daher $KO = \frac{b^2 x}{a^2} = y \text{ Cotg. } \varphi' = y . \frac{\cos \varphi'}{\sin \varphi'}$

und

$$b^2 x \sin \varphi' = a^2 y \cos \varphi'. \quad (\S. 40. \text{ Form } 2.)$$

§. 52.

Ist ferner in dem rechtwinkligen Dreieck CPN, $PN = a$, $CP = b$ und $CN = e$ der Excentricität, so ist $PN^2 = CP^2 + CN^2$

$$a^2 = b^2 + e^2$$

und $e^2 = a^2 - b^2$ folglich $e = \sqrt{a^2 - b^2}$, und in Theilen der halben grossen Axe $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ daher $a\,e = \sqrt{a - b^2}$

$$\text{oder } a^2 e^2 = a^2 - b^2 \quad (\S. 40 \text{ Form } 3.)$$

$$\text{wornach auch } b = \sqrt{a^2 - a^2 e^2} = a\sqrt{1 - e^2}.$$

§. 53.

Bestimmung der Abscisse x.

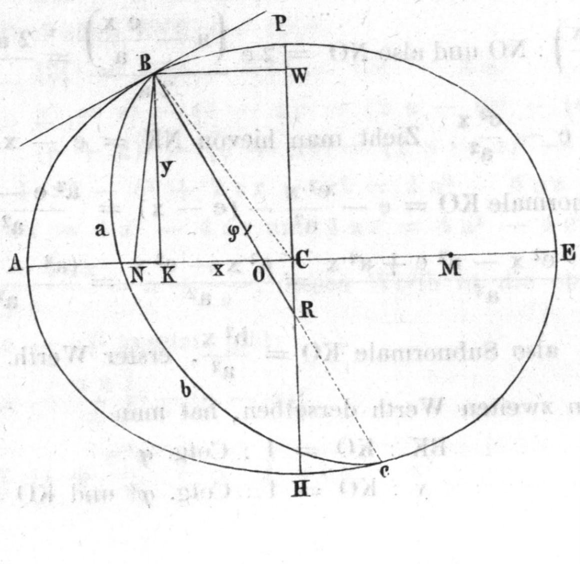
Die Gleichung der Ellipse $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$

$$\text{gibt: } y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

$$a^2 y^2 = a^2 b^2 - b^2 x^2$$

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Fig. 24.



$$\frac{a^2 y^2 + b^2 x^2}{a^2 b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

Die Gleichung $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ differenzirt gibt:

$$2 a^2 y dy + 2 b^2 x dx = o$$

$$2 b^2 x dx = - 2 a^2 y dy$$

$$\frac{dx}{dy} = - \frac{2 a^2 y dy}{2 b^2 x} \text{ und } - \frac{dx}{dy} = \frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

Ferner ist die allgemeine Gleichung der Normale $y' - y = - \frac{dx}{dy}(x' - x)$ wo $- \frac{dx}{dy}$ die Tangente des Winkels bezeichnet, welchen die Normale mit der Axe der Abscissen bildet, und bei einem Erdmeridian ist also $- \frac{dx}{dy}$ die Tangente der geographischen Breite eines Orts B $= \text{Tang. } \varphi' = - \frac{dx}{dy}$.

Setzt man nun statt $- \frac{dx}{dy}$ seinen obigen Werth, so ist:

$$\text{Tang. } \varphi' = \frac{a^2 y}{b^2 x} \text{ oder } \frac{\sin \varphi'}{\cos \varphi'} = \frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

Aus der Verbindung dieser Gleichung mit denen der §§. 51 und 52 kann man nun die Coordinaten x und y durch Functionen der geographischen Breite ausdrücken, wozu folgende Entwickelung führt.

