der eingeschlossenen Reihe: Erstes Glied, 1 = 1,000.0000

zweites Glied Log. e^2 = 7,8052071 — 10

Log. $\sin^2 \varphi'$ = 9,7491358 — 10

D. E. Log. 2 = 9,6989700 — 10

7,2533129 — 10; = 0,001.7919

Drittes Glied Log. 3 = 0,4771212

Log. e^4 = 5,6104142 — 10

Log. $\sin^4 \varphi'$ = 9,4982716 — 10

D. E. Log. 8 = 9,0969101 — 10

4,6827171 — 10; = 0,0000048

Summe 1,0017967

folglich r' = 1,0017967. a. und Log. a = 6,5147696

Log. 1,0017967 = 0,0007796

Log. r' = 6,5155492.

(wie §. 49.)

Verwandelt man aber die Gleichung 8) $r' = a\left(1 + \frac{e^2 \sin^2 \varphi'}{2} + \right.$ $\left. + \frac{3\, e^4 \sin^4 \varphi'}{8} + \ldots\right)$ nach der allgemeinen Formel: Log. $(1 + y) = M$ $(y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 + \ldots)$ so ist

$$y = \frac{e^2 \sin^2 \varphi'}{2} + \frac{3\, e^4 \sin^4 \varphi'}{8}$$

$$- \tfrac{1}{2} y^2 = \qquad - \frac{e^4 \sin^4 \varphi'}{8}$$

also $y - \frac{1}{2} y^2 = \frac{e^2 \sin^2 \varphi'}{2} + \frac{e^4 \sin^4 \varphi'}{4}$ folglich

$$M\,(y - \tfrac{1}{2} y^2) = \frac{M}{2}\, e^2 \sin^2 \varphi' + \frac{M}{4}\, e^4 \sin^4 \varphi' \text{ daher}$$

$$\text{Log } r' = \text{Log } a + \frac{M}{2}\, e^2 \sin^2 \varphi' + \frac{M}{4}\, e^4 \sin^4 \varphi'.$$ (wie Bohnenberger §. 49.)

§. 60.

Berechnung des Krümmungshalbmessers

für den elliptischen Meridian des Observatoriums von Tübingen, in der Breite $\varphi' = 48^0\ 31'$.

Nach §. 58 ist der Krümmungs-Halbmesser des elliptischen Meridians von B Fig. 24 in der geographischen Breite φ' = r, und

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{3/2}}$$

In dieser Formel für r ist zuerst der Nenner nach dem Binominal-Theorem in eine unendliche Reihe zu verwandeln. Setzt man nun

$$(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{3/2} = (a - x^2)^n, \text{ so ist:}$$

$$(a - x^2)^n = a^n - \frac{n}{1} a^{n-1} (x^2) + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} a^{n-2} (x^2)^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$a^{n-3} (x^2)^3 + \ldots = 1 - {}^3/_2\, x^2 + {}^3/_8\, x^4 + {}^3/_{48}\, x^6 + {}^9/_{384}\, x^8 + \ldots \text{ folglich}$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - {}^3/_2\, x^2 + {}^3/_8\, x^4 + {}^3/_{48}\, x^6 + {}^9/_{384}\, x^8 + \ldots}, \text{ nun sey}$$

$$\frac{a(1 - e^2)}{1 - {}^3/_2\, x^2 + {}^3/_8\, x^4 + {}^3/_{48}\, x^6} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \ldots,$$

dann ist

$$a(1 - e^2) = \left\{ \begin{array}{llllll} A + & B x^2 + & C x^4 + & D x^6 + & E x^8 + \ldots \\ & - {}^3/_2\, A x^2 & - {}^3/_2\, B x^4 & - {}^3/_2\, C x^6 & - {}^3/_2\, D x^8 + \ldots \\ & & + {}^3/_8\, A x^4 & + {}^3/_8\, B x^6 & + {}^3/_8\, C x^8 + \ldots \\ & & & + {}^3/_{48}\, A x^6 & + {}^3/_{48}\, B x^8 + \ldots \end{array} \right.$$

und $o = A - a(1 - e^2) + (B - {}^3/_2\, A)\, x^2 + (C - {}^3/_2\, B + {}^3/_8\, A)\, x^4 + (D - {}^3/_2\, C + {}^3/_8\, B + {}^3/_{48}\, A)\, x^6 + \ldots$

Hiernach bestimmen sich die Coefficienten

1) $A - a(1 - e^2) = o$ 2) $B - {}^3/_2 A = o$ 3) $C - {}^3/_2 B + {}^3/_8 A = o$

$A = a(1 - e^2)$ $B = {}^3/_2\, a(1 - e^2)$ $C - {}^9/_4\, a(1 - e^2) + {}^3/_8\, a(1 - e^2) = o$

$C = {}^{15}/_8\, a(1 - e^2)$

4) $D - {}^3/_2\, C + {}^3/_8\, B + {}^3/_{48}\, A = o$ woraus

$D = {}^{105}/_{48}\, a(1 - e^2)$.

