7,3471574 und Log. r' = 7,3483804.

Die Halbmesser r' und r sind eigentlich für jeden Dreiecks-Punkt zu berechnen. Ist aber das zu vermessende Land nicht sehr gross, so ist es hinreichend, diese Radien nur für den Mittelpunkt desselben zu berechnen, und sich ihrer bei allen Coordinaten-Berechnungen zu bedienen.

§. 61.

Das sphärische Dreieck bei Erdmessungen. (v. Bohnenberger.)

Es ist $\sin a = a - \dfrac{a^3}{1.2.3} + \dfrac{a^5}{1.2\ldots5} - \dfrac{a^7}{1.2\ldots7} + \dfrac{a^9}{1.2\ldots.9} - \ldots$

Wenn aber der Bogen a nicht über 2 Grade beträgt, so ist sehr nahe $\sin a = a - \tfrac{1}{6} a^3$ für den Halbmesser = 1. Denn das nächste vernachlässigte Glied ist $\dfrac{1}{1.2.3.4.5}\, a^5$ welches in einem Kreis von dem Halbmesser r' ausmacht $\dfrac{r'\,a^5}{120}$.

Da nun die Länge eines Kreisbogens von zwei Graden für den Halbmesser 1. gleich ist 0,03490659 so hat man in Beziehung auf den Erd-Krümmungs-Halbmesser r′, dessen Logarithmus, für den württembergischen Vermessungs-Horizont = 7,3483804 und Log. 0,03490659 = 8,5429074 so wie Log. a^5 = 2,7145370—10 ist,

$$\begin{aligned} \text{Log. } r' &= 7{,}3483804 \\ \text{Log. } a^5 &= 2{,}7145370-10 \\ \text{D. E. Log. } 120 &= 7{,}9208188-10 \end{aligned}$$

so ist auch: Log. $\frac{r' a^5}{120}$ = 7,9837362—10 und $\frac{r' a^5}{120}$ = 0′,0096324 w. Fuss und da in diesem Fall die Reihe für den sin a geschwinder convergirt als eine geometrische Reihe, deren Exponent $\frac{1}{2}$ ist, so beträgt der Fehler welcher aus der Vernachlässigung aller auf $\frac{1}{6}$ a^3 folgenden Glieder entsteht, weniger als das Doppelte von $\frac{r' a^5}{120}$, d. i. weniger als 0,0192648 württ. Fuss. Also ist obige Annäherung für die grössten sphärischen Dreiecke, welche bei Erdmessungen vorkommen können, mehr als hinreichend, indem nicht leicht eine Seite von *einem* Grad vorkommen wird, die also eine Länge von 15 geographischen Meilen haben müsste, wo der Fehler schon 32 mal kleiner ist, als bei 2 Graden.

Man bezeichne die Winkel eines sphärischen Dreiecks mit ABC und die Gegenseiten dieser Winkel mit abc so erhält man bekanntlich

$$\begin{aligned} \sin A : \sin B &= \sin a : \sin b \\ &= a - \tfrac{1}{6} a^3 : b - \tfrac{1}{6} b^3, \text{ sehr nahe, wenn a und b nicht} > 2^0 \\ &= a\,(1 - \tfrac{1}{6} a^2) : b\,(1 - \tfrac{1}{6} b^2) \end{aligned}$$

$$\text{oder } (1 - \tfrac{1}{6} b^2) \sin A : (1 - \tfrac{1}{6} a^2) \sin B = a : b$$

Da nun die sinus von A und B mit ächten Brüchen multiplicirt, (nämlich mit $1 - \frac{1}{6} b^2$ und $1 - \frac{1}{6} a^2$) mithin vermindert werden müssen, damit das Verhältniss der so verminderten sinus, dem Verhältniss der Seiten a und b selbst, wie bei ebenen Dreiecken, gleich wird, so kann man setzen: 1) a : b = sin (A — x) : sin (B — x) folglich

$$(1 - \tfrac{1}{6} b^2) \sin A : (1 - \tfrac{1}{6} a^2) \sin B = \sin (A - x) : \sin (B - x)$$

$$(1 - \tfrac{1}{6} b^2) \sin A : (1 - \tfrac{1}{6} a^2)$$

$$\sin B = \sin A \cos x - \cos A \sin x : \sin B \cos x - \cos B \sin x$$

$$= \sin A - \cos A \text{ tang. } x : \sin B - \cos B \text{ tang. } x \quad \text{woraus folgt:}$$

