$\varphi' - y$. Substituirt man nun aus §§. 53 und 54 in diese Gleichung die Werthe von x und y, so ist:

$$c = \frac{a \cos \varphi' \,\mathrm{Tang.}\, \varphi'}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} - \frac{a\,(1 - e^2) \sin \varphi'}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}}$$

$$= \frac{a\,[\cos \varphi' \,\mathrm{Tang.}\, \varphi' - (1 - e^2) \sin \varphi']}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} = \frac{a\,[\cos \varphi' \dfrac{\sin \varphi'}{\cos \varphi'} - (1 - e^2) \sin \varphi']}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}}$$

$$= \frac{a \sin \varphi' - a \sin \varphi' + a\, e^2 \sin \varphi'}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} \text{ folglich } c = \frac{a\, e^2 \sin \varphi'}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} \text{ und}$$

weil nach §. 55. $r' = \dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}}$, so ist auch

$$c = r'\, e^2 \sin \varphi'. \quad \text{(§. 40. Form 7.)}$$

§. 57.

Setzt man den Halbmesser der Erde $= R$, und $R^2 = y^2 + x^2$, so ist, wenn die für x und y oben gefundenen Werthe substituirt werden:

$$R^2 = \left(\frac{a \cos \varphi'}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}}\right)^2 + \left(\frac{a\,(1 - e^2) \sin \varphi'}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}}\right)^2$$

$$= \frac{a^2 \cos^2 \varphi' + a^2 (1 - e^2)^2.\, \sin^2 \varphi'}{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}$$

$$= \frac{a^2 - a^2.\, \sin^2 \varphi' + a^2 (1 - 2\, e^2 + e^4) \sin^2 \varphi'}{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}$$

$$= \frac{a^2 - a^2 \sin^2 \varphi' + (a^2 - 2\, a^2 e^2 + a^2 e^4) \sin^2 \varphi'}{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}$$

$$= \frac{a^2 - a^2 \sin^2 \varphi' + a^2 \sin^2 \varphi' - 2\, a^2 e^2 \sin^2 \varphi' + a^2 e^4 \sin^2 \varphi'}{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}$$

$$= \frac{a^2 - 2\, a^2 e^2 \sin^2 \varphi' + a^2 e^4 \sin^2 \varphi'}{1 - e^2 \sin^2 \varphi'} = \frac{a^2 (1 - 2\, e^2 \sin^2 \varphi' + e^4 \sin^2 \varphi'}{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}$$

$$= \frac{a^2 [1 - e^2 (2 - e^2) \sin^2 \varphi']}{1 - e^2 \sin^2 \varphi'} \text{ oder } R^2 = \frac{[a^2\, 1 - e^2 (2 - e^2) \sin^2 \varphi']}{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}$$

(§. 40. Form 8.)

§. 58.

Bestimmung des Krümmungsradius für den Meridian des Punktes B. Fig. 24.

Es sey der Krümmungs-Halbmesser des elliptischen Meridians von B, unter der Breite $\varphi' = r$, und auch $p =$ dem halben Parameter der kleinen Axe, so ist aus der Lehre der Kegelschnitte bekannt, dass bei der Ellipse der Krümmungs-Halbmesser sich zur Normallinie verhält, wie das Quadrat dieser Normallinie zu dem Quadrat des halben Parameters derjenigen Axe, an welche hin die Normallinie geht, folglich ist $r : r' = r'^2 : p^2$ daher $r\,p^2 = r'^3$ (I).

Es ist aber auch der Parameter die dritte Proportionallinie zu zwei zugeordneten Durchmessern, und zwar zum ersteren, nämlich:

$$b : a = a : p \text{ folglich } p = \frac{a^2}{b}$$

Da aber nach §. 52 $b = a\sqrt{1 - e^2}$, so ist auch $p = \dfrac{a^2}{a\sqrt{1 - e^2}}$ $= \dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2}}$.

Substituirt man nun diesen Werth für p in (I), so wie auch aus §. 55 r' so ist $r\left(\dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2}}\right)^2 = \left(\dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}}\right)^3 = \dfrac{a^3}{(1 - e^2 \sin \varphi')^{3/2}}$ und

$$r = \frac{a^3 (1 - e^2)}{a^2 (1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{3/2}} = \frac{a (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{3/2}} \quad (\S.\ 40.\ \text{Form } 9.)$$

§. 59.

Berechnung des Krümmungshalbmessers
für die Perpendikelcurve des Mittelpunkts der württembergischen Landesvermessung, des Observatoriums zu Tübingen, dessen Breite $\varphi' = 48^0\,31'$ ist.[1]

In §. 55 ist der Radius für die Perpendikels-Curve in der Formel

$$r' = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}} \text{ bestimmt.}$$

Um diesen Ausdruck für r' in eine unendliche Reihe zu verwandeln, werde zuerst die Reihe, welche dem Nenner desselben entspricht, nach dem Binominal-Theorem gesucht, und zu diesem Behufe vorläufig $e^2 \sin^2 \varphi' = x^2$ gesetzt, so ist allgemein für $(1 - x^2)^{1/2}$

$$1)\ (a - x^2)^n = a^n - n\,a^{n-1} x^2 + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,a^{n-2} (x^2)^2 - \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^{n-3}\,(x^2)^3 + \ldots \text{ und}$$

$$2)\ (1 - x^2)^{1/2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \frac{5\,x^8}{128} - \ldots \text{ folglich}$$

[1] Ueber die neu bestimmte geographische Lage der Sternwarte fand sich im Nachlass des Professors v. Bohnenberger nichts vor; im zwölften Abschnitt ist daher die geographische Bestimmung nachgewiesen.