der Krümmungs-Halbmesser sich zur Normallinie verhält, wie das Quadrat dieser Normallinie zu dem Quadrat des halben Parameters derjenigen Axe, an welche hin die Normallinie geht, folglich ist $r : r' = r'^2 : p^2$ daher $r\,p^2 = r'^3$ (I).

Es ist aber auch der Parameter die dritte Proportionallinie zu zwei zugeordneten Durchmessern, und zwar zum ersteren, nämlich:

$$b : a = a : p \text{ folglich } p = \frac{a^2}{b}$$

Da aber nach §. 52 $b = a\sqrt{1 - e^2}$, so ist auch $p = \dfrac{a^2}{a\sqrt{1 - e^2}}$

$$= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Substituirt man nun diesen Werth für p in (I), so wie auch aus §. 55 r' so ist

$$r\left(\frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}\right)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}}\right)^3 = \frac{a^3}{(1 - e^2 \sin \varphi')^{3/2}} \text{ und}$$

$$r = \frac{a^3\,(1 - e^2)}{a^2\,(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{3/2}} = \frac{a\,(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{3/2}} \quad (\text{§. 40. Form 9.})$$

§. 59.

Berechnung des Krümmungshalbmessers

für die Perpendikelcurve des Mittelpunkts der württembergischen Landesvermessung, des Observatoriums zu Tübingen, dessen Breite $\varphi' = 48^0\,31'$ ist.[1]

In §. 55 ist der Radius für die Perpendikels-Curve in der Formel

$$r' = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}} \text{ bestimmt.}$$

Um diesen Ausdruck für r' in eine unendliche Reihe zu verwandeln, werde zuerst die Reihe, welche dem Nenner desselben entspricht, nach dem Binominal-Theorem gesucht, und zu diesem Behufe vorläufig $e^2 \sin^2 \varphi' = x^2$ gesetzt, so ist allgemein für $(1 - x^2)^{1/2}$

$$1)\ (a - x^2)^n = a^n - n\,a^{n-1} x^2 + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,a^{-2} (x^2)^2 - \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^{n-3}\,(x^2)^3 + \ldots \text{ und}$$

$$2)\ (1 - x^2)^{1/2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \frac{5\,x^8}{128} - \ldots \text{ folglich}$$

[1] Ueber die neu bestimmte geographische Lage der Sternwarte fand sich im Nachlass des Professors v. Bohnenberger nichts vor; im zwölften Abschnitt ist daher die geographische Bestimmung nachgewiesen.

$$3)\ r' = \frac{a}{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \dots}$$ und setzt man diese Function gleich der allgemeinen Reihe $= A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \dots$ also

$$4)\ \frac{a}{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} \dots} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \dots$$ so ist

$$5)\ a = \begin{cases} A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \dots \\ - \frac{A}{2}x^2 - \frac{B}{2}x^4 - \frac{C}{2}x^6 - \frac{D}{2}x^8 - \dots \\ \qquad - \frac{A}{8}x^4 - \frac{B}{8}x^6 - \frac{C}{8}x^8 - \dots \\ \qquad\qquad - \frac{A}{16}x^6 - \frac{B}{16}x^8 - \dots \end{cases}$$

$$6)\ o = A - a + \left(B - \frac{A}{2}\right)x^2 + \left(C - \frac{B}{2} - \frac{A}{8}\right)x^4 + \left(D - \frac{C}{2} - \frac{B}{8} - \frac{A}{16}\right)x^6 + \dots$$

und hiernach

$$A - a = o \quad B - \frac{A}{2} = o \quad C - \frac{B}{2} - \frac{A}{8} = o. \quad D - \frac{C}{2} - \frac{B}{8} - \frac{A}{16} = o$$

$$A = a \quad B - \frac{a}{2} = o \quad C - \frac{a}{4} - \frac{a}{8} = o. \quad D - \frac{3a}{8} - \frac{a}{16} - \frac{a}{16} = o$$

$$B = \frac{a}{2} \qquad C = \frac{3a}{8}. \qquad D = \frac{5a}{16}$$ hat man

$$7)\ \frac{a}{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16}} = a + \frac{a x^2}{2} + \frac{3 a x^4}{8} + \frac{5 a x^6}{16} + \dots$$

folglich $r' = a\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{5x^6}{16} + \dots\right)$ und für x den Werth gesetzt: $8)\ r' = a\left(1 + \frac{e^2 \sin^2 \varphi'}{2} + \frac{3 e^4 \sin^4 \varphi'}{8.} + \frac{5 e^6 \sin^6 \varphi'}{16.} + \dots\right)$

Nun ist nach §. 49.

$\text{Log. } a = 6{,}5147696$ (für Toisen.)

$\text{Log. } e^2 = 7{,}8052071 - 10$

$\text{Log. } e^4 = 5{,}6104142 - 10$

$\text{Log. } \sin \varphi' = \text{Log. } \sin 48^0\, 31' = 9{,}8745679 - 10$

$\text{Log. } \sin^2 \varphi' = 9{,}7491358 - 10$

$\text{Log. } \sin^4 \varphi' = 9{,}4982716 - 10$ und es berechnet sich der eingeschlossenen Reihe: Erstes Glied, 1 = 1,000.0000

zweites Glied Log. e^2 = 7,8052071 — 10

Log. $\sin^2 \varphi'$ = 9,7491358 — 10

D. E. Log. 2 = 9,6989700 — 10

7,2533129 — 10; = 0,001.7919

Drittes Glied Log. 3 = 0,4771212

Log. e^4 = 5,6104142 — 10

Log. $\sin^4 \varphi'$ = 9,4982716 — 10

D. E. Log. 8 = 9,0969101 — 10

4,6827171 — 10; = 0,0000048

Summe 1,0017967

folglich r' = 1,0017967. a. und Log. a = 6,5147696

Log. 1,0017967 = 0,0007796

Log. r' = 6,5155492.

(wie §. 49.)

Verwandelt man aber die Gleichung 8) $r' = a \left(1 + \frac{e^2 \sin^2 \varphi'}{2} + \right.$ $\left. + \frac{3\, e^4 \sin^4 \varphi'}{8} + \ldots\right)$ nach der allgemeinen Formel: Log. $(1 + y) = M$ $(y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 + \ldots)$ so ist

$$y = \frac{e^2 \sin^2 \varphi'}{2} + \frac{3\, e^4 \sin^4 \varphi'}{8}$$

$$-\ \tfrac{1}{2} y^2 = \qquad - \frac{e^4 \sin^4 \varphi'}{8}$$

also $y - \frac{1}{2} y^2 = \frac{e^2 \sin^2 \varphi'}{2} + \frac{e^4 \sin^4 \varphi'}{4}$ folglich

$$M\,(y - \tfrac{1}{2} y^2) = \frac{M}{2}\, e^2 \sin^2 \varphi' + \frac{M}{4}\, e^4 \sin^4 \varphi' \text{ daher}$$

$$\text{Log } r' = \text{Log } a + \frac{M}{2}\, e^2 \sin^2 \varphi' + \frac{M}{4}\, e^4 \sin^4 \varphi'. \text{ (wie Bohnenberger §. 49.)}$$

§. 60.

Berechnung des Krümmungshalbmessers

für den elliptischen Meridian des Observatoriums von Tübingen, in der Breite $\varphi' = 48^0\ 31'$.

Nach §. 58 ist der Krümmungs-Halbmesser des elliptischen Meridians von B Fig. 24 in der geographischen Breite φ' = r, und

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{3/2}}$$