Es ist BO die Normale des Punkts B und φ' die geographische Breite desselben. Die halbe grosse Axe der Ellipse sey wieder $= a$ und b die halbe kleine. Setzt man nun in obige Gleichung der Tang. φ' den Werth von $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ so ist:

$$\frac{\sin \varphi'}{\cos \varphi'} = \frac{a^2 \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}}{b^2 x} = \frac{a \sqrt{a^2 - x^2}}{b x} \text{ und ins Quadrat erhoben}$$

$$\frac{\sin^2 \varphi'}{\cos^2 \varphi'} = \frac{a^2 (a^2 - x^2)}{b^2 x^2} \text{ woraus } b^2 x^2 \sin^2 \varphi' = a^2 (a^2 - x^2) \cos^2 \varphi'$$

$$b^2 x^2 \sin^2 \varphi' = a^4 \cos^2 \varphi' - a^2 x^2 \cos^2 \varphi'$$

$$b^2 x^2 \sin^2 \varphi' + a^2 x^2 \cos^2 \varphi' = a^4 \cos^2 \varphi'$$

$$x^2 (b^2 \sin^2 \varphi' + a^2 \cos^2 \varphi') = a^4 \cos^2 \varphi' \text{ daher}$$

$$x^2 = \frac{a^4 \cos^2 \varphi'}{b^2 \sin^2 \varphi' + a^2 \cos^2 \varphi'} = \frac{a^4 \cos^2 \varphi'}{b^2 (1 - \cos^2 \varphi') + a^2 \cos^2 \varphi'}$$

$$x = \frac{a^2 \cos \varphi'}{\sqrt{b^2 (1 - \cos^2 \varphi') + a^2 \cos^2 \varphi'}} = \frac{a^2 \cos \varphi'}{\sqrt{b^2 - b^2 \cos^2 \varphi' + a^2 \cos^2 \varphi'}} =$$

$$\frac{a^2 \cos \varphi'}{\sqrt{b^2 \left(1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2}\right) \cos^2 \varphi'}}$$

und setzt man nun $\frac{a^2 - b^2}{b^2} = e^2$, so ist

$$x = \frac{a^2 \cos \varphi'}{b \sqrt{1 + e^2 \cos^2 \varphi'}}$$

Führt man aber in obiger Gleichung $x^2 = \frac{a^4 . \cos^2 \varphi'}{b^2 \sin^2 \varphi' + a^2 \cos^2 \varphi'}$ für $\cos^2 \varphi'$ die ihr gleiche Grösse $1 - \sin^2 \varphi'$ ein, so ist

$$x^2 = \frac{a^4 \cos^2 \varphi'}{b^2 \sin^2 \varphi' + a^2 (1 - \sin^2 \varphi')} = \frac{a^4 \cos^2 \varphi'}{b^2 \sin^2 \varphi' + a^2 - a^2 \sin^2 \varphi'}$$

$$= \frac{a^4 \cos^2 \varphi'}{(b^2 - a^2) \sin^2 \varphi' + a^2}$$

$$x^2 = \frac{a^4 \cos^2 \varphi'}{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi'} = \frac{a^4 \cos^2 \varphi'}{\left(a^2 1 - \frac{(a - b^2)}{a^2}\right) \sin^2 \varphi'}$$ und folglich wenn

man $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$ setzt, so ist

$$x = \frac{a^2 \cos \varphi'}{a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} = \frac{a \cos \varphi'}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}}$$ (§. 40. Form 4.)

§. 54.

Bestimmung der Ordinate y.

Um den Werth der Ordinate y zu finden, hat man wieder die Gleichung der Ellipse $x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$ in die Gleichung $\frac{\sin \varphi'}{\cos \varphi'} = \frac{a^2 y}{b^2 x}$ zu setzen, und es ist $\frac{\sin \varphi'}{\cos \varphi'} = \frac{a^2 y}{b^2 \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}} = \frac{a y}{b \sqrt{b^2 - y^2}}$ folglich $\left(b \sqrt{b^2 - y^2}\right) \frac{\sin \varphi'}{\cos \varphi'} = a y$. Diese Gleichung ins Quadrat erhoben, gibt: $b^4 \frac{\sin^2 \varphi'}{\cos^2 \varphi'} - b^2 y^2 \frac{\sin^2 \varphi'}{\cos^2 \varphi'} = a^2 y^2$