$(1 - \frac{1}{6} b^2) \sin A \sin B - (1 - \frac{1}{6} b^2) \sin A \cos B \text{ Tang. } x = (1 - \frac{1}{6} a^2) \sin A \sin B - (1 - \frac{1}{6} a^2) \cos A \sin B \text{ tang. } x$

also: $(1 - \frac{1}{6} b^2) \sin A \sin B - (1 - \frac{1}{6} a^2) \sin A \sin B = [(1 - \frac{1}{6} b^2)$ $\sin A \cos B - (1 - \frac{1}{6} a^2) \cos A \sin B] \text{ tang. } x$

$\frac{1}{6} (a^2 - b^2) \sin A \sin B$

$$= [\sin A \sin B - \tfrac{1}{6} b^2 \sin A \cos B - \cos A \sin B + \tfrac{1}{6} a^2 \cos A \sin B] \text{ tang. } x$$

$$= [\sin (A - B) - \tfrac{1}{6} b^2 \sin A \cos B + \tfrac{1}{6} a^2 \cos A \sin B] \text{ tang. } x$$

$$= [\sin (A - B) + \tfrac{1}{6} a^2 \sin A \cos B - \tfrac{1}{6} b^2 \sin A \cos B + \tfrac{1}{6} a^2 \cos A \sin B - \tfrac{1}{6} a^2 \sin A \cos B] \text{ tang. } x$$

$$= [\sin (A - B) + \tfrac{1}{6} (a^2 - b^2) \sin A \cos B - \tfrac{1}{6} a^2 \sin (A - B)] \text{ tang. } x$$

$$\tfrac{1}{6} (a^2 - b^2) \frac{\sin A \sin B}{\sin (A - B)}$$

$$= [1 + \tfrac{1}{6} (a^2 - b^2) \frac{\sin A \sin B}{\sin (A - B)} \text{ Cotg. } B - \tfrac{1}{6} a^2] \text{ tang. } x.$$

Mithin

$$2) \text{ tang. } x = \frac{\tfrac{1}{6} (a^2 - b^2) \dfrac{\sin A \sin B}{\sin (A - B)}}{1 - \tfrac{1}{6} a^2 + \tfrac{1}{6} (a^2 - b^2) \dfrac{\sin A \sin B}{\sin (A - B)} \text{ cotg. } B}$$

Für das geradlinige Dreieck ist:

$$a : b = \sin A : \sin B \text{ folglich}$$

$$a + b : a = \sin A + \sin B : \sin A$$

$$= 2 \sin \tfrac{1}{2} (A + B) \cos \tfrac{1}{2} (A - B) : \sin A \text{ und}$$

$$a - b : b = \sin A - \sin B : \sin B$$

$$= 2 \cos \tfrac{1}{2} (A + B) \sin \tfrac{1}{2} (A - B) : \sin B.$$

Daher $a^2 - b^2 : ab = 2 \sin \frac{1}{2} (A + B) \cos \frac{1}{2} (A + B) \, 2 \sin \frac{1}{2} (A - B)$ $\cos \frac{1}{2} (A - B) : \sin A \sin B$

$$= \sin (A + B) \sin (A - B) : \sin A \sin B$$

also ist $\dfrac{(a^2 - b^2) \sin A \sin B}{\sin (A - B)} = ab \sin (A + B) = ab \sin C =$ dem doppelten Inhalt des Dreiecks. Setzt man nun dieses Dreiecks Inhalt $= \triangle$; so ist vermöge Nro. 2

$$\text{Tang. } x = \frac{\tfrac{1}{3} \triangle}{1 - \tfrac{1}{6} a^2 + \tfrac{1}{3} \triangle \text{ Cotg. } B}$$

Bei diesen Untersuchungen ist der Halbmesser $= 1$ angenommen. Nimmt man an, die Bogen a und b gehören einem Kreis von dem Halbmesser $= r'$ zu, so muss man statt a und b setzen $\frac{a}{r'}$ und $\frac{b}{r'}$ und alsdann wird, weil $2 \triangle = ab \sin C$ ist

$$3)\ \text{tang. } x = \frac{\frac{1}{6}\frac{a\,b}{r'^2}\sin C}{1 - \frac{1}{6}\frac{a^2}{r'^2} + \frac{1}{6}\frac{a\,b}{r'^2}\sin C \text{ cotg. } B} = \frac{\frac{1}{6}\frac{a\,b}{r'^2}\sin C}{1 - \frac{1}{6}\frac{a^2}{r'^2} + \frac{1}{6}\frac{a\,c}{r'^2}\cos B}$$

weil $b \sin C = c \sin B$.