folglich

$r = a(1 - e^2) + {}^3/_2\, a(1 - e^2)\, x^2 + {}^{15}/_8\, a(1 - e^2)\, x^4 + {}^{105}/_{48}\, a(1 - e^2)\, x^6 + \ldots$

oder

$r = a(1 - e^2) + {}^3/_2\, a(1 - e^2)\, e^2 \sin^2 \varphi' + {}^{15}/_8\, a(1 - e^2)\, e^4 \sin^4 \varphi' + {}^{105}/_{48}\, a(1 - e^2)\, e^6 \sin^6 \varphi' \ldots$

oder $r = a(1 - e^2)\,[1 + {}^3/_2\, e^2 \sin^2 \varphi' + {}^{15}/_8\, e^4 \sin^4 \varphi' + {}^{105}/_{48}\, e^6 \sin^6 \varphi' + \ldots]$

Endlich diese Gleichung nach der allgemeinen Formel Log. $(1 + y) = M\,(y - {}^1/_2\, y^2 + {}^1/_3\, y^3 - {}^1/_4\, y^4 + \ldots)$ umgewandelt, so erhält man,

$$\begin{array}{rl} y = & {}^3/_2\, e^2 \sin^2 \varphi' + {}^{15}/_8\, e^4 \sin^4 \varphi' + {}^{105}/_{48}\, e^6 \sin^6 \varphi' - \ldots \\ -\, {}^1/_2\, y^2 = & \qquad - {}^9/_8\, e^4 \sin^4 \varphi' - {}^{45}/_{32}\, e^6 \sin^6 \varphi' - \ldots \\ +\, {}^1/_3\, y^3 = & \qquad\qquad + {}^{27}/_{24}\, e^6 \sin^6 \varphi' + \ldots \\ \hline y - {}^1/_2\, y^2 + {}^1/_3\, y^3 = & {}^3/_2\, e^2 \sin^2 \varphi' + {}^6/_8\, e^4 \sin^4 \varphi' + {}^{61}/_{32}\, e^6 \sin^6 \varphi' + \ldots \end{array}$$

und $M (y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 - \ldots) = \frac{3}{2} M e^2 \sin^2 \varphi' + \frac{6}{8} M e^4 \sin^4 \varphi' + \frac{61}{32} M e^6 \sin^6 \varphi' + \ldots$ folglich

$\text{Log. } r = \text{Log. } a (1 - e^2) + \frac{3}{2} M e^2 \sin^2 \varphi' + \frac{6}{8} M e^4 \sin^4 \varphi' + \frac{61}{32} M e^6 \sin^6 \varphi' + \ldots$

Log. e^2 = 7,8052071—10 = 0,0063857 und $1 - e^2$ = 0,9936143.

Log. $(1 - e^2)$	= 9,9972179—10	Log. 3	= 0,4771212
Log. a	= 6,5147696	Log. M	= 9,6377843—10
1) Log. $[a(1 - e^2)]$	= 6,5119875	Log. e^2	= 7,8052071—10
2) $\frac{3}{2} M e^2 \sin^2 \varphi'$	= 0,0023346	Log. $\sin^2 \varphi'$	= 9,7491358—10
3) $\frac{6}{8} M e^4 \sin^4 \varphi'$	= 0,0000041	D. E. Log. 2	= 9.6989700—10
Log. r	= 6,5143262 für T.		7,3682 84—10
und §. 49.			0,0023346
Log. r′	= 6,5155492.	Log. 6	= 0,7781512
		Log. M	= 9,6377843—10
		Log. e^4	= 5,6104142—10
		Log. $\sin^4 \varphi'$	= 9,4982716—10
		D. E. Log. 8	= 9,0969100—10
			4,6215313—10
			0,0000041

Diese Radien für Württemberger Fuss und den Vermessungs-Horizont 844 Par. Fuss über dem Meer, sind

Log. r = 7,3471574 und Log. r′ = 7,3483804.

Die Halbmesser r′ und r sind eigentlich für jeden Dreiecks-Punkt zu berechnen. Ist aber das zu vermessende Land nicht sehr gross, so ist es hinreichend, diese Radien nur für den Mittelpunkt desselben zu berechnen, und sich ihrer bei allen Coordinaten-Berechnungen zu bedienen.

§. 61.

Das sphärische Dreieck bei Erdmessungen. (v. Bohnenberger.)

Es ist $\sin a = a - \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2\ldots5} - \frac{a^7}{1.2\ldots7} + \frac{a^9}{1.2\ldots9} - \ldots$

Wenn aber der Bogen a nicht über 2 Grade beträgt, so ist sehr nahe $\sin a = a - \frac{1}{6} a^3$ für den Halbmesser = 1. Denn das nächste vernachlässigte Glied ist $\frac{1}{1.2.3.4.5} a^5$ welches in einem Kreis von dem Halbmesser r′ ausmacht $\frac{r' a^5}{120}$.