Da hier a und b in Vergleichung mit dem Halbmesser r' sehr klein sind, so ist der Nenner von Nro. 3 nahe $= 1$ und wegen der Kleinheit des Zählers kann man statt tang. x den Bogen x setzen, so dass man hat:

$$x = \frac{1}{6}\frac{a\,b}{r'^2}\sin C \text{ in Theilen des Halbmessers } r'.$$

$$\text{oder } 4)\ x = \frac{a\,b \sin C}{6\,r'^2 \sin 1''} \text{ in Sekunden ausgedrückt.}$$

Der Inhalt des sphärischen Dreiecks heisse $\triangle'$ so ist bekanntlich, wenn der Halbmesser der Kugel, auf welcher dieses Dreieck liegt R heisst, und die Winkel A, B, C durch Längen von Kreisbögen für den Halbmesser 1 gemessen werden, $\triangle' = (A + B + C - \pi)\,R^2$,

also $A + B + C - \pi = \dfrac{\triangle'}{R^2}$ in Theilen des Halbmessers R und

$$A + B + C - 180^0 = \frac{\triangle'}{R^2 \sin 1''} \text{ in Sekunden ausgedrückt.}$$

Da aber der Inhalt eines sphärischen Dreiecks von dem Inhalte eines geradlinigten, von eben so langen Seiten, in dem hier betrachteten Fall nicht merklich verschieden ist, so ist sehr nahe:

$$5)\ A + B + C - 180^0 = \frac{\triangle}{r'^2 \sin 1''} = \frac{1}{2}\frac{a\,b \sin C}{r'^2 \sin 1''} = 3\,x \text{ (Nro. 4)}$$

$$\text{mithin } x = \frac{A + B + C - 180^0}{3}$$

Aus diesem Ausdruck, verbunden mit der Proportion Nro. 1 aus welcher er abgeleitet wurde, folgt also, dass wenn man von den 3 Winkeln eines sphärischen Dreiecks, dessen Seiten nicht über 2 Grade betragen, den dritten Theil ihres Ueberschusses über 180^0 abzieht, die Sinus dieser so verminderten Winkel, sehr nahe den Seiten proportional sind.

Wenn bei Erdmessungen die 3. Winkel eines Dreiecks beobachtet worden sind, so hat man eigentlich die 3. Winkel eines sphärischen Dreiecks beobachtet, und daher muss ihre Summe, wenn man genau beobachtet hat, mehr als 180^0 ausmachen. Diesen Ueberschuss betrachtet man gewöhnlich als einen Fehler der Messung, und zieht den dritten Theil desselben von jedem der drei beobachteten Winkel ab, damit die Summe der 3 Winkel, wie in einem geradlinigten Dreieck genau 180^0 macht. Mit diesen so verbesserten Winkeln löst man dann das Dreieck als ein geradlinigtes auf. Der vorher erwiesene Satz zeigt, dass man auf diesem Wege die Seiten des sphärischen Dreiecks ebenso genau erhält, als wenn man es nach den Regeln der sphärischen Trigonometrie aufgelöst hätte, weil die auf 7 Decimalstellen beschränkten gewöhnlichen trigonometrischen Tafeln nicht erlauben die Genauigkeit weiter zu treiben, als diese Methode die kleinen sphärischen Dreiecke zu berechnen verstattet, wenn es anders der Mühe werth wäre, bei solchen Messungen den Calcul mit noch grösserer Schärfe zu führen.

Indessen ist es zur Beurtheilung des Grades der Genauigkeit der Winkelmessungen gut, den Ueberschuss der drei Winkel über 180^0, welchen man den sphärischen Excess nennt, zu berechnen, zu welchem Ende zwei Seiten a und b des Dreiecks nach der gewöhnlichen Methode vorläufig berechnet werden, bei welcher Rechnung übrigens, da a und b nur beiläufig bekannt seyn dürfen, nur die Minuten beizubehalten sind. Dieser sphärische Excess werde mit E bezeichnet, so ist nach Nro. 5

$E = \frac{ab \sin C}{2 r'^2 \sin 1''}$, wo r' durch dasselbe Längenmass ausgedrückt werden muss, in welchem a und b berechnet sind.

In Beziehung auf württembergische Fuss ist: (r' der Perpendikels-Curven-Radius) $\text{Log. } r' = 7{,}3483804$

$$\text{Log. } r'^2 = 14{,}6967608$$
$$\text{Log. } \sin 1'' = 4{,}6855749-10$$
$$\text{Log. } 2 = 0{,}3010300$$
$$\text{Log. } 2\, r'^2 \sin 1'' = 9{,}6833657$$

$$\text{Also die Constante Log. } \frac{1}{2\, r'^2 \sin 1''} = 0{,}3166343-10$$

Folglich ist $\text{Log. } E = 0{,}3166343-10 + \text{Log. } a + \text{Log. } b + \text{Log. } \sin C - 10$

Beispiel. Es sey $a = 200000$ so ist $\text{Log. } a = 5{,}3010300$

$b = 160000 \quad \text{Log. } b = 5{,}2041200$

$C = 75^0 23 \quad \text{Log. } \sin C = 9{,}9857117-10$

$\text{Log. const.} = 0{,}3166343-10$

$\text{Log. } E = 0{,}8074960$

$E = 6{,}''4194.$

In diesem Dreieck hätte also die Summe der 3 Winkel

$$180^0\,0'\,6'',4194$$ ausmachen sollen.

Sind in einem Dreieck nur zwei Winkel beobachtet, A und B z. B. so berechne man den sphärischen Excess, und man wird haben:

$$A + B + C = 180^0 + E \text{ mithin } C = 180^0 - A - B + E$$

Die 3 Winkel des sphärischen Dreiecks werden also seyn:

$$A$$
$$B$$
$$180 - A - B + E.$$

Und man wird bei der Berechnung der Seiten dieses Dreiecks nach den Regeln der geradlinigten Trigonometrie folgende Winkel gebrauchen:

$$A' = A - \tfrac{1}{3}\,E$$
$$B' = B - \tfrac{1}{3}\,E$$
$$C' = 180^0 - A - B + \tfrac{2}{3}\,E = 180 - A' - B'.$$

und in diesem Fall ist es nothwendig, den sphärischen Excess zu berechnen, wenn das Dreieck als ein sphärisches betrachtet werden soll. Jedoch wird man diese verminderten Winkel in jedem Fall nur zur Berechnung der Länge der Seiten der Dreiecke, nicht aber bei dem Anreihen der Dreiecke an einander anzuwenden haben, und man sieht leicht, dass diese verminderten Winkel rund um einen Punkt herum nicht 360^0 ausmachen würden, was hingegen bei den Winkeln sphärischer Dreiecke rund um einen Punkt herum stattfinden muss, wenn sie genau beobachtet, oder gehörig verbessert sind.

§. 62.

Auflösung der sphärischen Dreiecke nach Legendre und Soldner.

a) Reduction von Log. sin a in Log. a und umgekehrt. (v. B.)

Da die unmittelbare Auflösung der sphärischen Dreiecke für die bei Erdmessungen vorkommenden Fälle ebenso leicht, als die der geradlinigten ist, so scheint diese Berechnungsart der auf Legendre's Satz sich gründenden (genäherten) Auflösung vorzuziehen zu seyn. Allein da man die Seiten in Graden, Minuten und Sekunden erhält, so muss man mittelst des bekannten Erdhalbmessers hieraus erst die Längen der Seiten in einem bekannten Längenmass ausgedrückt finden, und die den Sinus entsprechenden Winkel bis auf $\tfrac{1}{1000}$ Sekunde genau berechnen, weil eine Sekunde schon 108,074 württ. Fuss ausmacht. Diess erfordert ein mühsames Berechnen